

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ СОГЛАСОВАННОЙ АППРОКСИМАЦИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ЭНЕРГОБАЛАНСА СРЕДЫ

© 2019 г. *Ю.А. Повещенко^{1,2}, В.А. Гасилов^{1,2}, В.О. Подрыга^{1,3}, М.Е. Ладонкина¹, А.С. Волошин⁴, Д.С. Бойков¹, К.А. Беклемышева⁴*

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН pvictoria@list.ru

²Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ

³Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет

⁴Московский физико-технический институт (государственный университет)

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-00100п).

DOI: 10.1134/S0234087919070013

Методом опорных операторов для двумерных задач теории упругости построены интегрально согласованные аппроксимации компонент тензора деформаций и упругой энергии среды для уравнений теории упругости в терминах смещений. Исходные уравнения аппроксимированы на нерегулярных разностных сетках в плоскости $R-Z$ цилиндрической системы координат. Аппроксимации в плоскости переменных $R-Z$ получены из полных трехмерных аппроксимаций путем предельного перехода при стремлении к нулю угловой переменной. Построенные схемы сохраняют свойства дивергентности, самосопряженности и знакоопределенности, присущие соответствующим операторам в исходной системе дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: разностные схемы, метод опорных операторов, теория упругости, цилиндрическая геометрия.

DIFFERENCE SCHEMES OF CONSISTENT APPROXIMATION TO STRESS-STRAIN STATE AND ENERGY BALANCE OF MEDIUM

Yu.A. Poveshchenko^{1,2}, V.A. Gasilov^{1,2}, V.O. Podryga^{1,3}, M.E. Ladonkina¹, A.S. Voloshin⁴, D.S. Boykov¹, K.A. Beklemysheva⁴

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

² National Research Nuclear University MEPhI

³ Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)

⁴ Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Using the support operator technique for two-dimensional problems of elasticity theory we constructed integrally consistent approximations to the components of the strain tensor and the elastic energy of the medium for the equations of the elasticity theory in terms of displacements. Approximations are constructed for the case of irregular difference grids, in the R-Z plane of a cylindrical coordinate system. We use the limiting process assuming that the azimuthal angle tends to zero for passing from the full three-dimensional approximations to the two-dimensional approximations in the R-Z plane. The used technique preserves the divergent form, self-adjointness and sign-definiteness of the two-dimensional approximations. These properties are inherent in their 3D predecessors corresponding to the operators in the governing differential equations.

Key words: difference schemes, method of support operators, theory of elasticity, cylindrical geometry.

1. Введение

Расширение практики использования сеток нерегулярной структуры обусловлено потребностью решения прикладных задач математической физики в геометрически нетривиальных областях. К настоящему времени на основе общих методов типа метода конечных элементов (МКЭ) [1,2], сеточно-характеристического метода [3,4] и других разработаны разнообразные численные методики решения как стационарных, так и динамических задач механики сплошных сред. Эффективным методом аппроксимаций различных дифференциальных уравнений в частных производных является метод опорных или интегрально-согласованных операторов [5,6]. Обобщения этого метода на случай нерегулярных сеток [5-7] появились в результате анализа разработок проекционно-сеточных и вариационно-разностных схем для уравнений эллиптического типа. По сравнению с методами [1-4] метод опорных операторов обладает дополнительными возможностями в отношении построения численных методик для расчетов сопряженных задач упругопластики и гидродинамики. В этом плане можно отметить построение полностью консервативных и поворотно-нейтральных схем метода опорных операторов [8].

Настоящая работа посвящена построению и исследованию разностных схем для уравнений упругости, аппроксимируемых на нерегулярных сетках. С этой целью используется развитая в [7] техника аппроксимаций на сетках общего вида, основанная на методе опорных операторов. Схемы построены для нестационарной системы уравнений упругости, включающей описание энергобаланса упругой и внутренней энергий среды. Рассматривается случай аксиально-симметричных деформаций, описываемых в цилиндрической (r, z) -геометрии.

Общая постановка задачи рассматривается в разделе 2. В разделе 3 получены дискретные аналоги самосопряженных и знакоопределенных операций и дифференциальных операторов $\operatorname{div} t_{\mathbf{u}}$, $\operatorname{div}(\operatorname{tr}(t_{\mathbf{u}})\delta)$ [7] для моделирования силовых полей упругих процессов, а также $\int_O \operatorname{tr}(t_{\mathbf{u}}^2)dV$ и $\int_O \operatorname{tr}^2(t_{\mathbf{u}})dV$. Для построения этих аппроксимаций, следуя [7], скалярное произведение компонент тензора деформаций в пространстве тензорных сеточных функций выбирается согласованным образом, исходя из интеграла энергии деформированного тела, записанного в терминах смещений деформируемого тела. Аппроксимации, построенные в некоторой трехмерной области изменения координат цилиндрической системы (r, z, θ) , на сетках – декартовых произведениях $\Omega^2 \times \Omega^1 = \Omega(r, z) \times \Omega(\theta)$, нерегулярных в плоскости (r, z) , при предельном переходе по азимутальной координате $\theta \rightarrow 0$ сохраняют свойства дивергентности, самосопряженности и знакоопределенности дифференциальных операторов, но уже на двумерной нерегулярной разностной сетке $\Omega^2 = \Omega(r, z)$.

2. Постановка задачи

В пространственной области O с границей ∂O рассмотрим уравнения теории упругости в смещениях [9]:

$$\operatorname{div} X_{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad X_{\mathbf{u}} = 2\mu t_{\mathbf{u}} + \nu \operatorname{tr}(t_{\mathbf{u}})\delta, \quad t_{\mathbf{u}} = (d\mathbf{u} / d\mathbf{r} + \nabla \mathbf{u})/2$$

(с некоторыми граничными условиями) наряду с соответствующим интегральным соотношением:

$$\int_O \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u} X^T) dV + \int_O \mathbf{u} \operatorname{div} X dV = \int_{\partial O} (X \mathbf{u}, d\mathbf{s}), \quad \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u} X^T) = \operatorname{tr}\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} X\right) = \operatorname{tr}(t_{\mathbf{u}} X)|_{X=X^T}.$$

Здесь \mathbf{u} – вектор смещений, X – произвольный тензор, $X_{\mathbf{u}}$ – тензор напряжений, $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ – объемная плотность внешних сил в пространственной точке \mathbf{r} , $\mu > 0$ и $\nu \geq 0$ – коэффициенты Ламе, δ – метрический тензор. Символом $\operatorname{tr}(\)$ обозначается след тензора, индексом T – транспонирование.

Вклад в баланс внутренней энергии среды, связанный с деформационными процессами, выражается в виде $E = E(\operatorname{tr}(t_{\mathbf{u}}^2), \operatorname{tr}^2(t_{\mathbf{u}}))$. Кроме того, этот вклад связан с диссипативной функцией $d = \operatorname{tr}(X_{\mathbf{u}} t_{\mathbf{v}})$, где $X_{\mathbf{u}}$ – тензор напряжений (либо его сдвиговая часть), определяемый возникшими в среде смещениями \mathbf{u} , а $t_{\mathbf{v}}$ – тензор скоростей деформаций.

Для моделирования силовых полей в упругих процессах (также и более сложных, например, при учете пластичности) будут далее построены дивергентные, самосопряженные и знакоопределенные разностные аналоги тензорных операций векторного анализа $\operatorname{div} t_{\mathbf{u}}$, $\operatorname{div}(\operatorname{tr}(t_{\mathbf{u}})\delta)$.

Для моделирования энергии деформации E и диссипативной функции d [9] необходимо построить аппроксимации интегралов $\left(\int_{\Omega} \operatorname{tr}(t_{\mathbf{u}} t_{\mathbf{v}}) dV \right)_{\Delta}$ и $\left(\int_{\Omega} \operatorname{tr}(t_{\mathbf{u}}) \operatorname{tr}(t_{\mathbf{v}}) dV \right)_{\Delta}$. Этим целям посвящено дальнейшее изложение работы.

3. Метрические свойства сеток метода опорных операторов

Для расчетной сетки, состоящей из ячеек (Ω), образованных узлами (ω), гранями (σ) и ребрами (λ), введем сопряженную сетку [5-8] доменов $d(\omega)$, построенных вокруг узлов ω (см. рис.1).

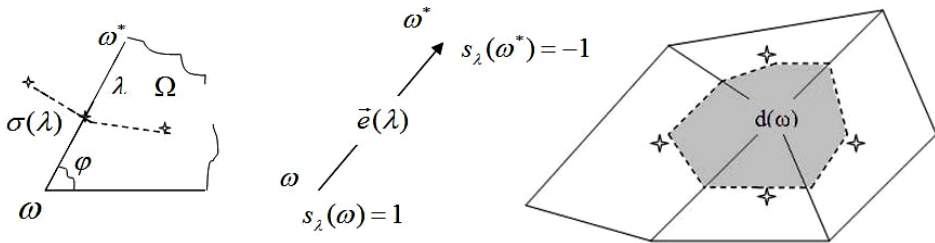


Рис.1. Построение 2D-базисов в (r,z) -плоскостях.

Грани домена $d(\omega)$ определяются метрическим оператором сетки [5-8]. Метрические соотношения на разностной сетке определяют конструкцию доменов для различных классов сеток, таких как 2D сетки (треугольные, четырехугольные), 3D сетки (тетраэдральные, параллелепипедные, призматические) и др.

В дальнейшем изложении выбор локальных базисных объемов V_{φ} иллюстрируется на примере треугольно-четырёхугольной 2D-сетки, что не влияет на общий характер результатов анализа аппроксимаций.

В области O введем семейство нерегулярных разностных сеток. Пусть сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек (Ω), базисов (φ), узлов (ω), ребер (λ) и связанных с ними ($\sigma(\lambda)$) – границами балансных узловых доменов $d(\omega)$ (см. рис.1).

Базисы φ создаются системой исходных (ковариантных) ортов $\mathbf{e}(\lambda)$, образованных ребрами. Под центрами ячеек Ω и ребер λ будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов ω , им инцидентных. Кри-

вая, соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром $\partial\lambda$), представляет собой поверхность $\sigma(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$, ориентированную так же, как и орт $\mathbf{e}(\lambda)$. Здесь $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ – орты взаимных (контравариантных) базисов [10] по отношению к исходным базисам, образованным ортами $\mathbf{e}(\lambda)$. На ребрах выделим положительное направление $s_\lambda(\omega)$ (см. рис.1).

Базисный объем дается формулой $V_\varphi = \frac{1}{6} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$ для треугольной ячейки Ω , содержащей базис φ и $V_\varphi = \frac{1}{4} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$ для четырехугольной ячейки, если $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$ – ребра, образующие базис φ . Наконец, $\sum_{\varphi(\lambda)}$ – суммирование по всем базисам φ , в образовании которых приняло участие ребро λ . Условие нормировки – $\sum_{\varphi(\Omega)} V_\varphi = V_\Omega$. Замкнутые поверхности $\sigma(\lambda(\omega))$ вокруг узла ω образуют узловые домены $d(\omega)$.

К узлам отнесем сеточную функцию \mathbf{u} , к ребрам – сеточную функцию

$$\Delta_\lambda \mathbf{u} = - \sum_{\omega(\lambda)} s_\lambda(\omega) \mathbf{u}_\omega = \mathbf{u}_{\omega'} - \mathbf{u}_\omega.$$

Тензорные поля [10], обозначаемые символом X , в нашей сеточной модели задаются своими представлениями в базисах X_φ . Внутреннюю дивергенцию $\text{DIN } X: (\varphi) \rightarrow (\omega)$ тензорного поля X определим с помощью теоремы Гаусса, применяя ее к домену $d(\omega)$:

$$\text{DIN } X = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega) \boldsymbol{\tau}_X(\lambda), \quad \boldsymbol{\tau}_X(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi (\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), X_\varphi),$$

где суммирование выполняется по всем ребрам λ , имеющим общий узел ω .

Обозначая через $()_\Delta$ аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\int_O \text{tr}(\nabla \mathbf{u} X^T) dV \right)_\Delta &= - \left(\int_O \mathbf{u} \text{div} X dV - \int_{\partial O} (X \mathbf{u}, \mathbf{ds}) \right)_\Delta = \\ &= - \sum_\omega (\mathbf{u}_\omega, \text{DIN } X) = \sum_\varphi V_\varphi \text{tr} \left((d\mathbf{u} / d\mathbf{r})_\varphi X_\varphi \right) = \sum_\varphi V_\varphi \text{tr}(\nabla \mathbf{u}_\varphi X_\varphi^T) \equiv \\ &\equiv \langle \nabla \mathbf{u}, X \rangle = \langle X, \nabla \mathbf{u} \rangle = \sum_\varphi V_\varphi \text{tr} \left(t_{\Delta \mathbf{u} \varphi} X_\varphi \right) \Big|_{X_\varphi = X_\varphi^T} = \langle t_{\Delta \mathbf{u}}, X \rangle. \end{aligned}$$

Здесь $\langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{X} \rangle$ определяется как скалярное произведение сеточных тензорных полей, аппроксимирующее $\left(\int_O \text{tr}(\nabla \mathbf{u} \mathbf{X}^T) dV \right)_\Delta$.

Тензорные поля $d\mathbf{u}/d\mathbf{r}$, $\nabla \mathbf{u}$ и $t_{\Delta \mathbf{u}}$, а также тензорное поле напряжений $X_{\Delta \mathbf{u}}$ заданы своими представлениями в базисах:

$$(d\mathbf{u}/d\mathbf{r})_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_\varphi(\lambda), \quad \nabla \mathbf{u}_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)} \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) \cdot \Delta_\lambda \mathbf{u},$$

$$t_{\Delta \mathbf{u}\varphi} = ((d\mathbf{u}/d\mathbf{r})_\varphi + \nabla \mathbf{u}_\varphi) / 2, \quad X_{\Delta \mathbf{u}\varphi} = 2\mu t_{\Delta \mathbf{u}\varphi} + \nu \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\varphi}) \delta.$$

Под $\sum_{\lambda(\omega)}$ понимается суммирование по ребрам λ , образующим базис φ .

Из тождеств $-\sum_{\omega} (\mathbf{v}_\omega, \text{DIN } t_{\Delta \mathbf{u}}) = \sum_{\varphi} V_\varphi \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\varphi} t_{\Delta \mathbf{v}\varphi})$ и $-\sum_{\omega} (\mathbf{v}_\omega, \text{DIN}(\text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}}) \delta)) = \sum_{\varphi} V_\varphi \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\varphi}) \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{v}\varphi})$ следует самосопряженность и положительная определенность операторов

$$\text{DIN } t_{\Delta \mathbf{u}} = (\text{DIN } t_{\Delta \mathbf{u}})^* > 0 \quad \text{и} \quad \text{DIN}(\text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}}) \delta) = (\text{DIN}(\text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}}) \delta))^* > 0.$$

4. Метрические свойства сеток в цилиндрической геометрии

Задачи в условиях осевой симметрии будем рассматривать как трехмерные, где сеточные функции зависят только от переменных (r, z) . В недеформированном состоянии упругое тело занимает трехмерную область O с границей ∂O . Область O есть результат вращения вокруг оси симметрии z двумерной (r, z) -области. В двумерной области на плоскости (r, z) строится нерегулярная сетка (см. рис.1,2а).

Эта сетка состоит из двумерных ячеек (Ω) , узлов (ω) , а также двумерных базисов (Φ) и ребер (λ) , их образующих. Сетку в трехмерной области O построим путем последовательных поворотов двумерной сетки вокруг оси симметрии z на «малый» угол θ . Построенные трехмерные ячейки будем обозначать (Ω) . Трехмерные базисы (φ) образуются из двумерных (Φ) добавлением к ребрам (λ) «азимутального» ребра λ_θ ячейки Ω . На рис.2 орты $\mathbf{e}(\lambda_\theta)$ соединяют узлы ω_α и ω_β из соседних (r, z) -плоскостей α и β в направлении азимутального вращения. Узлы (ω) не находятся на оси z . В такой конструкции для определенной в узлах (ω) сеточной функции $\mathbf{u} = \{u_r, u_z, u_\theta = 0\}$ можно написать $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_z \mathbf{e}_z + 0 \cdot \mathbf{e}_\theta$. Здесь $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ и \mathbf{e}_θ –

$$\begin{aligned} \text{DIN } X &= \sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega) \tau_X(\lambda) + \sum_{\lambda_{\theta}(\varphi)}^2 s_{\lambda_{\theta}}(\omega) \tau_X(\lambda_{\theta}), \\ \tau_X(\lambda) &= \sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_{\varphi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), X_{\varphi}), \quad \tau_X(\lambda_{\theta}) = \sum_{\Omega(\lambda_{\theta})} \sum_{\varphi(\lambda_{\theta}) \in \Omega}^2 V_{\varphi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}), X_{\varphi}). \end{aligned}$$

В обозначении $\{4|8\}$ цифра 4 соответствует количеству суммируемых базисов $\varphi(\lambda)$ для граничного ребра λ в (r, z) -плоскости, а цифра 8 соответствует внутреннему ребру λ . Базисные объемы V_{φ} выбираются как

$$V_{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{S_{\Phi(\varphi)}}{S_{\Omega \supset \Phi(\varphi)}} \cdot V_{\Omega \supset \varphi}, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{V_{\varphi}}{\theta} = \frac{1}{2} S_{\Phi(\varphi)} r_{\Omega \supset \Phi} = \frac{1}{2} V_{\Phi(\varphi)}, \quad V_{\Phi} = S_{\Phi} \cdot r_{\Omega \supset \Phi}.$$

Здесь $V_{\Omega \supset \varphi}$ – объем трехмерной ячейки Ω , содержащей базис φ ; $S_{\Omega \supset \Phi(\varphi)}$ – площадь этой ячейки в плоскости (r, z) . Очевидно, $S_{\Omega} = \sum_{\Phi(\Omega)} S_{\Phi}$.

Площади S_{Φ} в базисах Φ в плоскости (r, z) определяются аналогично площадям V_{φ} для треугольных и четырехугольных ячеек $\Omega \supset \Phi$, содержащих эти базисы (см. раздел 3). Под величиной $r_{\Omega \supset \Phi}$ понимается расстояние от оси z до центра ячейки Ω , определяемое как среднее арифметическое этих расстояний до узлов $\omega(\Omega)$, образующих ячейку.

5. Предельный переход $\theta \rightarrow 0$ в разностных аппроксимациях тензорных операций векторного анализа

Нам в дальнейшем понадобятся двумерные (в (r, z) -плоскости) разностные аналоги полученных в разделе 4 трехмерных тензорных операций для тензора смещений $t_{\Delta \mathbf{u}\varphi}$ и дивергенции $\text{DIN } X$: $(\varphi) \rightarrow (\omega)$, а также двумерный разностный аналог тождества $\text{div } \mathbf{u} = \text{tr}(t_{\mathbf{u}})$.

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\Phi} = \sum_{\lambda(\Phi)} \Delta_{\lambda} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \quad (\nabla \mathbf{u})_{\Phi} = \sum_{\lambda(\Phi)} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \cdot \Delta_{\lambda} \mathbf{u}, \quad t_{\Delta \mathbf{u}\Phi} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\Phi} + \nabla \mathbf{u}_{\Phi} \right), \quad (1)$$

$$\text{DIV}_2 \mathbf{u} = \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi}) = \sum_{\lambda(\Phi)} (\Delta_{\lambda} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)), \quad \text{DIV}_2 : (\omega) \rightarrow (\Phi).$$

Выразим $\text{DIN}_2 : (\Phi) \rightarrow (\omega)$ в виде

$$\text{DIN}_2 X = \sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega) \tau_{2X}(\lambda), \quad \tau_{2X}(\lambda) = \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_{\Phi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), X_{\Phi}), \quad V_{\Phi} = S_{\Phi} \cdot r_{\Omega \supset \Phi}. \quad (2)$$

В обозначении $\{2|4\}$ цифра 2 соответствует количеству суммируемых ба-

зисов $\Phi(\lambda)$ для граничного ребра λ в (r, z) -плоскости, а цифра 4 соответствует внутреннему ребру λ .

Учет в 2D-аппроксимациях членов, обусловленных переходом к цилиндрическим координатам, выполним посредством предельного перехода $\theta \rightarrow 0$ в 3D-сеточных конструкциях, построенных в разделах 3, 4.

5.1. Аппроксимация поля сил посредством операции div t_u . Полагая $X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}$, вычислим при $\theta \rightarrow 0$ входящую в $\text{DIN } X$ упругую силу $\tau_X(\lambda)$, действующую на предельную (при $\theta \rightarrow 0$) поверхность $\sigma(\lambda) = \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$ домена $d(\omega)$, перпендикулярную (r, z) -плоскости:

$$\tau_X(\lambda)|_{X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}, \theta \rightarrow 0} = A_{X\lambda}|_{X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}, \theta \rightarrow 0} + B_{X\lambda}|_{X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}, \theta \rightarrow 0}.$$

С учетом данных выше определений V_φ и S_Φ имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} A_{X\lambda} \Big|_{X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}} \right\} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\theta} \sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_\varphi \left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), \left\{ \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi)}^2 [\Delta_{\tilde{\lambda}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_\varphi(\tilde{\lambda}) + \mathbf{e}'_\varphi(\tilde{\lambda}) \cdot \Delta_{\tilde{\lambda}} \mathbf{u}] \right\} \right) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi (\mathbf{e}'_\Phi(\lambda), t_{\Delta u \Phi}) \right\} = \tau_{2X}(\lambda)|_{X_\Phi = t_{\Delta u \Phi}}. \end{aligned}$$

Индексы суммирования $\tilde{\lambda}$ и λ обозначают ребро в плоскости (r, z) .

Оценивая $B_{X\lambda}|_{X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}, \theta \rightarrow 0}$, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} B_{X\lambda} \Big|_{X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}} \right\} &= \left\{ \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} S_\Phi \cdot r_{\Omega \supset \Phi} \left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda), \left\{ \frac{\mathbf{u}_r}{r} (\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta) \right\} \right) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi \frac{\mathbf{u}_r}{r} (\mathbf{e}'_\Phi(\lambda), \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_\theta \right\} = 0, \end{aligned}$$

т.к. $\mathbf{e}'_\Phi(\lambda) \perp \mathbf{e}_\theta$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbf{e}'_\Phi(\lambda_\theta) \cdot \mathbf{e}'_\Phi(\lambda_\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbf{e}'_\Phi(\lambda_\theta) \cdot \mathbf{e}(\lambda_\theta) = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbf{e}'_\Phi(\lambda) = \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$.

Окончательно получаем

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} \tau_X(\lambda) \Big|_{X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}} \right\} = \tau_{2X}(\lambda)|_{X_\Phi = t_{\Delta u \Phi}}.$$

Полагая $X_\varphi = t_{\Delta u \Phi}$, аналогично вычислим при $\theta \rightarrow 0$ входящую в $\text{DIN } X$

упругую силу $\tau_X(\lambda_\theta)$, действующую на боковую поверхность домена $d(\omega)$, лежащую в плоскости $\alpha\beta$ (рис.2б):

$$\begin{aligned} \tau_X(\lambda_\theta)|_{X_\varphi=t\Delta\mathbf{u}\varphi} &= \sum_{\Omega(\lambda_\theta)} \sum_{\varphi(\lambda_\theta) \in \Omega} V_\varphi \left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\lambda(\varphi)} [\Delta_\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) + \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) \cdot \Delta_\lambda \mathbf{u}] + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{u_r}{r} [\mathbf{e}(\lambda_\theta) \cdot \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) + \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) \cdot \mathbf{e}(\lambda_\theta)] \right\} \right) = \\ &= \sum_{\Omega(\lambda_\theta)} \sum_{\varphi(\lambda_\theta) \in \Omega} \frac{V_\varphi}{2} \left\{ \sum_{\lambda(\varphi)} [(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \Delta_\lambda \mathbf{u}) \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) + (\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)) \Delta_\lambda \mathbf{u}] + \right. \\ &+ \left. \frac{u_r}{r} [(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \mathbf{e}(\lambda_\theta)) \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) + (\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta))^2 \mathbf{e}(\lambda_\theta)] \right\}. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое при $\theta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\theta} \sum_{\Omega(\lambda_\theta)} \sum_{\varphi(\lambda_\theta) \in \Omega} \frac{V_\varphi}{2} \left\{ \sum_{\lambda(\varphi)} [(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)) \Delta_\lambda \mathbf{u}] \right\} \right) = \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\theta} \sum_{\{\varphi\alpha, \varphi\beta\} \in \Omega} \frac{V_\varphi}{2} \left\{ \sum_{\lambda(\varphi\alpha)} (\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)) \left[\sum_{\omega(\lambda_\theta) = \{\omega\alpha, \omega\beta\}} s_{\lambda_\theta}(\omega) \Delta_{\lambda(\omega)} \mathbf{u} \right] \right\} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку в силу симметрии относительно плоскости $\alpha\beta$ $-(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda)) = (\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda))$, а угол между векторами $\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta)$ и $\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)$ удовлетворяет неравенству $\pi/2 - \theta/2 \leq \left\langle \text{угол } \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda) \right\rangle \leq \pi/2 + \theta/2$, то $\lim_{\theta \rightarrow 0} |(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda))| \leq \frac{1}{2r} |\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)|$.

Нетрудно видеть, что $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{\omega(\lambda_\theta) = \{\omega\alpha, \omega\beta\}} s_{\lambda_\theta}(\omega) \Delta_{\lambda(\omega)} \mathbf{u} = 0$.

Оценку $\lim_{\theta \rightarrow 0} V_\varphi$ для 3D базисного объема V_φ , погруженного в трехмерную ячейку Ω (т.е. $\varphi \in \Omega$), получим из следующих соображений. Ячейка Ω представляет собой шестигранник, если ее грани в плоскостях α и β (см. рис.2.) – четырехугольники, или призму, если ее основания в этих же плоскостях – треугольники. Обозначим площади граней ячейки Ω в (r, z) -плоскостях α и β как S_Ω , а расстояние от центра тяжести этих граней до оси z через r_Ω . При $\theta \rightarrow 0$ многогранник Ω стремится к соответствующему телу вращения, и по теореме Гульдена [11] его объем V_Ω представим как

$\lim_{\theta \rightarrow 0} V_{\Omega} / \theta = S_{\Omega} r_{\Omega}$. В ячейках Ω имеется 8 базисов φ (по четыре при плоскостях α и β) в случае шестигранника и 6 базисов φ (по три при плоскостях α и β) в случае призмы. Базисам φ соответствуют 2D базисы $\Phi(\varphi)$ в плоскостях α и β с отнесенными к ним площадями S_{Φ} (см. раздел 4). Выполнено нормировочное условие $\sum_{\Phi(\Omega)} S_{\Phi} = S_{\Omega}$. С учетом нормировки объем

V_{φ} ($\varphi \in \Omega$) можно определить как $V_{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{S_{\Phi}}{S_{\Omega}} \cdot V_{\Omega}$, при этом будет выполнено условие $\sum_{\varphi(\Omega)} V_{\varphi} = V_{\Omega}$. При указанных выше соотношениях между 3D и 2D

базисами, их объемами и площадями имеем: $V_{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{S_{\Phi(\varphi)}}{S_{\Omega \supset \Phi(\varphi)}} \times V_{\Omega \supset \varphi} \rightarrow \rightarrow \frac{\theta}{2} V_{\Phi(\varphi)}$ при $\theta \rightarrow 0$ ($V_{\Phi} = S_{\Phi} \cdot r_{\Omega \supset \Phi}$), т.е. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{V_{\varphi}}{\theta} = \frac{1}{2} V_{\Phi}$.

Таким образом, в силу выполненных ранее оценок справедливо:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \tau_X(\lambda_{\theta}) \Big|_{X_{\varphi} = t_{\Delta u \varphi}} \right\} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{\Omega(\lambda_{\theta})} \sum_{\varphi(\lambda_{\theta}) \in \Omega} \frac{V_{\varphi}}{2} \left\{ \frac{\mathbf{u}_r}{r} \left[\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}) + (\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}))^2 \mathbf{e}(\lambda_{\theta}) \right] \right\} \right\}.$$

Мы воспользовались равенствами $(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}), \Delta_{\lambda} \mathbf{u}) = 0$, т.к. $\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}) \perp \Delta_{\lambda} \mathbf{u}$, и очевидным свойством взаимного базиса $(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}), \mathbf{e}_{\varphi}(\lambda_{\theta})) = 1$.

Вклад от обеих боковых поверхностей, входящих в $\text{DIN } X \Big|_{X_{\varphi} = t_{\Delta u \varphi}, \theta \rightarrow 0}$ упругих сил $\tau_X(\lambda_{\theta})$, оценивается как

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\theta} \sum_{\lambda_{\theta}(\varphi)} s_{\lambda_{\theta}}(\omega) \tau_X(\lambda_{\theta}) \right] \Big|_{X_{\varphi}} = \\ & = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4} \left[\sum_{\Phi(\omega)} S_{\Phi} r_{\Omega} \right] \left(-\frac{\mathbf{u}_r}{r} \mathbf{e}_r \right) \left[\frac{2}{r \theta \cos(\theta/2)} \sin(\theta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{(r \theta \cos(\theta/2))^2} (r \theta) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} = -\frac{\mathbf{u}_r}{r^2} V_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_r, \quad X_{\varphi} = t_{\Delta u \varphi}, \quad \Omega \supset \Phi. \end{aligned}$$

Здесь $V_{2\omega} = \sum_{\Phi(\omega)} V_{\Phi}$, $V_{\Phi} = S_{\Phi} \cdot r_{\Omega}$.

С учетом вычисленных ранее упругих сил $\tau_X(\lambda)|_{X_\varphi=t_{\Delta u\Phi}, \theta \rightarrow 0}$, действующих на поверхности $\sigma(\lambda)$ (см. рис.1), окончательно получаем

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{DIN}\{t_{\Delta u\Phi}\}}{\theta} = \text{DIN}_2\{t_{\Delta u\Phi}\} - \frac{u_r}{r^2} \mathbf{e}_r V_2 \omega. \quad (3)$$

5.2. Аппроксимация нормального поля упругих сил посредством операции $\text{div}(\text{tr}(t_{\mathbf{u}})\delta)$. Полагая $X_\varphi = \text{tr}(t_{\Delta u\Phi})\delta$, вычислим при $\theta \rightarrow 0$ входящую в $\text{DIN}X$ упругую силу $\tau_X(\lambda)$ на предельной поверхности $\sigma(\lambda) = \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$ домена $d(\omega)$:

$$\tau_X(\lambda)|_{X_\varphi = \text{tr}(t_{\Delta u\Phi})\delta} = \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_\Phi (\mathbf{e}'_\Phi(\lambda), \text{tr}(t_{\Delta u\Phi})\delta) = \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{4|8\}} \text{tr}(t_{\Delta u\Phi}) V_\Phi \mathbf{e}'_\Phi(\lambda),$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} \tau_X(\lambda)|_{X_\varphi = \text{tr}(t_{\Delta u\Phi})\delta} \right\} = \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} \left[\text{tr}(t_{\Delta u\Phi}) + \frac{u_r}{r} \right] V_\Phi \mathbf{e}'_\Phi(\lambda).$$

Оценивая при $\theta \rightarrow 0$ суммарный вклад всех таких сил

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega) \tau_X(\lambda) \Big|_{X_\varphi = \text{tr}(t_{\Delta u\Phi})\delta} \quad \text{в } \text{DIN}X, \text{ получим} \\ & \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega) \tau_X(\lambda) \Big|_{X_\varphi = \text{tr}(t_{\Delta u\Phi})\delta} \right\} = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega) \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} \left[\text{tr}(t_{\Delta u\Phi}) + \frac{u_r}{r} \right] V_\Phi \mathbf{e}'_\Phi(\lambda) = \\ & = \text{DIN}_2 \left\{ \left[\text{tr}(t_{\Delta u\Phi}) + \frac{u_r}{r} \right] \delta \right\}. \end{aligned}$$

Полагая $X_\varphi = \text{tr}(t_{\Delta u\Phi})\delta$, вычислим при $\theta \rightarrow 0$ упругую силу $\tau_X(\lambda_\theta)$, действующую на лежащую в плоскости $\alpha\beta$ боковую поверхность домена $d(\omega)$, в пределе при $\theta \rightarrow 0$ совпадающую с плоскостью (r, z) .

$$\tau_X(\lambda_\theta)|_{X_\varphi = \text{tr}(t_{\Delta u\Phi})\delta} = \sum_{\Omega(\lambda_\theta)} \sum_{\varphi(\lambda_\theta) \in \Omega}^2 V_\varphi \left\{ \sum_{\lambda(\varphi)} \Psi_{\Phi, \theta}(\lambda) + u_r / r \right\} \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta).$$

В силу симметрии относительно плоскости $\alpha\beta$ величина $\Psi_{\Phi, \theta}(\lambda) = (\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda))$, как и объемы V_φ и u_r/r , является постоянной при повороте базисов φ на малые углы θ , причем $\lim_{\theta \rightarrow 0} \Psi_{\Phi, \theta}(\lambda) = (\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda))$.

Оценка при $\theta \rightarrow 0$ суммарного вклада всех таких сил в DINX дает

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} \sum_{\lambda_{\theta}(\omega)}^2 s_{\lambda_{\theta}}(\omega) \boldsymbol{\tau}_X(\lambda_{\theta}) \right\}_{X_{\Phi} = \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi})\delta} = \\ & = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{\Phi(\omega)} V_{\Phi} \left\{ \sum_{\lambda(\Phi)} \Psi_{\Phi, \theta}(\lambda) + \frac{u_r}{r} \right\} \right] (-\mathbf{e}_r) \left[2 \frac{1}{r\theta \cos(\theta/2)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right] \right\} = \\ & = -\mathbf{e}_r \left\{ \frac{1}{r} \sum_{\Phi(\omega)} V_{\Phi} \sum_{\lambda(\Phi)} (\Delta_{\lambda} \mathbf{u}, \mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)) + \frac{u_r}{r^2} \sum_{\Phi(\omega)} V_{\Phi} \right\} = -\mathbf{e}_r \left\{ \frac{1}{r} \sum_{\Phi(\omega)} V_{\Phi} \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi}) + \frac{u_r}{r^2} V_{2\omega} \right\}. \end{aligned}$$

С учетом вычисленных ранее упругих сил $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)|_{X_{\Phi} = \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi})\delta}$, действующих на поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)$ (см. рис.1), окончательно получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} \text{DIN} \{ \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi})\delta \} \right\} = \\ & = \text{DIN}_2 \left\{ \left[\text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi}) + \frac{u_r}{r} \right] \delta \right\} - \mathbf{e}_r \left\{ \frac{1}{r} \sum_{\Phi(\omega)} V_{\Phi} \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi}) + \frac{u_r}{r^2} V_{2\omega} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Как отмечалось в разделе 2, для расчета энергии деформации и диссипативной функции необходима аппроксимация на ячейках сетки Ω следующих интегралов:

$$\left(\int_{\Omega} \text{tr}(t_{\mathbf{u}} t_{\mathbf{v}}) dV \right)_{\underline{\Delta}} \quad \text{и} \quad \left(\int_{\Omega} \text{tr}(t_{\mathbf{u}}) \text{tr}(t_{\mathbf{v}}) dV \right)_{\underline{\Delta}}. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{u} – поле смещений, \mathbf{v} – поле скоростей деформируемой среды.

С учетом формул, полученных в разделах 4 и 5, можно написать:

$$t_{\Delta \mathbf{u}\Phi} \Big|_{\theta \rightarrow 0} = t_{\Delta \mathbf{u}\Phi} + \frac{u_r}{r} \mathbf{e}_{\theta} \cdot \mathbf{e}_{\theta}, \quad \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi}) \Big|_{\theta \rightarrow 0} = \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi}) + u_r / r = \text{DIV}_2 \mathbf{u} + u_r / r.$$

$$\text{Здесь } \text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi}) = \text{DIV}_2 \mathbf{u} = \sum_{\lambda(\Phi)} (\Delta_{\lambda} \mathbf{u}, \mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)).$$

Используя эти формулы и вычисляя предельные выражения для интегралов (5), получим

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} \left(\int_{\Omega} \text{tr}(t_{\mathbf{u}} t_{\mathbf{v}}) dV \right)_{\underline{\Delta}} \right\} = \Gamma_{\Omega} \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\text{tr}(t_{\Delta \mathbf{u}\Phi} t_{\Delta \mathbf{v}\Phi}) + \frac{u_r v_r}{r^2} \right] S_{\Phi}, \quad (6)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} \left(\int_{\Omega} \text{tr}(t_{\mathbf{u}}) \text{tr}(t_{\mathbf{v}}) dV \right) \right\}_{\underline{\Delta}} = r_{\Omega} \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\text{DIV}_2 \mathbf{u} + \frac{u_r}{r} \right] \left[\text{DIV}_2 \mathbf{v} + \frac{v_r}{r} \right] S_{\Phi}. \quad (7)$$

Формулы (1)-(7) составляют итог теоретического анализа аппроксимаций, построенных на основе метода опорных операторов.

6. Численные эксперименты

Качество разработанных аппроксимаций проверялось на ряде модельных задач, для решения которых требуется выполнять расчеты динамики упругой (упругопластической) среды в условиях больших деформаций. Так, в [8] в качестве тестов, свидетельствующих о корректности разработанной аппроксимации упругих сил, был рассмотрен ряд динамических и статических задач: о распространении плоской продольной и поперечной звуковых волн, о частичном отражении звуковой волны от границы раздела двух сред с разными упругими свойствами, о деформации тела под воздействием внешних сил, направленных по нормали или по касательной к поверхности. В последнем случае для получения статического решения в схему была добавлена математическая (искусственная) вязкость. Данные тесты были рассчитаны с достаточно высокой точностью и показали пригодность методики для проведения прикладных расчетов. Например, в случае точного решения задачи в виде однородной деформации численное решение по мере затухания упругих колебаний выходит на точное значение с произвольной точностью, зависящей от уровня дискретизации сеточной модели. Дисбаланс полной энергии колеблющейся среды варьировался от сотых долей процента до долей процента. Расчеты демонстрируют важное свойство «поворотной нейтральности» разностной схемы, т.е. независимость решения от направления распространения волны на разностной сетке.

Здесь мы приведем данные по моделированию соударения упругого стержня с преградой (задача о "стержне Тейлора", см. [12, 13]). Данный тест часто применяется для проверки качества численных методик, которые разрабатываются для моделирования упругопластических течений.

Постановка задачи включает описание удара сплошного цилиндра, направленного по нормали к жесткой стенке. Расчет выполнен в соответствии с данными [13]: начальная длина и диаметр стержня $L = 10$ см, $D = 2$ см. Расчет выполнен в приближении упругопластической среды с уравнением состояния в форме Ми-Грюнайзена, при параметрах материала (сталь): $\rho_0 = 7.85$ г/см³; $c_0 = 4.67$ км/с; $n = 5$; $\Gamma = 2$; $Y_0 = 0.7$ ГПа. В начальный момент энергия деформации стержня равнялась нулю. На рис.3,4 представлены ре-

зультаты расчета. Полученные данные хорошо согласуются с результатами расчета [13] и экспериментальными данными [12]: при начальной скорости стержня $V_0=0.235$ км/с эксперимент дает на конечную длину стержня (время $t = 60$ мкс) 8 см, расчет [8] – 7.985 см, наш расчет – 7.988 см. Хорошее согласование достигнуто и по диаметру “пятна соприкосновения” стержня со стенкой.

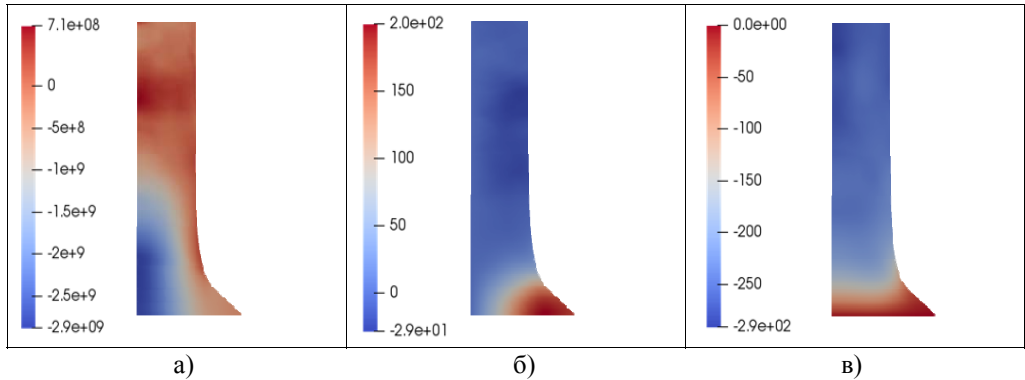


Рис.3. Задача Тейлора: распределения (а) давления, (б) радиальной и (в) аксиальной компонент скорости на момент времени 59 мкс.

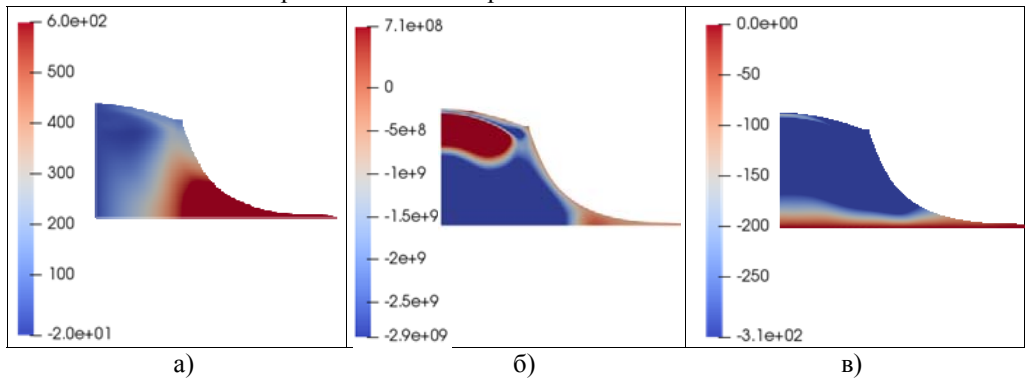


Рис.4. Задача Тейлора: распределения (а) давления, (б) радиальной и (с) аксиальной компонент скорости на момент времени 314 мкс.

Для выполнения расчетов при больших деформациях методика интегрально-согласованных аппроксимаций была распространена на модель пластического течения Прандтля-Рейса с учетом критерия пластичности Мизеса [14]. Расчет течения в лагранжевых переменных [8] оказалось возможным довести до весьма большой деформации стержня. На рис.4 показаны распределения давления, радиальной и аксиальной компонент скорости на время $t = 314$ мкс, когда стержень сократился по длине до 60% относительно первоначальной длины, а диаметр “пятна соприкосновения” составил ~ 180% по сравнению с начальным размером.

Рис.5, на котором показаны результаты аналогичного расчета для задачи о соударении медного стержня, показывает хорошее качество воспроизведения упругой волны. Фронт волны сжатия на время $t \sim 30$ мкс занимает не более двух ячеек расчетной области, когда по длине стержня было взято 100 ячеек, т.е. шаг расчетной сетки по вертикали – 0.0008, по горизонтали – 0.0008. Отметим, что в наших расчетах в уравнения движения среды вводилась математическая (искусственная) вязкость.

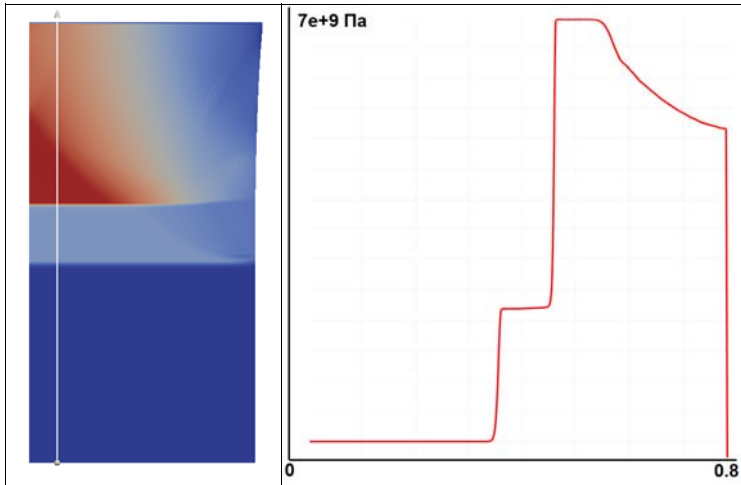


Рис.5. Распределение давления в волне сжатия на момент времени 30 мкс.

7. Заключение

На нерегулярных сетках теории метода опорных операторов построены аппроксимации силовых полей упругих процессов с помощью введенных в работе разностных операций $\text{div}(t_{\mathbf{u}})$ и $\text{div}(\text{tr}(t_{\mathbf{u}})\delta)$, сопряженных в смысле интегральных тождеств. Получены выражения разностных аналогов энергии деформаций и диссипативной функции, представленных в виде интегралов $\int_{\Omega} \text{tr}(t_{\mathbf{u}}t_{\mathbf{v}})dV$ и $\int_{\Omega} \text{tr}(t_{\mathbf{u}})\text{tr}(t_{\mathbf{v}})dV$ в цилиндрической геометрии. Для расчетов силовых полей упругих процессов и соответствующего вклада в энергобаланс среды на нерегулярных сетках методом опорных операторов получены дискретные аналоги самосопряженных и знакоопределенных операций $\text{div}(t_{\mathbf{u}})$ и $\text{div}(\text{tr}(t_{\mathbf{u}})\delta)$, а также аппроксимации интегралов $\int_{\Omega} \text{tr}(t_{\mathbf{u}}^2)dV$ и $\int_{\Omega} \text{tr}^2(t_{\mathbf{u}})dV$ в цилиндрической геометрии. Эти результаты получены при формулировке двумерной задачи с осевой симметрией как трехмерной в терминах тензорных объектов, когда сеточные функции зависят только от

переменных (r, z) . Скалярное произведение в пространстве сеточных функций компонент тензора деформаций выбирается согласованно с энергией деформированного тела. Используемый в работе подход обеспечивает дивергентность, самосопряженность и знакоопределенность аппроксимаций операций $\text{div}(t_u)$ и $\text{div}(\text{tr}(t_u)\delta)$ в 3D-конструкциях и при предельном переходе $\theta \rightarrow 0$. С другой стороны, раскрытие неопределенностей при использовании предельного перехода $\theta \rightarrow 0$ в дифференциальном вращении (с учетом азимутальной симметрии тензорно-диадных объектов) привело к возникновению “кривизны” пространства в операциях дискретного анализа 2D-задачи, связанной с членами вида u_r/r^2 и u_r/r в соответствующих представлениях сеточных операций. Вычислительные эксперименты показывают, что разработанные разностные схемы целесообразно применять к расчетам быстропротекающих процессов в упругих телах, в частности, когда напряженно-деформируемое состояние среды определяется как ее механической, так и тепловой энергией системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. The Finite Element Method. Vol. 2: Solid and Structural Mechanics.* – London: Butterworth Heinemann, 2000, 689 p.
2. *O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals.* – Amsterdam: Elsevier, 2005, 733 p.
3. *В.Д. Иванов, Р.А. Папшутин, И.Б. Петров, А.Г. Тормасов, А.С. Холодов.* Сеточно-характеристические методы расчета процессов динамического деформирования на нерегулярных расчетных сетках // Матем. Моделирование, 1999, т.11, №7, с.118-127;
V.D. Ivanov, R.A. Pashutin, I.B. Petrov, A.G. Tormasov, A.S. Kholodov. Setochno-kharakteristicheskie metody rascheta protsessov dinamicheskogo deformirovaniia na nereguliarnykh raschetnykh setkakh // Matem. Modelirovanie, 1999, t.11, №7, s.118-127.
4. *И.Е. Квасов, И.Б. Петров, Ф.Б. Челноков.* Расчет волновых процессов в неоднородных пространственных конструкциях // Матем. моделирование, 2009, т.21, №5, с.3-9;
I.E. Kvasov, I.B. Petrov, F.B. Shelnokov. Raschet volnovykh protsessov v neodnorodnykh prostranstvennykh konstruktssiiakh // Matem. modelirovanie, 2009, t.21, №5, s.3-9.
5. *А.А. Самарский, А.В. Колдоба, Ю.А. Повещенко, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. – Минск: ЗАО «Критерий», 1996;
A.A. Samarskii, A.V. Koldoba, YU.A. Poveshchenko, V.F. Tishkin, A.P. Favorskii. Raznostnye skhemy na nereguliarnykh setkakh. – Minsk: ЗАО «Kriterii», 1996.
6. *А.А. Самарский, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский, А.Ю. Шапков.* Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа // Дифференц. уравнения, 1982, т.18, №7, с.1251-1256;
A.A. Samarskii, V.F. Tishkin, A.P. Favorskii, A.YU. SHashkov. Ispolzovanie metoda opornykh operatorov dlia postroeniia raznostnykh analogov operatsii tenzornogo analiza // Differents. uravneniia, 1982, t.18, №7, s.1251-1256.

7. *А.В. Колдоба, Ю.А. Повещенко, И.В. Гасилова, Е.Ю. Дорофеева.* Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Математическое моделирование, 2012, т.24, №12, с.86-96;
A.V. Koldoba, Yu.A. Poveshchenko, I.V. Gasilova, E.Yu. Dorofeeva. Raznostnyye skhemy metoda opornykh operatorov dlia uravnenii teorii uprugosti // Matem. modelirovanie, 2012, t.24, №12, s.86-96.
8. *В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский, Ю.А. Повещенко, И.П. Цыгвинцев.* Однородные разностные схемы для решения сопряжённых задач гидродинамики и упругости. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018, препринт №13, 17 с.;
V.A. Gasilov, A.Yu. Krukovskii, Yu.A. Poveshchenko, I.P. Tsygvintsev. Odnorodnyye raznostnyye skhemy dlia resheniia sopriazhennykh zadach gidrodinamiki i uprugosti. – М.: IPM im. M.V. Keldysha, 2018, preprint №13, 17 s.
9. *L.D. Landau, E.M. Lifshitz.* Theory of Elasticity. Vol. 7 of Course of Theoretical Physics. – Oxford: Pergamon Press, 1970, 165 p.
10. *A.J. McConnell.* Applications of tensor analysis. – New York: Dover publ., 1957, 354 p.
11. *G. Korn, T. Korn.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New York: McGraw-Hill, 1961, 943 p.
12. *С.С. Соколов и др.* Методика ТИМ-2D для расчета задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках с произвольным количеством связей в узлах // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов, 2006, №4, с. 29-44;
S.S. Sokolov et al. Metodika TIM-2D dlia rascheta zadach mekhaniki sploshnoi sredy na nereguliarnykh mnogougolnykh setkakh s proizvolnym kolichestvom svyazei v uzlakh // Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Serii: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov, 2006, №4, s. 29-44.
13. *А.Б. Новиков, С.А. Глушак.* Сопротивление металлов пластической деформации при высокоскоростном сжатии // Хим. физика, 2000, т.19, с.65-69;
A.B. Novikov, S.A. Glushak. Soprotivlenie metallov plasticheskoi deformatsii pri vysokoskorostnom szhatii // KHim. Fizika, 2000, t.19, s.65-69.
14. *G.E. Mase.* Theory and Problems of Continuum Mechanics. – New York: McGraw-Hill, 1970, 230 p.

Поступила в редакцию 10.09.18

После доработки 04.10.18

Принята к публикации 19.11.18