

МЕТОДЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ 3D PRINTER

© 2019 г. *Д.Ю. Дьянов, М.В. Медведкина, А.Н. Быков, В.В. Попов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.
DYDyanov@vniief.ru, MVMedvedkina@vniief.ru, ANBykov@vniief.ru,
VVPopov@vniief.ru

DOI: 10.1134/S0234087919070050

В рамках проекта «Разработка атласа типовых форм для топологической оптимизации конструкций, формируемых методом селективного лазерного плавления, и их производственная верификация» (договор с Министерством образования и науки, шифр 2016-14-579-0009-492), участниками которого являются НИТУ «МИСиС», АО «НПО «ЦНИИТМАШ», ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», Министерство образования и науки РФ, ОАО «Наука и инновации» (ГК «Росатом») ведется разработка программного обеспечения, позволяющего проводить топологическую оптимизацию деталей с различными ограничениями целевой функции, а также генерировать и использовать различные типы ячеистых структур для заполнения объема деталей. В статье приведено описание методов и алгоритмов топологической оптимизации конструкций с ограничениями целевой функции по смещению и напряжению, разработанных в интересах использования в базовой версии программного обеспечения.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, аддитивные технологии, генеративный дизайн.

TOPOLOGY OPTIMIZATION METHODS IN THE PROGRAM COMPLEX 3D PRINTER

D. Dyanov, M. Medvedkina, A. Bykov, V. Popov

RFNC – VNIIEF, Sarov, Nizhniy Novgorod Oblast

Within the scope of the project “Developing the atlas of typical forms of topological optimization of constructions with selected laser melting and its industrial verification” (contract with Ministry of Education and Science № 2016-14-579-0009-492) software, that allows topological optimization of parts with different limitations of objective function and generation and usage of different types of mesh structures to fill part’s volume, is made by participants NUST “MISIS”, NPO “TSNIITMASH”, RFNC “VNIIEF”, Russian Ministry of Education and Science, “Science and Innovation” JSC (SC Rosatom). The article contains description of methods and algorithms of topological optimization of

constructions with strain and stress limitations of objective function, that were developed for the benefit of using them in basic version of software.

Key words: topological optimization, additive technology, generative design.

Введение

В настоящее время передовые промышленные страны активно развивают и внедряют в производство аддитивные технологии изготовления различных деталей. Сутью аддитивных технологий является послойное создание деталей путем спекания металлических порошков или пластика. Развитие аддитивных технологий открыло перед инженерами возможность создания деталей сложных форм, не доступных при использовании классических технологий производств. Это дало новую волну интереса к созданию деталей сложных форм посредством генеративного дизайна с использованием топологической оптимизации и решётчатых структур, что позволяет более эффективно использовать материал и создавать облегченные конструкции.

Топологическая оптимизация является математическим подходом, решающим проблему оптимального распределения материала в ограниченном пространстве, с учетом действующих нагрузок и граничных условий. Данный вид оптимизации используется на стадии разработки первоначального вида конструкции. Полученное оптимальное решение затем модифицируется и «доводится» с учетом функциональных и технологических требований. Это позволяет сэкономить время на первоначальном этапе проектирования. Фактически топологическая оптимизация сводится к уменьшению веса конструкции путём удаления наименее вовлеченного в работу материала [1].

В ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» ведется разработка программного обеспечения 3D Printer, позволяющего проводить топологическую оптимизацию деталей с различными ограничениями целевой функции, а также генерировать и использовать различные типы ячеистых структур для заполнения объёма деталей. Внешний вид программы 3D Printer и некоторые построенные в ней детали показаны на рис. 1.

В статье приводятся методы и алгоритмы топологической оптимизации, разработанные в интересах использования в базовой версии программного обеспечения 3D Printer, планируемого к выходу в конце 2018 года. Для демонстрации работоспособности и эффективности реализованных функциональных возможностей по моделированию оптимальной топологии в статье представлены результаты численного расчета ряда задач. Проводится сравнительный анализ полученных результатов с эталонными решениями.

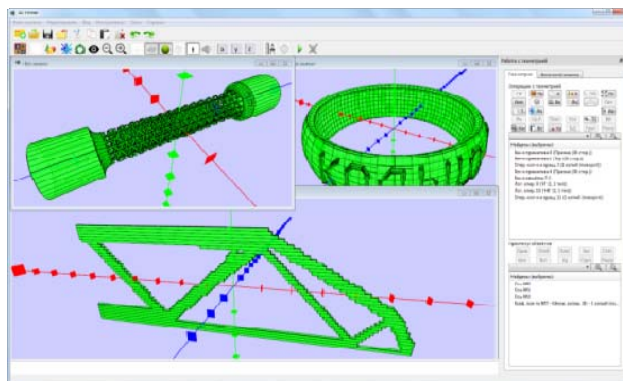


Рис.1.

Генеративный дизайн с использованием топологической оптимизации

Одним из преимуществ аддитивных технологий при проектировании деталей является свобода конструктора от технологических ограничений традиционных способов производства. В связи с этим огромный практический интерес в области аддитивных технологий представляет создание деталей сложных форм посредством генеративного дизайна с использованием топологической оптимизации и решётчатых структур, что позволяет более эффективно использовать материал и создавать облегченные конструкции. Для создания компьютерных моделей таких топологически оптимизированных деталей необходимо иметь программное обеспечение, включающее в себя модуль расчета топологической оптимизации деталей. Модуль топологической оптимизации (далее TopOpt) является одним из основных компонент программного обеспечения 3D Printer.

В модуле TopOpt в настоящее время реализован расчёт двумерных и трёхмерных задач топологической оптимизации методами ESO, BESO, PTO, SIMP [2-10] на основе решения линейных задач статической прочности с различными ограничениями целевой функции.

Метод ESO (Evolutionary Structural Optimization) [2,3] – один из наиболее простых методов, основанный на последовательном удалении наименее «нагруженного» материала. Оценка «нагруженности» той или иной точки конструкции может быть выполнена по деформациям, напряжению или податливости. Главным недостатком метода является то, что удалённый на ранних итерациях материал может быть полезен позднее, но метод ESO не позволяет его восстановить. Таким образом, данный метод часто приводит к неоптимальным решениям.

Метод BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) [4-7] построен на основе алгоритма эволюционной оптимизации конструкций. Родоначальниками метода BESO являются Yang и др. [4]. Принципиальное

отличие метода от ESO заключается в том, что материал может быть как удален, так и добавлен в конструкцию. Добавление и удаление материала выполняется с помощью анализа чисел чувствительности элементов. Элементы с минимальными значениями числа чувствительности удаляются из структуры, а пустые элементы с наибольшими значениями чувствительности заполняются материалом.

Методы SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [8, 9] и РТО (Proportional Topology Optimization) [10] реализованы на основе критерия оптимальности и являются наиболее фундаментальными по сравнению с предыдущими методами. В этих методах проектные переменные в элементах пропорциональны значению целевой функции. Элементы в конечно-элементной модели удаляются и добавляются в соответствии с критерием оптимальности. Подобный подход впервые был введен для решения задач структурной оптимизации Прагером [11].

По мнению авторов, наибольшее практическое значение и применимость при решении производственных задач имеют методы BESO и РТО с учетом различных ограничений на получаемое решение, поэтому подробно остановимся на данных методах.

Метод топологической оптимизации BESO с ограничениями целевой функции по смещению

В разделе изложен метод BESO [4-7] для решения задач топологической оптимизации с ограничениями целевой функции по смещению. В данном подходе целевой функцией является податливость системы, а условия по смещению и объему рассматриваются как ограничения целевой функции.

Постановку задачи топологической оптимизации для модифицированного метода BESO с дополнительным ограничением по смещению $u_j \leq u_j^*$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u}, \\ & \left\{ \begin{array}{l} V^* - \sum_{i=1}^N V_i x_i = 0, \\ u_j \leq u_j^*, \\ x_i = x_{\min} \text{ или } 1. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь N – общее количество конечных элементов в задаче, C – средняя податливость системы, \mathbf{f} – вектор сил, \mathbf{u} – вектор смещения, u_j и u_j^* определя-

ют амплитуду смещения j -го узла. V_i – объем элемента, а V^* – конечный объем, которого мы хотим достигнуть в процессе оптимизации. Переменная фиктивной плотности (проектная переменная) x_i принимает значения от минимального ($x_{min} = 0.001$) до единицы.

Число чувствительности

Принимая во внимание, что фиктивная плотность в нашем подходе находится в диапазоне от минимального числа до единицы, запишем модуль упругости Юнга согласно SIMP методу:

$$E(x_i) = E_1 x_i^p, \quad (2)$$

где E_1 – обозначает модуль Юнга материала, а p – показатель степени отбраковки. В предположении, что коэффициент Пуассона не зависит от фиктивной плотности, глобальная матрица жесткости \mathbf{K} может быть представлена в виде

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N x_i^p \mathbf{K}_i^0, \quad (3)$$

где \mathbf{K}_i^0 обозначает матрицу жесткости одного элемента.

Для удовлетворения условию ограничения по смещениям необходимо модифицировать функцию Лагранжа, введя соответствующие множители Лагранжа. Функция Лагранжа для ограничения по смещению может быть записана в виде

$$f_L(x) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \lambda (u_j - u_j^*) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \lambda (u_j - u_j^*). \quad (4)$$

Функция Лагранжа эквивалентна начальной (в классическом BESO методе без ограничений), если смещение равно величине его ограничения. Множитель Лагранжа $\lambda = 0$, если $u_j \leq u_j^*$, что означает удовлетворение ограничениям по смещению. Множитель Лагранжа λ стремится к бесконечности, если $u_j > u_j^*$, т.е. мы пытаемся минимизировать смещение u_j , чтобы выполнить ограничение по смещению.

Чувствительность измененной функции Лагранжа может быть найдена как

$$\frac{df_L(x)}{dx_i} = p x_i^{p-1} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i - \lambda \mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i \right). \quad (5)$$

Здесь, u_{ij} – вектор виртуальных перемещений, полученный в результате

приложения фиктивной единичной нагрузки к контролируемому по смещению узлу при отсутствии всех других нагрузок.

Число чувствительности для элемента может быть определено следующим образом:

$$\alpha_i = -\frac{1}{p} \frac{df_L(x)}{dx_i} = x_i^{p-1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i + \lambda \mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i \right). \quad (6)$$

Учитывая, что проектная переменная может принимать только два значения x_{\min} или 1, числа чувствительности для элементов могут быть явно выражены соотношением

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i + \lambda \mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i, & x_i = 1, \\ x_{\min}^{p-1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i + \lambda \mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i \right), & x_i = x_{\min}. \end{cases} \quad (7)$$

Определение множителя Лагранжа

Для нахождения числа чувствительности необходимо знать множитель Лагранжа λ . Соответствующее значение множителя Лагранжа может быть определено через удовлетворение условий по объему и смещению с использованием метода дихотомии.

Для простоты вычисления определим λ следующим образом:

$$\lambda = \frac{1 - \omega}{\omega}, \quad (8)$$

где ω – константа в пределах от $\omega_{\min} = 10^{-10}$ до 1.

Для нахождения соответствующего значения ω применяется метод дихотомии с оценкой смещения u_j^{k+1} на итерации, определяемого из следующего приближения:

$$u_j^{k+1} \approx u_j^k + \sum_i \frac{du_j^k}{dx_i} \Delta x_i.$$

Схема фильтрации в методе BESO

При дискретизации непрерывной структуры на конечные элементы низкого порядка индекс чувствительности может иметь разрыв на границах элементов, что ведет к образованию топологии в виде «шахматного поля» [12], как это показано на рис.2.

Такая топология вызывает у инженеров трудности в интерпретации оптимальной структуры и часто нерешаемые проблемы в изготовлении дета-

ли. Чтобы избежать формирования образцов вида «шахматное поле», изначально в работах по методу ESO была представлена простая схема сглаживания путем усреднения чисел чувствительности соседних элементов. Однако этот алгоритм сглаживания не может решить проблему зависимости топологии от размера конечно-элементной сетки. Более подробная сетка будет давать более детальную топологию. С точки зрения инженера, сгущение сетки должно приводить к лучшему моделированию конечно-элементной модели той же самой оптимальной структуры, и лучшему описанию границ, а не к новой топологии детали, которую невозможно изготовить [13].

Существуют различные методы, решающие задачу о зависимости получаемого решения от подробности сетки, например: метод ограничения периметра [14,15], использование схем с фильтром чувствительности [16,17]. BESO метод с контролем периметра продемонстрирован в [18]. В данной работе вводится специальный параметр – величина периметра. Однако подбор соответствующего значения длины периметра для каждой новой задачи проектирования может быть очень трудоемким. По данной причине в нашей реализации за основу принят метод, основанный на фильтрации числа чувствительности по расстоянию. Стоит отметить, что в программе TopOpt реализовано несколько методов фильтрации. Остановимся на одном из алгоритмов, применяемых в TopOpt, основанном на весовой функции, пропорциональной расстоянию между центрами элементов, как показано на рис.3,

$$\alpha_i = \frac{\sum w_{ij} \alpha_j}{\sum w_{ij}}, \quad \text{где} \quad w_{ij} = \begin{cases} \frac{r_{\min} - r_{ij}}{r_{\min}} & \text{для } r_{ij} < r_{\min}, \\ 0 & \text{для } r_{ij} \geq r_{\min}. \end{cases}, \quad (9)$$

α_i – отфильтрованное число чувствительности элемента i , w_{ij} – вес элемента j относительно i , α_j – нефильТРованная плотность элемента j , r_{ij} – расстояние между центрами элементов элементами i и j , и r_{\min} – область фильтрации.

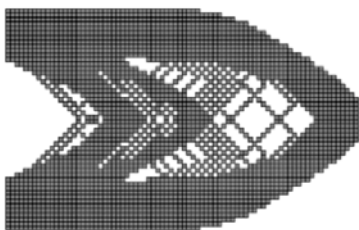


Рис.2.

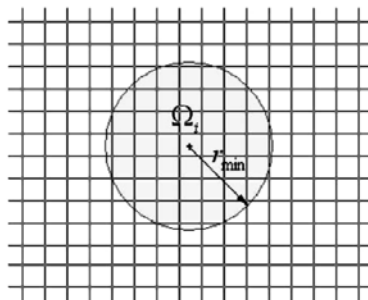


Рис.3.

Стабилизация эволюционного процесса

Использование описанной ранее схемы фильтрации может эффективно решить проблему зависимости от характерного размера элемента сетки. Однако процесс топологической оптимизации может не сойтись, так как в методах BESO часто наблюдаются большие колебания в процессе изменения целевой функции.

Причина такого хаотического поведения состоит в том, что числа чувствительности активных и неактивных элементов основаны на дискретном состоянии элемента. Это делает целевую функцию и топологию трудно сходящимися. Согласно [19], усреднение числа чувствительности во время всего процесса является эффективным способом решения этой проблемы. Простая схема усреднения записывается как

$$\alpha_i^{k+1} = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k-1}}{2}, \quad (10)$$

где k – номер итерации.

Общий алгоритм решения задачи оптимизации BESO методом с ограничением по перемещению

Блок-схема алгоритма решения задачи оптимизации BESO методом с ограничением по перемещению представлена на рис.4.

Метод топологической оптимизации РТО с ограничениями целевой функции по напряжению

Метод РТО [10] основан на критерии оптимальности. Основная идея метода заключается в использовании в качестве проектного параметра величины, пропорциональной напряжению или податливости.

Задача с ограничением по напряжению

Задача топологической оптимизации с ограничением по напряжению – это задача минимизации объема, удовлетворяющая ограничению по напряжениям, и может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } \sum_{i=1}^N \rho_i V_i, \\ & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Ku} = \mathbf{f}, \\ \sigma_i \leq \sigma_{\max}, \text{ если } \rho > 0, \\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \end{array} \right. \quad (11) \end{aligned}$$

где N – общее количество конечных элементов в задаче, ρ_i – фиктивная

плотность (проектная переменная), V_i – объем элемента, \mathbf{K} – глобальная матрица жесткости, \mathbf{u} – вектор смещения, \mathbf{f} – вектор внешней силы, σ_i – напряжение в элементе, σ_{\max} – предельное значение по напряжению, ρ_{\min} – нижняя граница плотности в элементе. Ограничения для фиктивной плотности $[\rho_{\min}, 1]$, где $\rho_{\min} = 0.001$, введено для устранения вырожденности матрицы жесткости. Нулевой объем говорит об отсутствии материала, в то время как равный единице говорит о принадлежности элемента к области. Задача топологической оптимизации с ограничением по напряжению с точки зрения теории линейного программирования является невыпуклой и существенно нелинейной.

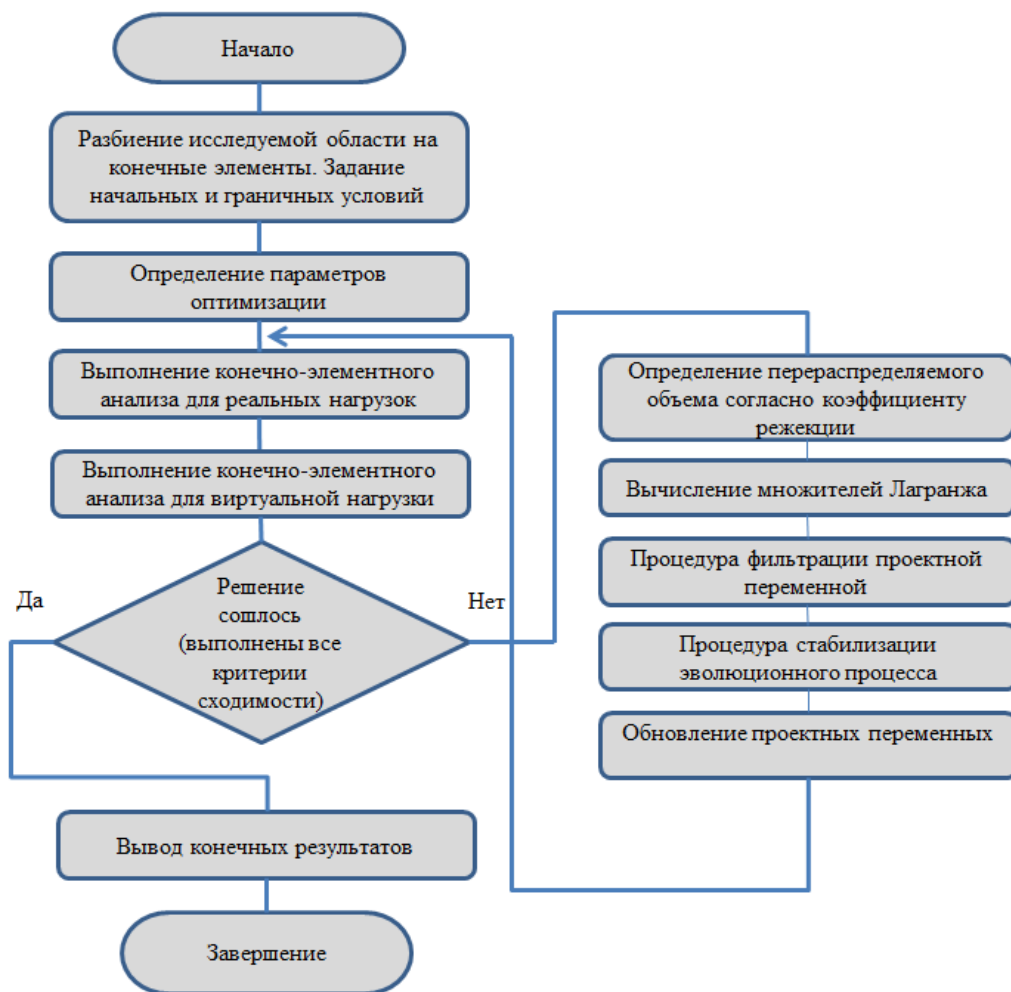


Рис.4.

Алгоритм метода РТО с ограничением по напряжению

Алгоритм метода РТО для задачи с ограничением по напряжению начинается с вычисления векторов и матриц для конечно-элементного анализа и проведения расчета задачи линейной статической прочности.

Далее выполняется главный цикл оптимизации. Каждая итерация главного цикла начинается с вычисления максимального напряжения и проверки условия сходимости. Если критерий сходимости выполнен, моделирование заканчивается, иначе – алгоритм продолжает оптимизировать топологию. Первый шаг оптимизации должен найти количество перераспределяемого материала ($M_{рас.}$), который определяется параметром режекции. Далее анализируется максимум напряжения в элементах системы и определяется целевое количество материала ($M_{цел.}$) для распределения:

$$M_{цел.} = \begin{cases} M_{тек.} + M_{рас.}, & \text{если } \max\{\sigma_e\} > \sigma_{\max}, \\ M_{тек.} - M_{рас.}, & \text{если } \max\{\sigma_e\} \leq \sigma_{\max}. \end{cases}$$

Для распределения целевого количества материала по элементам применяется внутренний цикл оптимизации. Распределение оставшегося материала проводится ($M_{ост.} = M_{цел.}$ в начале внутреннего цикла) пропорционально значению элементного напряжения согласно выражению

$$\rho_i^{opt} = \frac{M_{ост.}}{\sum_{j=1}^N \sigma_j^q V_j} \sigma_i^q, \quad (12)$$

где $M_{ост.}$ – оставшееся количество материала для распределения, N – количество элементов, ρ_i^{opt} – элементная плотность, σ_i – мера напряжения в элементе, V_i – элементный объем, q – степень пропорциональности.

В методе РТО для борьбы с эффектом «шахматного поля» используются те же алгоритмы фильтрации, что и в BESO методах. Стоит отметить, что в РТО методе фильтрация применяется к вычисленной элементной плотности.

Очевидно, вышеупомянутое отношение распределяет оставшееся количество материала независимо от значений плотности. Предельные значения плотности в элементах ограничивают распределенное количество материала нижней и верхней границами, если значения превышены. В результате фактическое количество материала ($M_{факт.}$) отличается от целевого значения. Это различие является причиной многократного перераспределения остающегося количества материала во внутреннем цикле до тех пор, пока не будет достигнуто целевое значение. Каждая итерация во внутреннем цикле начинается с распределения оставшегося количества материала. Это сопрово-

ждается применением фильтров и обрезанием значений плотности по допустимым пределам. В конце внутреннего цикла вычисляется фактическое количество материала, которое будет оставлено после выполнения ограничения по предельным значениям плотности и фильтрации. Фактическое количество материала тогда вычитается из целевого количества материала и получается оставшееся к распределению количество материала:

$$M_{ост.} = M_{цел.} - M_{факт.}$$

На следующей итерации внутреннего цикла оставшееся количество материала будет перераспределено. Количество внутренних подшагов цикла до достижения необходимого объема материала является, как правило, небольшим.

Заключительным шагом главного цикла оптимизации является процедура усреднения проектной переменной (фиктивной плотности) для стабилизации решения, как и в методе BESO. Весь алгоритм подробно представлен на блок-схеме, показанной на рис.5.

Определение модуля упругости

Для выбора модуля упругости за основу берется модифицированный метод SIMP [23]:

$$E(\rho) = E_{\min} + \rho^p E_0, \quad (13)$$

где E – модуль Юнга, E_{\min} – минимальное значение для модуля Юнга (обычно 10^{-9}), принимаемое недействительными элементами, чтобы избежать вырожденной матрицы жесткости, E_0 – начальный модуль Юнга, и p – коэффициент отбраковки (обычно принимается равным 3).

Ограничение по напряжению

Метод РТО ограничивает максимальное значение функции напряжения следующим образом:

$$\max \{ \sigma_i \} \leq \sigma_{\max}, \quad (14)$$

где σ_i – напряжение по Мизесу (вычисляется в геометрическом центре элемента). Ограничение по напряжению влечет за собой тот факт, что напряжение не превышает предельного значения в любом элементе системы.

Таким образом, ограничение обеспечивает жесткий контроль максимума функции напряжения.

Результаты некоторых демонстрационных расчётов

В данном разделе приведены результаты некоторых демонстрацион-

ных задач, которые показывают работоспособность описанных выше методов топологической оптимизации в программном модуле TopOpt.

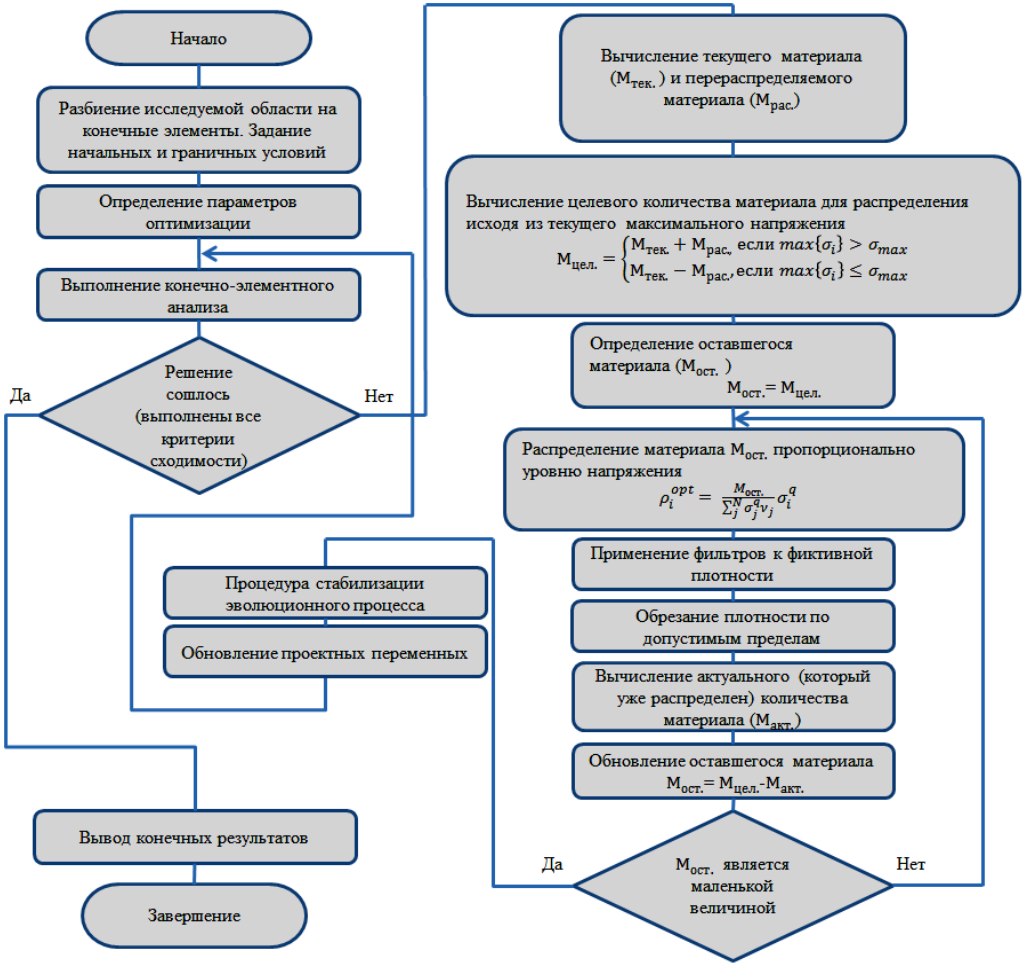


Рис.5.

Численное моделирование плоской задачи оптимизации методом BESO с учетом ограничения по перемещению

Необходимо определить оптимальную топологию задачи, геометрия которой дана на рис.6, с учетом ограничения по перемещению в узле А. Снизу деталь шарнирно оперта, сила P приложена к центральному элементу верхнего торца.

Параметры нагружения: $P=1000 H$ – нагрузка, приложенная к центральному элементу верхнего торца.

В расчете используется модель упругого материала. В табл.1 даны его физико-механические характеристики.

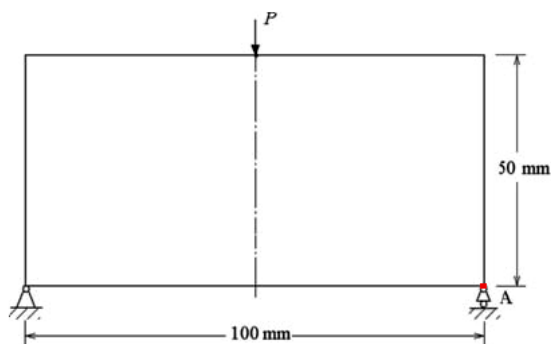


Рис.6.

Таблица 1.

Параметр	Описание	Значение
ρ , кг/мм ³	Начальная плотность	$2.7 \cdot 10^{-6}$
E , ГПа	Модуль Юнга	1
ν	Коэффициент Пуассона	0.3

В табл.2 приведены параметры топологической оптимизации для метода BESO с ограничением по смещению, используемые в расчете.

Таблица 2.

Параметр	Описание	Значение
ER , %	Коэффициент режекции	2
r_{min} , мм	Радиус чувствительности	1.5
p	Параметр отбраковки	3
V/V_0 , %	Отношение конечного объема к начальному	30
u , мм	Ограничение на перемещение в узле А	1.4, 1.2, 1

На рис.7 приведены результаты расчета задачи, полученные методом топологической оптимизации BESO с учетом ограничения по перемещению в программном комплексе 3D PRINTER – слева, в сравнении с результатами, представленными в [7] – справа, с ограничениями по перемещению: (a) – 1.4 мм; (b) – 1.2 мм; (c) – 1 мм.

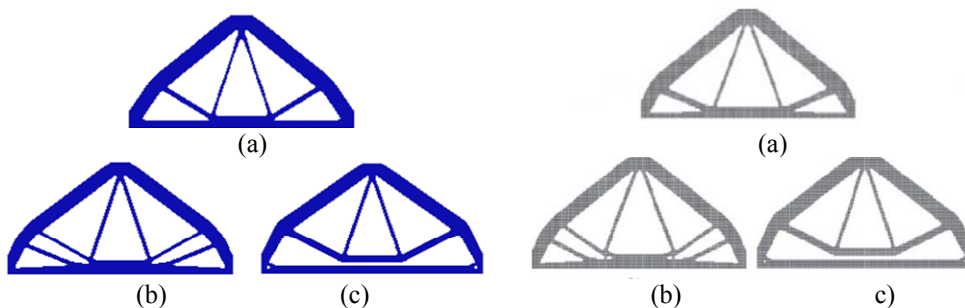


Рис.7.

Численное моделирование плоской задачи оптимизации консольной балки методом РТО с учетом ограничения по напряжению

Необходимо определить оптимальную топологию задачи, геометрия которой дана на рис.8, с учетом ограничения по напряжению. Скобка жестко заделана по верхнему торцу, сила, направленная по нормали, приложена к вершине правого края.

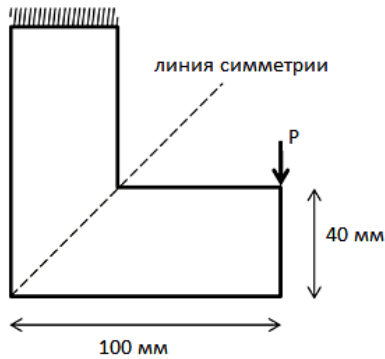


Рис.8.

Параметры нагружения: $P=1\text{ Н}$ – нагрузка, приложенная к центральному элементу верхнего торца. Стоит отметить, что нагрузка прикладывается сразу к трем узлам.

В расчете используется модель упругого материала. В табл.3 даны его физико-механические характеристики.

Таблица 3.

Параметр	Описание	Значение
ρ , кг/мм ³	Начальная плотность	$2.7 \cdot 10^{-6}$
E , ГПа	Модуль Юнга	1
N	Коэффициент Пуассона	0.3

В табл.4 приведены параметры топологической оптимизации для метода РТО с ограничением по напряжению, используемые в расчете.

Таблица 4.

Параметр	Описание	Значение
E_{\min} , Па	Минимальный модуль Юнга	$1 \cdot 10^{-9}$
P	Параметр отбраковки	3
r_{\min} , мм	радиус чувствительности	1.5
V/V_0 , %	Отношение конечного объема к начальному	35
σ_{\lim} , МПа	Значение ограничения напряжения по Мизесу	1.08

На рис.9 приведены результаты расчета задачи консольной балки, полученные методом топологической оптимизации РТО с учетом ограничения

по напряжению в программном комплексе 3D PRINTER – слева, в сравнении с [10] – справа, с учетом ограничения по напряжению.

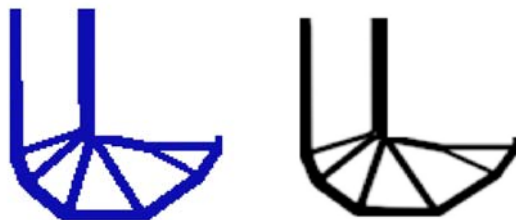


Рис.9.

Заключение

В работе представлены подходы и алгоритмы, используемые в базовой версии программного обеспечения 3D Printer для нахождения новых топологий конструкций. В модуле топологической оптимизации в настоящее время реализован расчёт двумерных и трёхмерных задач топологической оптимизации методами ESO, BESO, PTO, SIMP на основе решения линейных задач статической прочности с различными ограничениями целевой функции. Все перечисленные методы прошли верификацию на серии тестовых и производственных задач. По мнению авторов, наибольшее практическое значение и применимость при решении производственных задач имеют методы BESO, PTO с учетом различных ограничений на получаемое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A.V. Boldyrev, M.V. Pavelchuk.* Методика обучения топологическому проектированию конструкций на основе модели тела переменной плотности // *Онтология проектирования*, 2016, т.6, №4(22), с.501-513;
A.V. Boldyrev, M.V. Pavelchuk. Metodika obucheniia topologicheskomu proektirovaniu konstruktсии na osnove modeli tela peremennoi plotnosti // *Ontologiia proektirovaniia*, 2016, t.6, №4(22), s.501-513;
2. *X. Huang, Y.M. Xie.* Evolutionary topology optimization of continuum structures // UK. John Wiley & Sons, 2010, 223 p.
3. *D.N. Chu, Y.M. Xie, A. Hira and G.P. Steven.* Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints // *Finite Elements in Analysis & Design*, 1996, v.21, №4, p.239-251.
4. *X.Y. Yang, Y.M. Xie, G.P. Steven and O.M. Querin.* Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization // *AIAA Journal*, 1999, v.37, №11, p.1482-1488.
5. *X. Huang and Y.M. Xie.* Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials // *Comput. Mech.*, 2009, v.43, №3, p.393-401.
6. *J.H. Zhu, W.H. Zhang and K.P. Qiu.* Bi-directional evolutionary topology optimization using element replaceable method // *Comput. Mech.*, 2007.

7. X. Huang and Y.M. Xie. Evolutionary topology optimization of continuum structures with an additional displacement constraint // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2010, v.40, №1, p.409-416.
8. M.P. Bendsoe and O. Sigmund. Topology Optimization: Theory, Method and Application. – Berlin: Springer, 2003, 370 p.
9. M.P. Bendsoe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization // Archive Appl. Mech., 1999, v.69, №9, p.635-654.
10. E. Biykli and A.C. To. Proportional Topology Optimization: A new non-sensitivity method for solving stress constrained and minimum compliance problems and its implementation in MATLAB // Plos ONE, 2015.
11. W. Prager. Optimality criteria in structural design // Proceeding of the National Academy of Sciences of the United State of America, 1968, v.61, №3, p.794-796.
12. T.E. Bruns, D.A. Tortorelli. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms // Comp. Methods in Appl. Mech. Eng., 2001, v.190, №26, p.3443-3459.
13. J.H. Zhu, W.H. Zhang and K.P. Qiu. Bi-directional evolutionary topology optimization using element replaceable method // Comput. Mech., 2007, v.40, №1, p.97-109.
14. C.S. Jog. Topology design of structures using a dual algorithm and a constraint on the perimeter // Inter. J. Num. Meth. Engng., 2002, v.54, №7, p.1007-1019.
15. C.S. Jog and R.B. Harber. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1996, v.130, №3, p.203-226.
16. P. Tanskanen. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 2002, v.191, №47, p.5485-5498.
17. O. Sigmund. On the design of compliant mechanisms using topology optimization // Mech. Struct. Mach., 1997, v.25, №4, p.493-524.
18. X.Y. Yang, Y.M. Xie, G.T. Liu and P.J. Clarkson. Perimeter control of the bidirectional evolutionary optimization method // Struct. Multidisc. Optim., 2002, v.24, №6, p.430-440.
19. E. Hinton and H. Sien. Fully Stressed Topological Design of Structures using an Evolutionary Procedure // Engineering Computations, 1995, v.12, №3, p.229-244.

Поступила в редакцию 26.11.18

После доработки 26.11.18

Принята к публикации 11.02.19