

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА С АНАЛИЗАТОРОМ СИММЕТРИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

© 2019 г. *А.В. Колдоба¹, Г.В. Устюгова^{1,2}*

¹Московский физико-технический институт (ГУ)

²Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

koldoba@rambler.ru, ustyugg@rambler.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-02-00907.

DOI: 10.1134/S0234087919070037

Предлагается анализатор симметрии как элемент вычислительного алгоритма для численного интегрирования двумерных уравнений идеальной газовой динамики. Анализатор симметрии – алгоритм, позволяющий по сеточным данным отдать предпочтение тем или иным (в настоящей работе декартовым или полярным) компонентам векторного поля для его реконструкции на грани расчетной сетки и последующего расчета потоков консервативных переменных. Построен вычислительный алгоритм, использующий расчетную сетку полярного типа и включающий анализатор симметрии. Алгоритм легко переносится на трехмерные расчетные сетки цилиндрического типа.

Ключевые слова: разностная схема годуновского типа, анализатор симметрии.

DIFFERENCE SCHEME WITH A SYMMETRY ANALYZER FOR EQUATIONS OF GAS DYNAMICS

A.V. Koldoba¹, G.V. Ustyugova^{1,2}

¹Moscow Institute of Physics and Technology (SU)

²Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

The paper proposes a symmetry analyzer as an element of the computational algorithm for the numerical integration of two-dimensional equations of ideal gas dynamics. A symmetry analyzer is an algorithm that allows using grid data to give preference to one or another (in the present work, Cartesian or polar) components of a vector field for its reconstruction on the cell interfaces of a computational grid and subsequent calculation of fluxes of conservative variables. A computational algorithm was constructed using a polar-type computational grid and including a symmetry analyzer. The algorithm is easily transferred to the three-dimensional computational grids of cylindrical type.

Key words: Godunov type difference scheme, symmetry analyzer.

1. Введение

Постоянное усложнение задач вычислительной гидродинамики приводит к появлению новых и совершенствованию ранее предложенных вычислительных алгоритмов для численного интегрирования уравнений, в частности, идеальной газовой динамики [1]. Даже если ограничиться схемами конечно-объемного типа [2], то можно указать различные способы построения приближенных решений задачи Римана [3,4], использование адаптивных (статических и/или динамических) [5] и/или неструктурированных расчетных сеток [6], различные типы контроля схемной вязкости [7] и ограничителей антидиффузии [8]. Конечно, указанные подходы не ограничиваются только задачами газовой динамики, диапазон их применения гораздо шире. Каждый из них сам по себе не приводит к «идеальному» вычислительному алгоритму и в ряде случаев требует адаптации к специфике рассматриваемого класса задач.

В некоторых задачах гидродинамики основное течение, на которое накладываются дополнительные возмущения, обладает осевой симметрией (например, см. [9]). Часто для решения таких задач используются полярные (в двумерном случае) или цилиндрические (в трехмерном случае) координаты. При моделировании течений в полярных или цилиндрических координатах возникает ряд проблем, связанных с аппроксимацией уравнений гидродинамики в окрестности оси, которая порождает геометрическую особенность. Если течение обладает осевой симметрией, то использование полярных или цилиндрических координат является естественным (мы не касаемся вопроса понижения размерности задачи в этих случаях). Если же течение не обладает осевой симметрией, то использование таких координат может привести к значительным ошибкам. Кроме того, использование подробной сетки по азимутальному углу приводит к сильно вытянутым пространственным ячейкам сетки в окрестности оси и сильному ограничению временного шага интегрирования в случае использования явных разностных схем. В случае если течение обладает трансляционной симметрией в каком-либо направлении, то для аппроксимации уравнений газовой динамики естественно использовать декартовы координаты. Выбор расчетной сетки, на которой аппроксимируются дифференциальные уравнения (в данном случае газовой динамики), и выбор способа представления векторных величин (в данном случае скорости): декартовыми, полярными или другими компонентами, вообще говоря, не связаны между собой. Хотя во многих случаях выбор системы координат предопределяет как представление векторных величин, так и вид расчетной сетки. Конечно, и сами газодинамические пере-

менные, и их потоки могут быть пересчитаны из полярных (цилиндрических) координат в декартовы и обратно. Но для расчета потоков между расчетными ячейками в рамках годуновского подхода следует задать газодинамические величины с двух сторон грани, разделяющей эти ячейки. Перенос векторных величин из ячеек на грани можно выполнить различными способами и в зависимости от выбранного способа получить различные данные для решения задачи Римана или ее аппроксимаций [2-4].

В настоящей работе предлагается вычислительный алгоритм для численного интегрирования уравнений газовой динамики, содержащий анализатор симметрии течения. Вычислительный алгоритм основан на конечно-объемной схеме годуновского типа с приближенным решением задачи Римана [3,4], что, впрочем, не является принципиальным. Вместо уравнения баланса энергии используется уравнение баланса энтропии. Это обстоятельство также не является принципиальным для предлагаемого алгоритма, но ограничивает его применимость непрерывными решениями. В настоящей работе уравнения газовой динамики аппроксимируются на сетке полярного типа, а поле скорости представляется декартовыми компонентами. Расчетная сетка состоит из нескольких круговых блоков (концентрических колец) с различным разрешением по азимутальному углу. Во внутреннем блоке азимутальное направление разрешено шестью ячейками. В каждом следующем блоке число ячеек в азимутальном направлении удваивается. Во всех блоках сетка равномерна по азимутальному углу. С одной стороны, использование такой сетки позволяет избежать искусственных (связанных с геометрией) ограничений на шаг интегрирования по времени. С другой стороны, в окрестности оси сетки разрешение по азимутальному углу является грубым, в то время как различие между плоско- и осесимметричными векторными полями проявляется наиболее рельефно. На такой сетке применение анализатора симметрии дает наибольший положительный эффект. Если для аппроксимации уравнений использовать расчетную сетку с фиксированным (по всем блокам) азимутальным разрешением, то использование анализатора симметрии, по-видимому, не приведет к существенному улучшению качества численного решения. В этом случае вычислительные проблемы обусловлены другими факторами. В настоящей работе для аппроксимации уравнений импульса используется декартова система координат, т.е. плотность импульса и соответствующие потоки представляются декартовыми компонентами. Такой подход избавляет от необходимости аппроксимировать слагаемые, обусловленные кривизной системы координат. Предполагается, что течения либо преимущественно однородные (плоскосиммет-

ричные), либо преимущественно осесимметричные (относительно оси сетки). Для реконструкции векторных переменных используется анализатор симметрии, позволяющий локально отнести течение к одному из указанных типов. В зависимости от того, к какому типу будет отнесено векторное поле, для его реконструкции используются соответствующие компоненты векторов. Такой подход позволяет более аккуратно воспроизводить особенности течения на грубой сетке в окрестности оси.

2. Вычислительный алгоритм с анализатором симметрии

Опишем алгоритм с анализатором симметрии для численного интегрирования двумерных уравнений идеальной газовой динамики. На трехмерный случай алгоритм переносится без изменений. Как уже отмечалось, уравнения баланса импульса рассматриваются в декартовой системе координат, а вместо уравнения баланса энергии интегрируется уравнение баланса энтропии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x^2 + P)}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v_y}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_y v_x}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y^2 + p)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho S v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Расчетная сетка состоит из нескольких блоков (концентрических колец), в каждом из которых разрешение по азимутальному направлению различно: при переходе от предыдущего (внутреннего) блока к следующему (внешнему) подробность разрешения увеличивается вдвое. Использование таких сеток позволяет сделать расчетные ячейки примерно равносторонними и избежать дробления шага интегрирования по времени, обусловленного геометрией расчетной сетки в окрестности оси (рис. 1).

Для численного интегрирования системы уравнений (1) используется явная разностная схема годуновского типа «третьего порядка аппроксимации» по времени и пространству с приближенным HLLC-решением задачи Римана [10] и ограничителем антидиффузии [3,4]. Имеется в виду, что реконструкция переменных на грани расчетной сетки выполняется по алго-

ритму, который в одномерном случае и на достаточно гладких решениях обеспечивает третий порядок аппроксимации по пространственным переменным. Реконструкция выполняется для давления, удельной энтропии и выбранных анализатором симметрии компонент вектора скорости. Ограничитель диффузии имеет вид

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } xy < 0 \\ (2/\delta + 1)x/6 & \text{при } xy > 0, \quad |x| < \delta|y|, \\ x/6 + y/3 & \text{при } xy > 0, \quad \delta|y| < |x| < 4|y|, \\ y & \text{при } xy > 0, \quad |x| > 4|y|, \end{cases} \quad \delta = 0.5.$$

Применительно к реконструкции давления в радиальном направлении антидиффузионные поправки дают следующие величины на противоположных гранях ячейки (i, j) блока l : $d_1 = p_{i,j,l} - p_{i-1,j,l}$, $d_2 = p_{i+1,j,l} - p_{i,j,l}$ и $p_{i,j,l}^L = p_{i,j,l} - \alpha(d_2, d_1)$, $p_{i,j,l}^R = p_{i,j,l} + \alpha(d_1, d_2)$.

Непосредственно вычисляемыми величинами являются: плотность массы ρ , плотность энтропии ρS и декартовы компоненты вектора плотности потока импульса $\rho v_x, \rho v_y$, отнесенные к ячейкам расчетной сетки. Через эти величины рассчитываются другие переменные, необходимые для реконструкции функций и решения задачи Римана на гранях между ячейками сетки. Для решения задачи Римана на грань между ячейками подается два набора переменных, содержащих плотность, давление и полярные компоненты векторных полей скорости, имеющие смысл состояний по обе стороны грани. Использование полярных компонент при построении решения задачи Римана (на используемых в настоящей работе расчетных сетках) естественно, так как они являются нормальными и тангенциальными составляющими векторов относительно граней расчетной сетки. Алгоритм расчета этих величин будет представлен ниже. В результате приближенного решения задачи Римана через грань вычисляются потоки массы, энтропии и вектора импульса (заданного полярными компонентами). Векторы потока импульса на гранях пересчитываются в декартову систему координат для расчета изменения вектора импульса в ячейках, заданного декартовыми компонентами.

Для численного интегрирования уравнений по времени используется трехстадийный метод Рунге-Кутты, более конкретно – метод Хойна третьего порядка аппроксимации [11]. Время на промежуточных стадиях вычисляется по правилу Рунге.

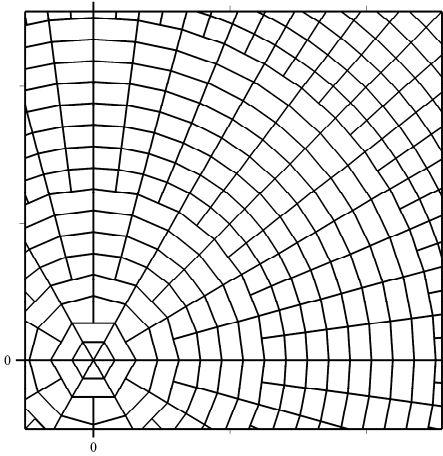


Рис.1. Фрагмент расчетной сетки.

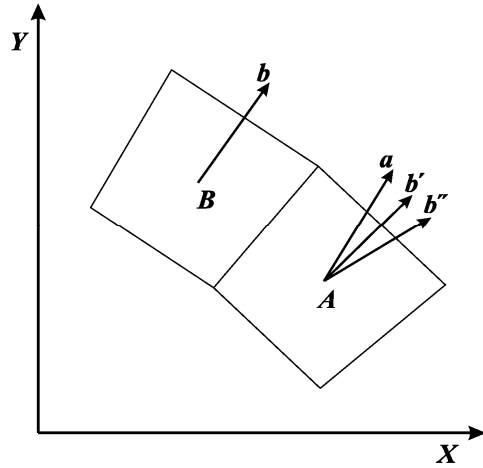


Рис.2. Перенос вектора b из точки B в точку A с сохранением декартовых компонент – b' и с сохранением полярных компонент – b'' .

Для расчета потоков консервативных переменных между расчетными ячейками (например, A и B , см.рис.2) в рамках годуновского подхода необходимо решить (точно или приближенно) задачу Римана о распаде разрыва между состояниями с двух сторон грани, разделяющей ячейки A и B . Газодинамические величины, описывающие эти состояния, получают, применяя ту или иную процедуру реконструкции функций (плотности, компонент вектора скорости и др.) по сеточным данным. Применительно к реконструкции векторных величин возникает вопрос: какие компоненты векторного (сеточного) поля предпочесть – декартовы или полярные (или какие-либо другие)? Для ответа на этот вопрос в настоящей работе используется анализатор симметрии – алгоритм, позволяющий по сеточным данным отдать предпочтение декартовым или полярным (другие варианты не рассматриваются) компонентам векторного поля для проведения его реконструкции на грани расчетной сетки. Анализ проводится для каждой грани отдельно, так что на части граней для реконструкции могут использоваться декартовы компоненты векторов, а на другой части – полярные.

Для анализа типа векторного поля был принят следующий алгоритм. Рассматривается два двумерных вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} в (x, y) -плоскости, заданных в двух точках A и B (например, векторы скорости в «центрах» двух соседних ячеек, помечаемых теми же буквами), отличающихся только азимутальной координатой. Цель анализа симметрии – классифицировать это векторное поле (состоящее из двух векторов) как плоскосимметричное или осе-

симметричное (азимутально-симметричное). Анализ симметрии устанавливает близость этих векторов при перенесении их в одну общую точку, например, в точку A (рис.2). Рассматривается два способа переноса вектора \mathbf{b} из точки B в точку A :

1) вектор \mathbf{b} переносится с сохранением своих декартовых компонент b_x, b_y ;

2) вектор \mathbf{b} переносится с сохранением своих полярных компонент b_r, b_ϕ .

В результате этих операций в точке A , помимо вектора \mathbf{a} , определены два вектора \mathbf{b}' и \mathbf{b}'' , полученные в результате применения двух указанных способов переноса вектора. В обоих случаях длины этих векторов равны длине вектора \mathbf{b} . Близость векторов \mathbf{a} и $\mathbf{b}', \mathbf{b}''$ оценивается по величине угла между ними. Так как при переносе длины векторов не менялись, сравниваются модули z -компонент векторных произведений $[\mathbf{a}, \mathbf{b}']_z$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}'']_z$. Если $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}']_z| \leq |[\mathbf{a}, \mathbf{b}'']_z|$, то принимается, что векторное поле, представленное векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} , приблизительно плоскосимметричное. В противном случае поле считается приблизительно осесимметричным. В соответствии с отнесением поля к одному из указанных классов выполняется интерполяция векторного поля на грани ячеек сетки. В первом случае для интерполяции используются декартовы компоненты векторов, во втором – полярные.

Как уже отмечалось, для численного интегрирования уравнений баланса импульса используются декартовы компоненты векторов. Если в точках A и B заданы только декартовы компоненты векторов, то:

1) вычисляются полярные компоненты векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$a_r = a_x \cos \phi_A + a_y \sin \phi_A, \quad a_\phi = -a_x \sin \phi_A + a_y \cos \phi_A,$$

$$b_r''(A) = b_r(B) = b_x \cos \phi_B + b_y \sin \phi_B, \quad b_\phi''(A) = b_\phi(B) = -b_x \sin \phi_B + b_y \cos \phi_B,$$

где ϕ_A и ϕ_B – азимутальные координаты точек A и B ;

2) вычисляются z -компоненты векторных произведений

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}']_z = a_x b_y - a_y b_x,$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}'']_z = a_r b_\phi'' - a_\phi b_r'' = (a_x b_x + a_y b_y) \sin \Delta\phi + (a_x b_y - a_y b_x) \cos \Delta\phi,$$

где $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B$ – азимутальный угол между направлениями на точки A и B (шаг сетки по азимуту в соответствующем блоке);

3) на основании сравнения величин $[\mathbf{a}, \mathbf{b}']_z$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}'']_z$ реконструкция поля скорости на соответствующую грань выполняется с использованием декартовых или полярных компонент поля скорости. Еще раз подчеркнем, что алгоритм анализа симметрии применяется локально, т.е. для одних пар ячеек заданные в них векторы классифицируются как относящиеся к плоско-симметричному типу, а для других – к осесимметричному типу.

После того как выполнена реконструкция переменных на грани расчетной сетки, для расчета потоков консервативных переменных через некоторую грань используется HLLC-алгоритм приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва между состояниями, реконструированными на сторонах этой грани. Принимается, что решение содержит три разрыва: распространяющиеся налево и направо «ударные волны» (быть может разрежения) и тангенциальный разрыв, разделяющие области постоянного течения. Скорости «ударных волн» принимались равными $D = 1.1c$, где c – скорость звука перед ударной волной. Скорость вещества между «ударными волнами» определяется из законов сохранения импульса с учетом того, что на тангенциальном разрыве нормальная к фронту скорость непрерывна, а тангенциальная компонента потока импульса равна нулю. Удельная энтропия переносится через «ударные волны» без изменений.

3. Перенос переменных между блоками

Перенос переменных между блоками выполняется для удобства расчета потоков консервативных переменных через грани между соседними ячейками, которые принадлежат разным блокам. Будем нумеровать блоки индексом l , самый внутренний блок $l = 0$. К каждому блоку присоединяются слои фиктивных ячеек, которые имеют радиальные индексы $i = 0, i = 1$ (для внутренних слоев) и $i = N_r(l) + 1, i = N_r(l) + 2$ (для двух внешних слоев), $N_r(l)$ – количество ячеек в радиальном направлении в блоке с номером l . В радиальном направлении фиктивные ячейки имеют такие же размеры, как расчетные ячейки соседнего блока, на который они налагаются. Например, фиктивные ячейки блока l с радиальным индексом $i = 0$ накладываются на расчетные ячейки блока $l - 1$ с радиальным индексом $i = N_r(l - 1)$, фиктивные ячейки блока l с радиальным индексом $i = N_r(l) + 1$ накладываются на расчетные ячейки блока $l + 1$ с радиальным индексом $i = 1$. Расчетной ячейке блока $l - 1$ с азимутальным индексом j соответствуют фиктивные ячейки блока l с азимутальными индексами $2j - 1$ и $2j$. Алгоритм переноса скалярных и векторных величин одинаков за исключением того, что при переносе векторных величин выполняется анализ симметрии.

Для расчета, например, давления в фиктивных ячейках $i = 0$ блока l рассчитывается азимутальная производная давления в блоке $i = N_r(l-1)$ слоя $l-1$. Для этого используются величины давления в расчетных ячейках $(N_r(l-1), j-1, k), (N_r(l-1), j, k), (N_r(l-1), j+1, k)$ блока $l-1$. Для подавления возможных осцилляций применяется анализатор гладкости

$$dp = \text{minmod}(p_{j+1,l-1} - p_{j,l-1}; p_{j,l-1} - p_{j+1,l-1}).$$

Здесь индексы $N_r(l-1), k$ опущены и учтено, что сетка в азимутальном направлении однородна в пределах каждого блока. Далее вычисляется давление в фиктивных ячейках:

$$p_{2j-1,l} = p_{j,l-1} - \frac{dp}{4}, \quad p_{2j,l} = p_{j,l-1} + \frac{dp}{4}.$$

Величины во внешних фиктивных ячейках блока l рассчитываются как средние арифметические величин в соответствующих расчетных ячейках блока $l+1$. Например,

$$p_{j,l} = \frac{1}{2}(p_{2j-1,l+1} + p_{2j,l+1}).$$

4. Тестирование алгоритма

Для оценки эффективности предложенного алгоритма были проведены тестовые расчёты. Во всех расчетах использовалась расчетная сетка, состоящая из пяти радиальных блоков. Количество радиальных слоев в блоках составляло: 4 (во внутреннем блоке), 4, 8, 16, 32 (во внешнем блоке), всего 64 слоя. Разрешение по азимутальному углу в блоках: 6 ячеек (во внутреннем блоке), 12, 24, 48, 96 (во внешнем блоке). Шаг интегрирования по времени выбирался автоматически из условия: число Куранта = 0.4.

Плоскопараллельное течение. Рассматривалось течение на фоне постоянного давления, в котором компоненты вектора скорости и плотность зависят от переменной $\xi = r \sin(\varphi - \alpha) - v_1 t$:

$$\rho = \rho_0 \exp(-2\xi^2), \quad p = p_0, \\ v_x = v_0 \cos \alpha \cos 2\xi - v_1 \sin \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha \cos 2\xi + v_1 \cos \alpha.$$

На рис.3а,б представлены результаты моделирования этого течения при следующих параметрах течения: $\alpha = 30^\circ$, $\rho_0 = 1$, $p_0 = 1$, $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ для двух вариантов реконструкции векторных переменных. На рис.3а – для реконструкции поля скорости используются ее полярные компоненты, на рис.3б – компоненты, выбранные анализатором симметрии в зависимости от вида

течения, которые в случае данного течения совпадают с выбором декартовых компонент для реконструкции поля скорости. Шаг сетки по радиусу, одинаковый во всех блоках, составлял $h = 0.015$.

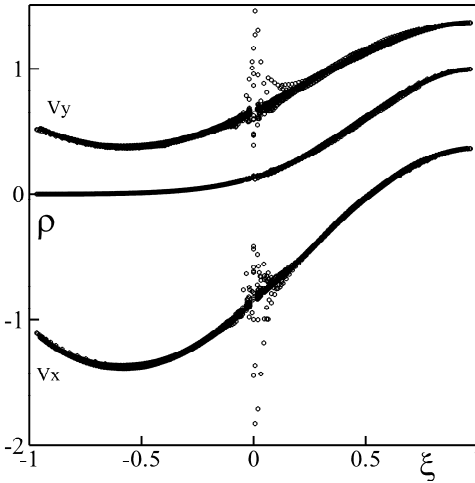


Рис.3а. Решение тестовой задачи о плоскопараллельном течении (показаны все точки расчетной сетки), полученное при реконструкции поля скорости по полярным компонентам. Показаны компоненты вектора скорости и плотность.

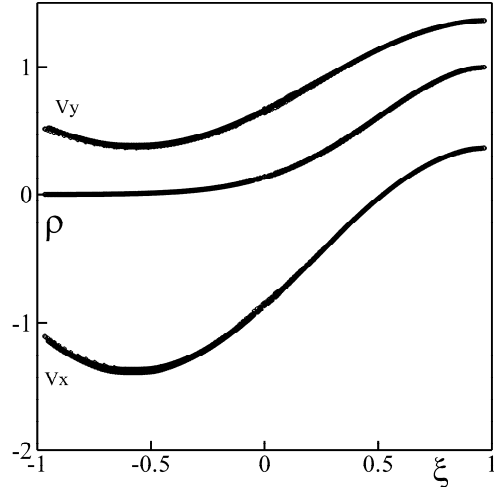


Рис.3б. Решение тестовой задачи о плоскопараллельном течении (показаны все точки расчетной сетки), полученное при реконструкции поля скорости анализатором симметрии. Показаны компоненты вектора скорости и плотность.

Осесимметричное течение. В качестве второго теста для предложенного алгоритма рассматривается цилиндрическое течение Бонди – аккреция на гравитирующий центр массы M . Это одномерное осесимметричное стационарное изоэнтропическое течение описывается системой уравнений

$$v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{M}{r^2} + \frac{l^2}{r^3}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dv_r}{dr} + v_r \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho v_r}{r} \quad (3)$$

с учетом сохранения энтропии $P / \rho^\gamma = \text{const}$ и удельного момента вращения $l = v_\phi r = \text{const}$. Комбинируя (2) и (3) с учётом $dp = c^2 d\rho$, где $c^2 = \gamma p / \rho$ – скорость звука, получаем

$$\frac{dv_r}{dr} = \frac{v_r}{r} \frac{c^2 - M/r + l^2/r^2}{v_r^2 - c^2}. \quad (4)$$

В звуковой точке $v_{r,*} = c_*$, $c_*^2 = M / r_* - l^2 / r_*^2$. Условия сохранения энтропии и потока массы приводят к соотношению $c^2 = c_*^2 (c_* r_* / v_r r)^{\gamma-1}$. Для построения решения, описывающего стационарную аккрецию на гравитирующий центр, задавались: масса гравитирующего центра $M = 1$, положение звуковой точки $r_* = 1$, удельный момент вращения $l = 0.25$, при этом скорость звука в звуковой точке составляла $c_* = 0.968$. Зависимость $v_r(r)$ получается интегрированием (5) от звуковой точки в обе стороны (до внутреннего радиуса $R_1 = 0.12$ и внешнего радиуса $R_2 = 3.32$ расчетной области) на достаточно подробной сетке.

На рис.4а,б представлены «точное», полученное интегрированием (4), и численные решения, полученные интегрированием системы (1) по схеме третьего порядка аппроксимации, в зависимости от радиуса. На рис.4а показаны азимутальная и радиальная компоненты вектора скорости и скорость звука, полученные с помощью реконструкции поля скорости по ее декартовым компонентам, на рис.4б – решение, полученное с использованием анализатора симметрии. Сплошной линией показано «точное» решение, точками – численные решения во всех ячейках двумерной расчетной сетки. Шаг сетки по радиусу, одинаковый во всех блоках, составлял $h = 0.05$.

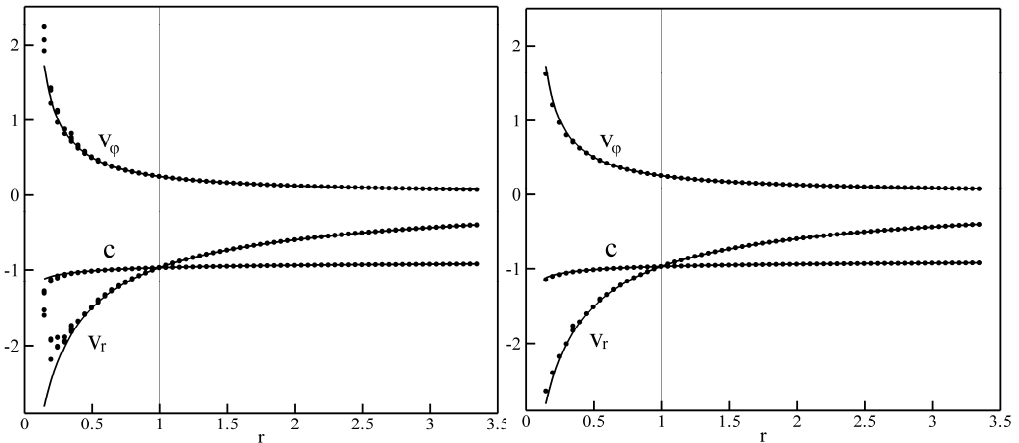


Рис.4а,б. Решение тестовой задачи об осесимметричной аккреции на гравитирующий центр (показаны все точки расчетной сетки),

Сравнение результатов тестовых расчетов показывает, что для разного типа течений анализатор симметрии выбирает наиболее подходящие компоненты скорости для ее реконструкции на границах расчетных ячеек. Численное решение, полученное для плоскопараллельного течения с помощью реконструкции полярных компонент скорости, имеет большую ошибку из-

за потери аппроксимации уравнений в окрестности оси расчетной сетки. Аналогично, большую ошибку имеет численное решение, полученное для осесимметричного течения с помощью реконструкции декартовых компонент скорости. В то же время анализатор симметрии во всех случаях выбирает подходящие компоненты для реконструкции поля скорости, что приводит к хорошему совпадению численного и точного решений.

Таким образом, можно сделать вывод, что использование анализатора симметрии позволяет улучшить качество численного решения задач, в которых преимущественная симметрия течения в окрестности оси расчетной сетки может менять тип в силу тех или иных причин.

5. Заключение

Предложен вычислительный алгоритм для численного интегрирования уравнений газовой динамики, содержащий анализатор симметрии течения. Вычислительный алгоритм основан на конечнообъемной схеме Годуновского типа с приближенным HLLC-решением задачи Римана. Выполненные тестовые расчеты продемонстрировали целесообразность предложенного подхода применительно к некоторым задачам газовой динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.М. Головизнин, Б.Н. Четверушкин.* Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // ЖВМ и МФ, 2018, т.58, №8, с.20-29;
V.M. Goloviznin, B.N. Chetverushkin. New generation algorithms for computational fluid dynamics // Comput. Math. Math. Phys., 2018, v.58, №8, p.1217-1225.
2. *С.К. Годунов и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976, 400 с.;
S.K. Godunov i dr. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki. – М.: Nauka, 1976, 400 s.
3. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, 608 с.;
A.G. Kulikovskii, N.V. Pogorelov, A.Yu. Semenov. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems, 2001, Boca Raton, Chapman & Hall.
4. *E.F. Toro.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction. – Springer, Berlin, 1997.
5. *П.В. Бреславский, В.И. Мажукин.* Моделирование взаимодействия ударных волн на динамически адаптирующихся сетках // Математическое моделирование, 2007, т.19, №11, с.83-95;
P.V. Breslavski, V.I. Mazhukin. Modelirovanie vzaimodeistviia udarnykh voln na dinamicheski adaptiruiushchikhsia setkakh // Matematicheskoe modelirovanie, 2007, t.19, №11, s.83-85.
6. *В.А. Гасилов, С.В. Дьяченко.* Квазимонотонная двумерная схема МГД для неструкту-

- рированных сеток // Математическое моделирование, 2005, т.17, №12, с.87-109;
V.A. Gasilov, S.V. Diachenko. Kvazimonotonnaia dvumernaia schema MGD dlia nestruk-turirovannykh setok // Matematicheskoe modelirovanie, 2005, t.17, №12, s.87-109.
7. *И.В. Попов, И.В. Фрязинов.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование, 2008, т.20, №8, с.48-57;
I.V. Popov, I.V. Fryazinov. Finite-difference method for computation of the gas dynamics equations with artificial viscosity // Math. Models Comput. Simul., 2009, v.1, №4, p.493-502.
8. *М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин.* Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения // Математическое моделирование, 2018, т.30, №5, с.99-116;
M.E. Ladonkina, O.A. Nekliudova, V.F. Tishkin. Postroenie limitera dlia razryvnogo metoda Galerkina na osnove usredneniia resheniia // Matematicheskoe modelirovanie, 2018, t.30, №5, s.99-116.
9. *О.Б. Бочарова, М.Г. Лебедев, И.В. Попов, В.В. Ситник, И.В. Фрязинов.* Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны // Математическое моделирование, 2013, т.25, №8, с.33-50;
O.B. Bocharova, M.G. Lebedev, I.V. Popov, V.V. Sitnik, I.V. Fryazinov. Shock wave reflection from the axis of symmetry in a nonuniform flow with the formation of a circulatory flow zone // Math. Models Comput. Simul., 2014, v.6, №2, p.142-154.
10. *A. Harten, P.D. Lax, B. van Leer.* Upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Review, 1983, v.25, p.35-61.
11. *И.Б. Петров, А.И. Лобанов.* Лекции по вычислительной математике. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий, 2006, 523 с.;
I.B. Petrov, A.I. Lobanov. Leksii po vychislitelnoi matematike. – М.: Internet-Universitet Infomatsionnykh Tekhnologii, 2006, 523 s.

Поступила в редакцию 12.11.18

После доработки 28.02.19

Принята к публикации 11.03.19