

## ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2019 г. *С.В. Борзунов<sup>1</sup>, М.Е. Семенов<sup>1,2,3</sup>, Н.И. Сельвесюк<sup>4</sup>,  
П.А. Мелешенко<sup>1,5</sup>*

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет [sborzunov@gmail.com](mailto:sborzunov@gmail.com)

<sup>2</sup> Воронежский государственный технический университет

<sup>3</sup> ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Единая геофизическая служба Российской академии наук»

<sup>4</sup> ФГУП «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем»

<sup>5</sup> ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»

DOI: 10.1134/S0234087919070074

Предложен новый класс моделей гистерезисных преобразователей, обобщающий классическое определение люфта на случай, когда геометрическое расположение определяющих его кривых зависит от случайного параметра. Выход стохастического преобразователя в этой ситуации трактуется как случайный процесс. Доказана корректность определения соответствующего преобразователя в терминах специальной предельной конструкции, позволяющей определить выход на произвольном непрерывном входе. Исследованы свойства введенного преобразователя, получены аналитические соотношения, определяющие первую и вторую моментные функции выхода, приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: гистерезис, люфт, гистерезисные свойства.

### HYSTERETIC CONVERTERS WITH STOCHASTIC PARAMETERS

*S.V. Borzunov<sup>1</sup>, M.E. Semenov<sup>1,2,3</sup>, N.I. Sel'vesyuk<sup>4</sup>, P.A. Meleshenko<sup>1,5</sup>*

<sup>1</sup> Voronezh State University

[sborzunov@gmail.com](mailto:sborzunov@gmail.com)

<sup>2</sup> Voronezh State Technical University

<sup>3</sup> Geophysical Survey of Russia Academy of Sciences

<sup>4</sup> State Research Institute of Aviation Systems

<sup>5</sup> Zhukovsky–Gagarin Air Force Academy

A new class of models of hysteretic converters which generalizes the classical definition of backlash to the case when the curves defining it are non-deterministic and have a random distribution is proposed. In this case an output of stochastic converter is defined as a random process. The correctness of the definition of the corresponding converter in

terms of a special limit construction is proved. Using such a definition it is possible to determine the output at an arbitrary continuous input. The properties of introduced converters are investigated and explicit analytic relations determining the first and second moment (as functions of the corresponding parameters) are presented together with illustrative examples.

Keywords: hysteresis, backlash, hysteresis properties.

## **1. Введение**

Изучение и моделирование сложных технических систем приводит к необходимости представлять в формальном виде нетипичные нелинейности, в том числе и гистерезисной природы. Известно, что многие физические, физико-химические, биологические и экономические системы демонстрируют гистерезисное поведение, что обуславливается либо их внутренней структурой, либо динамическими особенностями протекающих в таких системах процессов [1-6].

В настоящее время существуют два основных подхода к описанию гистерезисных явлений: конструктивные модели, например, люфт, неидеальное реле, преобразователь Прейзаха, модель Ишлинского [1, 7-11], и феноменологические модели, такие как модели Боука–Вена [12], Дьюема, Айвана и другие [13-15].

В работах М.А. Красносельского [1, 16] для анализа систем с гистерезисом был развит математический аппарат, основанный на идентификации элементарных носителей гистерезиса (гистеронов). Гистероны – это преобразователи с пространствами состояний, определенные посредством соответствий вход-выход и вход-состояние. Корректное определение гистерона основано на реализации классической трехэтапной конструкции. На первом шаге гистерон определяется на монотонных входах, на втором – с помощью полугруппового тождества на кусочно-монотонных входах. На третьем этапе осуществляется переход к произвольным непрерывным входам. Именно эта конструкция была использована для определения люфтов и упоров в [1].

Конструктивные модели гистерезисных преобразователей вполне успешно применялись для анализа физических систем различной природы [17-20]. В частности, в [17] рассмотрена задача стабилизации перевернутого маятника с вертикально осциллирующей точкой подвеса, находящегося под воздействием гистерезисного управления, и найдены критерии устойчивости для линеаризованного уравнения движения. В [19] исследовано влияние электромагнитных актюаторов на частотную характеристику консольных балок. Результаты численного моделирования демонстрируют возможность наблюдения гистерезисных явлений и сдвига частоты вынужденных коле-

баний под действием сил электромагнитной природы. Отметим, кроме того, ряд работ, посвященных моделированию различных физических систем с гистерезисной нелинейностью, формализуемой посредством преобразователя Прейзаха [21-23], а также большое количество публикаций, в которых гистерезисные свойства моделировались посредством феноменологических соотношений, отвечающих широко известной модели Боука-Вена [12,13,24-28].

В указанных выше моделях гистерезисных преобразователей все определяющие их параметры, а также входы и отвечающие им выходы предполагались детерминированными. В этой связи отметим ряд работ, посвященных изучению отклика системы с гистерезисным звеном на случайный или зашумленный сигнал [5, 23, 29, 30].

Однако характеристики, в том числе и гистерезисных блоков могут быть известны лишь с некоторой точностью и не допускают возможности идентификации в условиях неразрушающего контроля. Именно такая ситуация имеет место, когда люфты возникают в механических составляющих в процессе длительного функционирования. Более того, параметры носителей гистерезисных свойств могут испытывать регулярные или нерегулярные изменения, связанные со старением материалов или варьироваться за счет воздействия иных неконтролируемых факторов. В связи с этим возникает необходимость обобщения конструктивных моделей гистерезисных преобразователей, учитывающих вероятностный характер определяющих их параметров.

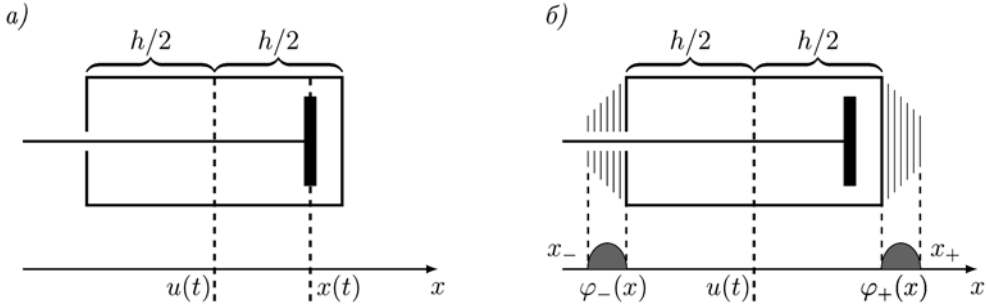
Настоящая статья посвящена обобщению одной из основных моделей гистерезиса – люфта на класс преобразователей, характеристики которых определяются случайными параметрами.

## 2. Постановка задачи. Люфт со случайными параметрами

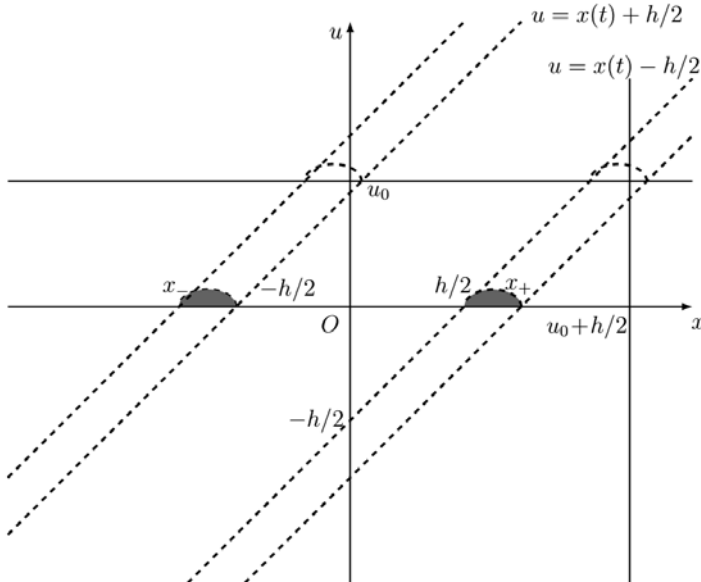
Физическая модель люфта представляет собой систему, состоящую из цилиндра длины  $h$  и поршня, которые могут перемещаться в горизонтальном направлении (рис. 1а). Положение поршня будем считать входной координатой, а положение цилиндра – выходной. Вход системы в зависимости от времени на конечном интервале  $t \in [t_0, T]$  обозначим через  $x(t)$ , выход – через  $u(t)$ .

Если считать положения левой и правой стенок цилиндра распределенными по случайному закону, то соответствующий преобразователь естественно назвать люфтом со случайными параметрами. Ниже предполагаются заданными функции  $\varphi_-(x)$  и  $\varphi_+(x)$ , трактуемые как плотности вероятности, соответствующие положениям левой и правой границ цилиндра соответ-

ственно. Будем считать, что носители функций  $\varphi_+(x)$  и  $\varphi_-(x)$  расположены на непересекающихся множествах, а именно  $\varphi_-(x)$  принимает ненулевые значения только на промежутке  $(x_-, -h/2)$ , а  $\varphi_+(x)$  тождественно не равна нулю на интервале  $(h/2, x_+)$  (рис.1б). Выход преобразователя-люфта со случайными параметрами будем считать случайным процессом  $u(t)$  с функцией распределения  $P\{u(t) < u\}$ .



**Рис.1.** Схематическое изображение люфта. Панель *a)* – люфт с детерминированными параметрами, *б)* – люфт со стохастическими параметрами. Серой заливкой выделены для области под кривыми  $\varphi_+(x)$  и  $\varphi_-(x)$ , определяющими плотность вероятности левой и правой границ цилиндра соответственно.



**Рис.2.** Люфт со случайными параметрами. Серой заливкой выделены области под  $\varphi_+(x)$  и  $\varphi_-(x)$ .

Следуя классической схеме [1], определим сначала выход на монотонных входах. Случайный процесс  $u(t)$  в каждый момент времени  $t$  подчиняется операторному соотношению

$$u(t) = \hat{L}[u_0, x_0; \Gamma_l, \Gamma_r]x(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где  $x_0 = x(t_0)$  и  $u_0 = u(t_0)$  – начальные значения функций входа и выхода соответственно. Здесь  $\Gamma_l, \Gamma_r$  – определяющие кривые люфта:  $\Gamma_l : u = x + \xi_l$  и  $\Gamma_r : u = x - \xi_r$ ,  $\xi_l, \xi_r$  – случайные величины с плотностями вероятности  $\varphi_-(x)$  и  $\varphi_+(x)$  соответственно (см. рис.2).

Функцию распределения случайного процесса определим на монотонно возрастающих входах  $x(t)$  следующим образом:

$$P\{u(t) < u\} = \left\{ \begin{array}{l} \theta(u - u_0), \quad x(t) < u_0 + h/2; \\ \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad u < u_0, \\ \Psi_+(u, x(t)), \quad u_0 \leq u \leq x(t) - h/2, \\ 1, \quad u > x(t) - h/2; \end{array} \right\} \quad u_0 + h/2 \leq x(t) \leq x_+ + u_0; \\ \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad u < u_0, \\ \Psi_+(u - (x(t) - x_+ - u_0), x_+ + u_0), \quad u_0 \leq u \leq x(t) - h/2, \\ 1, \quad u > x(t) - h/2; \end{array} \right\} \quad x(t) > x_+ + u_0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь введено обозначение:

$$\Psi_+(u, x(t)) = \int_{h/2}^{u-u_0+h/2} \varphi_+(\tilde{u})d\tilde{u} + \int_{x(t)-u_0}^{x_+} \varphi_+(\tilde{u})d\tilde{u}, \quad (3)$$

следствием которого являются равенства

$$\Psi_+(u, x_+ + u_0) = \int_{h/2}^{u-u_0+h/2} \varphi_+(\tilde{u})d\tilde{u}, \quad (4)$$

$$\Psi_+(u - (x(t) - x_+ - u_0), x_+ + u_0) = \int_{h/2}^{u-(x(t)-x_+)+h/2} \varphi_+(\tilde{u})d\tilde{u}, \quad (5)$$

и использована ступенчатая функция Хевисайда  $\theta(x)$ .

Аналогично, обозначив через

$$\Psi_-(u, x(t)) = \int_{x_-}^{x_+ + x(t) - u_0} \varphi_-(\tilde{u})d\tilde{u} + \int_{-u+x(t)}^{-h/2} \varphi_-(\tilde{u})d\tilde{u}, \quad (6)$$

для монотонно убывающих входов имеем

$$P\{u(t) < u\} = \left\{ \begin{array}{l} \theta(u - u_0), \quad x(t) > u_0 - h/2; \\ \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad u > u_0, \\ \Psi_-(u, x(t)), \quad x(t) + h/2 \leq u \leq u_0, \\ 0, \quad u < x(t) + h/2; \end{array} \right\}, \quad x_- + u_0 \leq x(t) \leq u_0 - h/2; \\ \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad u > u_0, \\ \Psi_-(u - (x(t) - x_- - u_0), x_- + u_0), x(t) + h/2 \leq u \leq u_0, \\ 0, \quad u < x(t) + h/2; \end{array} \right\}, \quad x(t) < x_- + u_0. \end{array} \right. \quad (7)$$

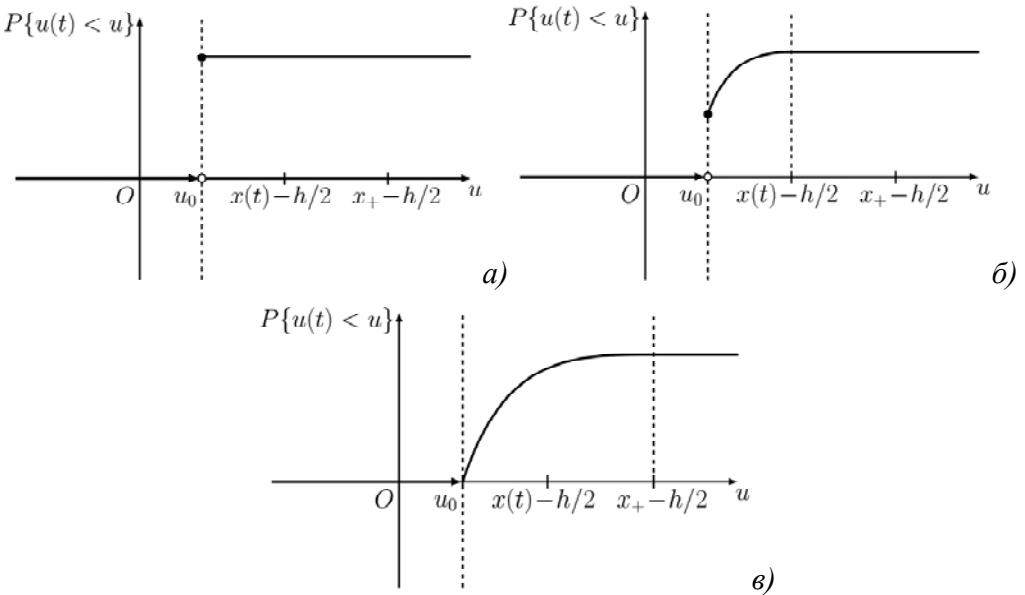
Несмотря на громоздкость соотношений (2) и (7), они допускают вполне ясную интерпретацию: вероятность  $P(u) \equiv P\{u(t) < u\}$  определяется начальным положением цилиндра  $u_0$  и координатой поршня  $x(t)$  в текущий момент времени. Рассмотрим три случая, отвечающих различным соотношениям между  $u_0$  и  $x(t)$  (рис.3).

1) Если  $x(t) < u_0 + h/2$ , то поршень расположен левее правой границы цилиндра. Следовательно, координата  $u$  не менялась за прошедший промежуток времени, и  $P(u) = 1$  при  $u \geq u_0$ ,  $P(u) = 0$  при  $u < u_0$ . В этом случае функция  $P(u)$  очевидным образом совпадает с функцией Хевисайда:  $P(u) = \theta(u - u_0)$ .

2) Если выполняются неравенства  $u_0 + h/2 \leq x(t) \leq x_+ + u_0$ , то поршень находится на промежутке, в пределах которого плотность вероятности правой границы люфта отлична от нуля. Из физических свойств системы следует, что событие  $u < u_0$  невозможно, а событие  $u > x(t) - h/2$  — достоверно. Для  $u$  из интервала  $[u_0, x(t) + h/2]$  вероятность противоположного события, как следует из рис.2, равна  $\int_{h/2}^{u-u_0+h/2} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \int_{x(t)-u_0}^{x_+} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u}$ . Величина  $P(u)$  с увеличением  $u$  монотонно возрастает до единицы.

3) Если  $x(t) > x_+ + u_0$ , то поршень при движении вправо с вероятностью, равной единице, достигает правой стенки цилиндра. Этот случай сводится к предыдущему посредством простой замены координаты  $u' = u - (x(t) - x_- - u_0)$ .

Соотношение (7) для монотонно убывающих входов вводится на основе аналогичных рассуждений с очевидным изменением пределов интегрирования в соотношении (3).



**Рис.3.** Эволюция функции распределения  $P(u) = \{u(t) < u\}$  для монотонно возрастающих входов. Панель а)  $x(t) < u_0 + h/2$ , панель б)  $u_0 + h/2 \leq x(t) \leq x_+ + u_0$ , панель в)  $x(t) > x_+ + u_0$ .

Отметим, что для монотонно возрастающих входов соотношение (2) может быть записано в более лаконичной форме:

$$P\{u(t) < u\} = \begin{cases} \theta(u - u_0), & x(t) < u_0 + h/2; \\ \left. \begin{cases} 0, & u < u_0, \\ \Psi_+(u - \Delta, x(t) - \Delta), \\ u_0 \leq u \leq x(t) - h/2, \\ 1, & u > x(t) - h/2; \end{cases} \right\} x(t) \geq u_0 + h/2, \end{cases} \quad (8)$$

где введено обозначение  $\Delta = \theta(x(t) - x_+ - u_0)(x(t) - x_+ - u_0)$ . Аналогичным образом преобразуется соотношение (7). Кроме того, с использованием функции Хевисайда, последнее соотношение запишется как:

$$P\{u(t) < u\} = \theta(u - u_0) - \theta(u - u_0)\theta(x(t) - u_0 - h/2)\theta(x(t) - u - h/2)(1 - \Psi_+(u - \Delta, x(t) - \Delta)) =$$

$$= \theta(u - u_0) - \theta(u - u_0)\theta(x(t) - u_0 - h/2)\theta(x(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u}, \quad (9)$$

а соответствующая плотность распределения определяется как

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{dP\{u(t) < u\}}{du} = \delta(u - u_0) - \\ &- \delta(u - u_0)\theta(x(t) - u_0 - h/2)\theta(x(t) - u - h/2) \times \\ &\times \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\ &+ \theta(u - u_0)\theta(x(t) - u_0 - h/2)\delta(x(t) - u - h/2) \times \\ &\times \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\ &+ \theta(u - u_0)\theta(x(t) - u_0 - h/2)\theta(x(t) - u - h/2) \times \varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta), \quad (10) \end{aligned}$$

где введено стандартное обозначение  $\delta(u)$  для дельта-функции Дирака.

**Первая и вторая моментные функции.** Настоящий раздел посвящен идентификации характеристик случайного процесса – выхода люфта со случайными параметрами, а именно вычислениям моментных функций  $\langle u \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u\psi(u)du$  и  $\langle u^2 \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2\psi(u)du$ .

**Теорема 1.** Первая и вторая моментные функции определяются соотношениями:

$$\langle u \rangle(t) = u_0 + \theta(x(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2}^{x(t) - u_0} (u - h/2)\varphi_+(u - \Delta)du, \quad (11)$$

$$\langle u^2 \rangle(t) = u_0^2 + \theta(x(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2}^{x(t) - u_0} ((u + u_0 - h/2)^2 - u_0^2)\varphi_+(u - \Delta)du. \quad (12)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \langle u \rangle(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u\psi(u)du = u_0 - \int_{-\infty}^{\infty} u\delta(u - u_0)\theta(x(t) - u_0 - h/2)\theta(x(t) - u - h/2) \times \\ &\times \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} du + \int_{-\infty}^{\infty} u\theta(u - u_0)\theta(x(t) - u_0 - h/2)\delta(x(t) - u - h/2) \times \\ &\times \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} du + \int_{-\infty}^{\infty} u\theta(u - u_0)\theta(x(t) - u_0 - h/2)\theta(x(t) - u - h/2) \times \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \times \varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta) du &= u - u_0 \theta(x(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\ &+ \theta(x(t) - u_0 - h/2) \int_{u_0}^{x(t) - u_0} u \varphi_+(\tilde{u} - u_0 + h/2 - \Delta) d\tilde{u}. \end{aligned}$$

Произведя замену переменной  $\tilde{u} \rightarrow u' = \tilde{u} - u_0 + h/2 - \Delta$ , получим

$$\langle u \rangle(t) = u_0 + \theta(x(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2}^{x(t) - u_0} (u' - h/2) \varphi_+(u' - \Delta) du'.$$

Вторая моментная функция

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \psi(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 (\delta(u - u_0) - \delta(u - u_0) \theta(x(t) - u_0 - h/2) \times \\ &\times \theta(x(t) - u - h/2) \times \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \theta(u - u_0) \theta(x(t) - u_0 - h/2) \times \\ &\times \delta(x(t) - u - h/2) \times \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \theta(u - u_0) \theta(x(t) - u_0 - h/2) \theta(x(t) - u - h/2) \times \\ &\times \varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta)) du = u_0^2 - \theta(x(t) - h/2 - u_0) u_0^2 \times \int_{h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\ &+ \theta(x(t) - h/2 - u) \times \int_{h/2 - \Delta}^{x(t) - u_0 - \Delta} u^2 \varphi_+(\tilde{u} - u_0 + h/2 - \Delta) d\tilde{u}. \end{aligned}$$

После указанной замены получим

$$\langle u^2 \rangle(t) = u_0^2 + \theta(x(t) - h/2 - u_0) \int_{h/2}^{x(t) - u_0} ((u' + u_0 - h/2)^2 - u_0^2) \varphi_+(u' - \Delta) du'. \quad \blacksquare$$

**Определение выхода на кусочно-монотонных входах.** Для реализации следующего этапа – определения выхода на кусочно-монотонных входах – необходимо определить соответствующий выход в ситуации, когда начальное значение выхода является случайной величиной.

Пусть начальное значение  $u_0$  представляет собой случайную величину, распределенную с плотностью вероятности  $\varphi_{U_0}(u)$ . Определим функцию распределения следующим образом:

$$P_{u_0} \{u(t) < u\} = \begin{cases} \theta(u - (x(t) - h/2)), & x(t) > u_+ + h/2; \\ \left\{ \begin{array}{l} 0, & u < x(t) - h/2, \\ \int_{-\infty}^u \varphi_{U_0}(\tilde{u}) d\tilde{u}, & u \geq x(t) - h/2, \end{array} \right\} & x(t) \leq u_+ + h/2, \end{cases} \quad (13)$$

где  $u_+$  – верхняя граница носителя  $\varphi_{U_0}(u)$ .

Перепишем последнее соотношение в виде

$$P_{u_0} \{u(t) < u\} = \theta(u - (x(t) - h/2)) [1 - \theta(x(t) - (u_+ + h/2))] \int_u^\infty \varphi_{U_0}(\tilde{u}) d\tilde{u}. \quad (14)$$

Соответствующая плотность распределения равна

$$\begin{aligned} \varphi_{u_0}(u) &= \frac{d}{du} P_{u_0} \{u(t) < u\} = \\ &= \delta(u - (x(t) - h/2)) [1 - \theta(x(t) - (u_+ + h/2))] \int_u^\infty \varphi_{U_0}(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\ &+ \theta(u - (x(t) - h/2)) \theta(x(t) - (u_+ + h/2)) \varphi_{U_0}(u). \end{aligned} \quad (15)$$

Плотность распределения  $p(u)$  в ситуации, когда  $u_0$  также является случайной величиной, определяется как свертка (10) и (15):

$$p(u) = \int_{-\infty}^\infty \varphi_{u_0}(u - s) \psi(s) ds. \quad (16)$$

Отметим, что оператор люфта со случайными параметрами  $\hat{L}$  в (1) удовлетворяет полугрупповому тождеству

$$\hat{L}[t_0, u_0, x_0]x(t) = \hat{L}[t_1, \hat{L}[t_0, u_0, x_0]x(t_1), x(t_1)]x(t) \quad (17)$$

для произвольного момента времени  $t_1 \in [t_0, T]$ .

Для определения оператора  $\hat{L}$  на кусочно-монотонных входах в случае конечного значения  $t$  выполним разбиение промежутка  $[0, T]$  вида  $[0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n] \cup [t_n, T]$  на промежутки монотонности и определим на каждом из них соответствующий оператор как оператор на монотонном входе. Начальное состояние при этом определяется как состояние в момент времени перехода на следующий промежуток монотонности.

**Теорема 2.** Пусть на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$  имеет место равномерная сходимость последовательности кусочно-монотонных функций  $\{x_n(t)\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , к функции  $x_*(t)$ :

$$x_n(t) \Rightarrow x_*(t) \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (18)$$

Тогда выход представляет собой случайный процесс, сходящийся по распределению к случайному процессу

$$u_*(t) = \hat{L}[u_0, x_0]x_*(t). \tag{19}$$

**Доказательство.** Сходимость последовательности  $\xi_n, n=1,2,\dots$ , по распределению к  $\xi$  (обозначение  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ) означает, что для произвольной ограниченной непрерывной функции  $f=f(x)$  выполняется предельный переход

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(\xi_n) \rangle = \langle f(\xi) \rangle, \tag{20}$$

где  $\langle \dots \rangle$  отвечает усреднению по функции распределения [31].

Выходу  $x_*(t)$  сопоставляется случайный процесс с функцией распределения  $P\{u < u_*(t)\}$  как предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{u < u_n(t)\}$ .

1. Докажем, что  $u_n(t) \xrightarrow{d} u_*(t)$  выполняется для монотонных функций  $x_n(t)$ .

Для этого рассмотрим модуль разности математических ожиданий  $D = |\langle f(u_n(t)) \rangle - \langle f(u_*(t)) \rangle|$  и убедимся, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ : при  $|x_n(t) - x_*(t)| < \delta$  справедливо условие  $D < \varepsilon$ . В самом деле, используя (10), получим

$$D = \left| \int_0^1 f(u) dP\{u < u_n\} - \int_0^1 f(u) dP\{u < u_*\} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \psi_n(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \psi_*(u) du \right|. \tag{21}$$

Имеет место оценка

$$\begin{aligned} D &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) (\psi_n(u) - \psi_*(u)) du \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| (-\delta(u-u_0)\theta(x_n(t)-u_0-h/2)\theta(x_n(t)-u-h/2) \int_{u-u_0+h/2-\Delta(x_n(t))}^{x_n(t)-u_0-\Delta(x_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\ &+ \delta(u-u_0)\theta(x_*(t)-u_0-h/2)\theta(x_*(t)-u-h/2) \int_{u-u_0+h/2-\Delta(x_*(t))}^{x_*(t)-u_0-\Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\ &+ \theta(u-u_0)\theta(x_n(t)-u_0-h/2)\delta(x_n(t)-u-h/2) \int_{u-u_0+h/2-\Delta(x_n(t))}^{x_n(t)-u_0-\Delta(x_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\ &- \theta(u-u_0)\theta(x_*(t)-u_0-h/2)\delta(x_*(t)-u-h/2) \int_{u-u_0+h/2-\Delta(x_*(t))}^{x_*(t)-u_0-\Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\ &+ \theta(u-u_0)\theta(x_n(t)-u_0-h/2)\theta(x_n(t)-u-h/2)\varphi_+(u-u_0+h/2-\Delta(x_n(t))) - \\ &- \theta(u-u_0)\theta(x_*(t)-u_0-h/2)\theta(x_*(t)-u-h/2)\varphi_+(u-u_0+h/2-\Delta(x_*(t))) \Big| du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u_0)(-\theta(x_n(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta(x_n(t))}^{x_n(t) - u_0 - \Delta(x_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\
&+ \theta(x_*(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta(x_*(t))}^{x_*(t) - u_0 - \Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u}) + \\
&+ \theta(u - u_0)\theta(x_n(t) - u_0 - h/2)\delta(x_n(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(x_n(t))}^{x_n(t) - u_0 - \Delta(x_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\
&- \theta(u - u_0)\theta(x_*(t) - u_0 - h/2)\delta(x_*(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(x_*(t))}^{x_*(t) - u_0 - \Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\
&+ \theta(u - u_0)\theta(x_n(t) - u_0 - h/2)\theta(x_n(t) - u - h/2)\varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(x_n(t))) - \\
&- \theta(u - u_0)\theta(x_*(t) - u_0 - h/2)\theta(x_*(t) - u - h/2)\varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(x_*(t))) | du = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u_0)(-\theta(x_n(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta(x_n(t))}^{x_n(t) - u_0 - \Delta(x_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\
&+ \theta(x_n(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta(x_*(t))}^{x_*(t) - u_0 - \Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\
&- \theta(x_n(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta(x_*(t))}^{x_*(t) - u_0 - \Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\
&+ \theta(x_*(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta(x_*(t))}^{x_*(t) - u_0 - \Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u}) + \\
&+ \theta(u - u_0)\theta(x_n(t) - u_0 - h/2)\delta(x_n(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(x_n(t))}^{x_n(t) - u_0 - \Delta(x_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\
&- \theta(u - u_0)\theta(x_*(t) - u_0 - h/2)\delta(x_*(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(x_*(t))}^{x_n(t) - u_0 - \Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\
&+ \theta(u - u_0)\theta(x_n(t) - u_0 - h/2)\theta(x_n(t) - u - h/2)\varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(x_n(t))) - \\
&- \theta(u - u_0)\theta(x_*(t) - u_0 - h/2)\theta(x_*(t) - u - h/2)\varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(x_n(t))) | du = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u_0)(\theta(x_n(t) - u_0 - h/2) \int_{-(\Delta(x_*(t)) - \Delta(x_n(t)))}^{x_*(t) - x_n(t) - (\Delta(x_*(t)) - \Delta(x_n(t)))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\theta(x_*(t) - u_0 - h/2) - \theta(x_n(t) - u_0 - h/2)) \int_{h/2 - \Delta(x_*(t))}^{x_*(t) - u_0 - \Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\
 & +\theta(u - u_0)\theta(x_n(t) - u_0 - h/2)\delta(x_n(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(x_n(t))}^{x_n(t) - u_0 - \Delta(x_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\
 & -\theta(u - u_0)\theta(x_*(t) - u_0 - h/2)\delta(x_*(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(x_*(t))}^{x_*(t) - u_0 - \Delta(x_*(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\
 & +\theta(u - u_0)\theta(x_n(t) - u_0 - h/2)\theta(x_n(t) - u - h/2)\varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(x_n(t))) - \\
 & -\theta(u - u_0)\theta(x_*(t) - u_0 - h/2)\theta(x_*(t) - u - h/2)\varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(x_*(t))) | du.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Принимая во внимание непрерывность функции  $f(u)$  и с учетом  $x_n(t) \Rightarrow x_*(t)$ , на основании непрерывности определенного интеграла как функции пределов интегрирования [32] получаем, что  $D < \varepsilon$ , следовательно,  $u_n(t) \xrightarrow{d} u_*(t)$ .

2. Перейдем к рассмотрению кусочно-монотонных входов  $x(t)$  для  $t_0 \leq t \leq T$ . Обозначим  $y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) dP\{u < u_n\}$ . Докажем, что последовательность  $\{y_n\}$  является фундаментальной на отрезке  $[t_0, T]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \in N \quad \forall t \in [t_0, T] \quad |y_m(t) - y_n(t)| < \varepsilon. \tag{23}$$

Действительно, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 & |y_m(t) - y_n(t)| \equiv \\
 & \equiv \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) (-\delta(u - u_0)\theta(y_m(t) - u_0 - h/2)\theta(y_m(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(y_m(t))}^{y_m(t) - u_0 - \Delta(y_m(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \right. \\
 & +\delta(u - u_0)\theta(y_n(t) - u_0 - h/2)\theta(y_n(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(y_n(t))}^{y_n(t) - u_0 - \Delta(y_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\
 & +\theta(u - u_0)\theta(y_m(t) - u_0 - h/2)\delta(y_m(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(y_m(t))}^{y_m(t) - u_0 - \Delta(y_m(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \\
 & -\theta(u - u_0)\theta(y_n(t) - u_0 - h/2)\delta(y_n(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(y_n(t))}^{y_n(t) - u_0 - \Delta(y_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \\
 & \left. +\theta(u - u_0)\theta(y_m(t) - u_0 - h/2)\delta(y_m(t) - u - h/2)\varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(y_m(t))) - \right. \\
 & \left. -\theta(u - u_0)\theta(y_n(t) - u_0 - h/2)\delta(y_n(t) - u - h/2)\varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(y_n(t))) \right| du \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u_0)(-\theta(y_m(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta(y_m(t))}^{y_m(t) - u_0 - \Delta(y_m(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} + \right. \\
&+ \theta(y_n(t) - u_0 - h/2) \int_{h/2 - \Delta(y_n(t))}^{y_n(t) - u_0 - \Delta(y_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u}) du \left| + \right. \\
&+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u - u_0) \theta(y_m(t) - u_0 - h/2) \delta(y_m(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(y_m(t))}^{y_m(t) - u_0 - \Delta(y_m(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} - \right. \\
&- \theta(u - u_0) \theta(y_n(t) - u_0 - h/2) \delta(y_n(t) - u - h/2) \int_{u - u_0 + h/2 - \Delta(y_n(t))}^{y_n(t) - u_0 - \Delta(y_n(t))} \varphi_+(\tilde{u}) d\tilde{u} du \left| + \right. \\
&+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u - u_0) \theta(y_m(t) - u_0 - h/2) \delta(y_m(t) - u - h/2) \varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(y_m(t))) - \right. \\
&- \theta(u - u_0) \theta(y_n(t) - u_0 - h/2) \delta(y_n(t) - u - h/2) \varphi_+(u - u_0 + h/2 - \Delta(y_n(t))) du \left| .
\end{aligned}$$

Следовательно, последовательность  $\{y_n\}$  имеет предел:  $Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$ . Докажем, что  $Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(u_n(t)) \rangle$ .

Рассмотрим на промежутке  $t_0 \leq t \leq T$  произвольную последовательность кусочно-монотонных функций  $x_n^{(1)}(t)$ , обладающую свойством  $x_n^{(1)}(t) \Rightarrow x_*(t)$ . Соответствующая последовательность интегралов  $y_n^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n^{(1)}(t)) du$  сходится равномерно к функции  $y_*(t)$ .

Чередую слагаемые  $y_n(t)$  и  $y_n^{(1)}(t)$ , построим вспомогательную последовательность  $z_n(t) = \{y_1(t), y_1^{(1)}(t), y_2(t), y_2^{(1)}(t), \dots, y_n(t), y_n^{(1)}(t), \dots\}$ . Очевидно, что она также является фундаментальной и имеет тот же предел  $y_*(t)$ .

Тем самым доказано, что для произвольного непрерывного на  $[t_0, T]$  входа  $x(t)$  определен случайный процесс  $u(t)$ , трактуемый как выход гистерезисного преобразователя со случайными параметрами на произвольном непрерывном входе. ■

**Иллюстративные примеры.** Рассмотрим люфт с направляющими прямыми  $\Gamma_l : u = x + \xi_l$  и  $\Gamma_r : u = x - \xi_r$ ,  $\xi_l, \xi_r$  – равномерно распределенные на интервалах  $(x_-, -h/2)$  и  $(h/2, x_+)$  соответственно случайные величины. Динамика изменения функции распределения  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  для монотонно возрастающего входа  $x(t) = t + 1$  в зависимости от  $u$  приведена на рис.4, правая граница является равномерно распределенной случайной

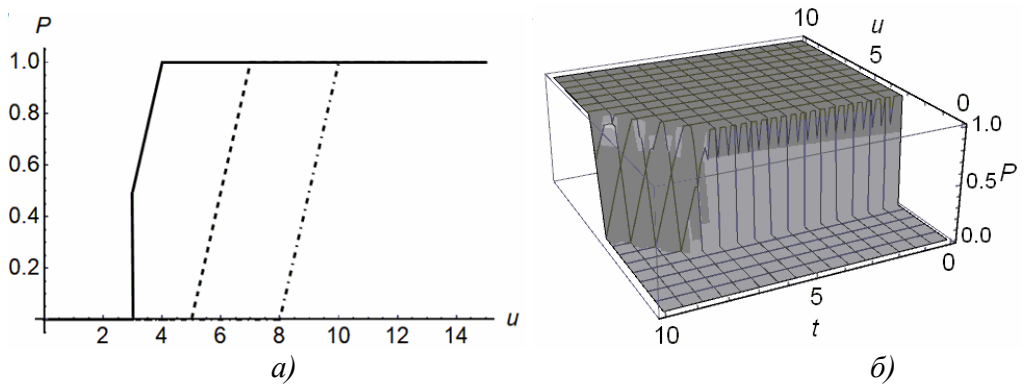
величиной, значения параметров равны  $h/2=5$ ,  $x_+ = 7$ ,  $u_0 = 3$ ,  $t = 8$  (сплошная кривая),  $t = 11$  (пунктирная кривая),  $t = 14$  (штрих-пунктирная кривая).

Рис.5 иллюстрирует эволюцию функции распределения в ситуации, когда правая граница является случайной величиной с плотностью распределения

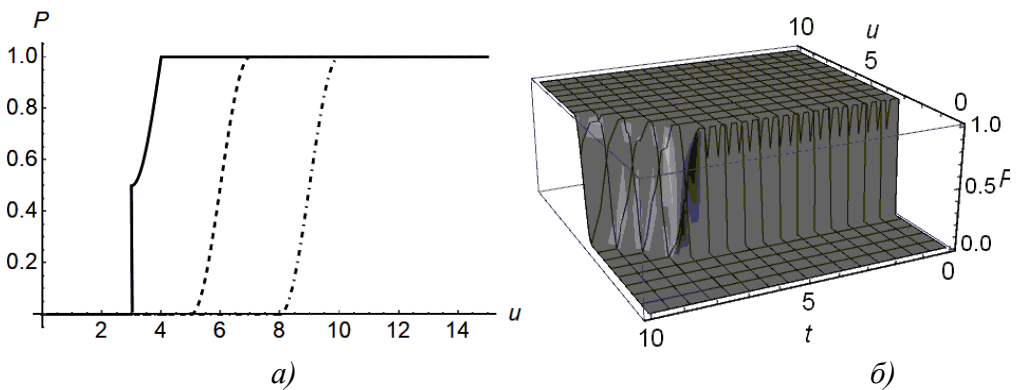
$$f_+(x) = \frac{\pi}{2(x_+ - h/2)} \sin\left(\pi \frac{x - h/2}{x_+ - h/2}\right) \text{ при } x \in (h/2, x_+),$$

значения параметров равны  $h/2 = 5$ ,  $x_+ = 7$ ,  $u_0 = 3$ .

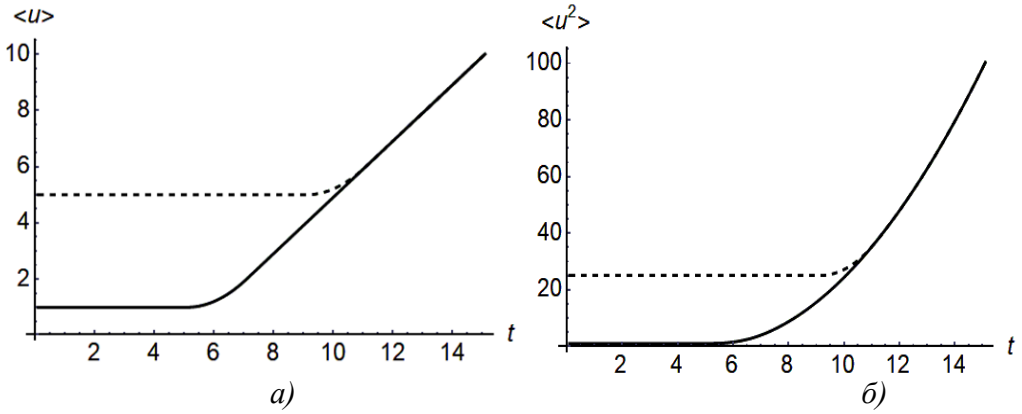
Результаты численного эксперимента определения моментных функций  $\langle u \rangle$  и  $\langle u^2 \rangle$  приведены на рис.6, 7.



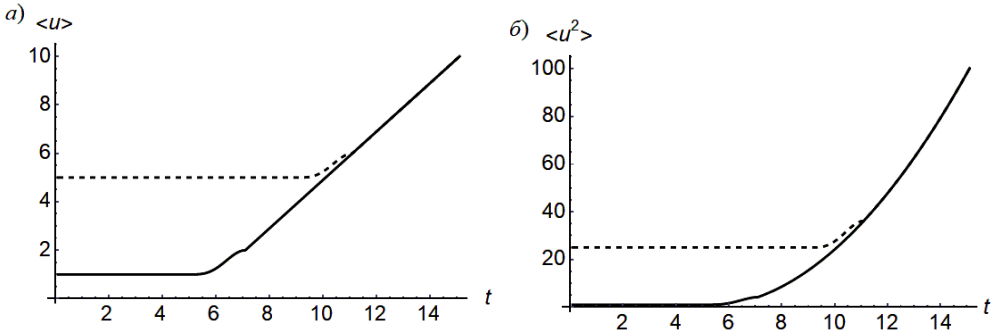
**Рис.4.** а) Динамика эволюции функции распределения  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  для входа  $x(t) = t + 1$ , сплошная линия соответствует моменту времени  $t = 8$ , пунктирная –  $t = 11$ , штрих-пунктирная –  $t = 14$ , б) Функция распределения  $P_t(u) = P\{u(t) < u\}$ .



**Рис.5.** а) Функция распределения  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  для входа  $x(t) = t + 1$ ,  $t = 8$  (сплошная кривая),  $t = 11$  (пунктирная кривая),  $t = 14$  (штрих-пунктирная кривая), б) Функция распределения  $P_t(u) = P\{u(t) < u\}$ .



**Рис.6.** Моменты  $\langle u \rangle$  и  $\langle u^2 \rangle$  для входа  $x(t) = t + 1$  при  $u_0 = 1$  и  $u_0 = 3$ , правая граница является равномерно распределенной случайной величиной, значения параметров равны  $h/2 = 5$ ,  $x_+ = 7$ .



**Рис.7.** Моменты  $\langle u \rangle$  и  $\langle u^2 \rangle$  для входа  $x(t) = t + 1$  при  $u_0 = 1$  и  $u_0 = 3$ , правая граница является случайной величиной с плотностью распределения  $\varphi_+(x) = \frac{\pi}{2(x_+ - h/2)} \sin\left(\pi \frac{x - h/2}{x_+ - h/2}\right)$  при  $x \in (h/2, x_+)$ , значения параметров равны  $h/2 = 5$ ,  $x_+ = 7$ .

### 3. Заключение

В работе предложен новый класс моделей гистерезисных преобразователей, обобщающий классическое определение люфта на случай, когда определяющие его кривые зависят от случайного параметра. Такие преобразователи естественным образом возникают при изучении моделей динамических систем, содержащих люфты, параметры которых невозможно идентифицировать без разрушающего контроля. Предложенный математический аппарат позволяет определить выходы соответствующих преобразователей как случайный процесс.



Доказана корректность определения введенных преобразователей в терминах специальной предельной конструкции, позволяющей определить выход на произвольном непрерывном входе. Приведены явные выражения для первой и второй моментных функций выхода. Полученные выражения иллюстрируются результатами численного моделирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *М.А. Красносельский, А.В. Покровский.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 272 с.;  
*M.A. Krasnosel'skii, A.V. Pokrovskii.* Systems with hysteresis. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989, 410 p.
2. *I.D. Mayergoz, G. Bertotti* (eds.) The Science of Hysteresis (3-volume set), 2005, 2097 p.
3. *F. Ikhouane, J. Rodellar.* Systems with Hysteresis Analysis, Identification and Control Using the Bouc-Wen Model. Chichester: John Wiley & Sons, 2007, 222p.
4. *W. Lacarbonara, D. Bernardini, F. Vestroni.* Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices // International Journal of Solids and Structures, 2004, v.41 (5–6), p.1209–1234.
5. *L.A. Rios, D. Rachinskii, R. Cross.* A model of hysteresis arising from social interaction within a firm // Journal of Physics: Conference Series, 811(1), p.012011.
6. *A. Fahsi, M. Belhaq, F. Lakrad.* Suppression of hysteresis in a forced van der Pol–Duffing oscillator / Communications in Nonlinear Sci. & Numer. Simul., 2009, 14 (4), 1609–1616.
7. *R. Cross, H. McNamara, A. Pokrovskii, D. Rachinskii.* A new paradigm for modelling hysteresis in macroeconomic flows // Physica B: Condensed Matter, 2008, v.403, Iss.2–3, p.231–236.
8. *W. Lacarbonara, F. Vestroni.* Nonclassical Responses of Oscillators with Hysteresis // Nonlinear Dynamics, 2003, v.32, p.235–258.
9. *M.A. Janaideh, R. Naldi, L. Marconi, P. Krejčí.* A hybrid model for the play hysteresis operator // Physica B 430, 2013, p.95–98.
10. *B. Carboni, W. Lacarbonara.* Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations // Nonlinear Dynamics, 2016, 83, p.23–39.
11. *M.E. Semenov, A.M. Solovyov, M.A. Popov, P.A. Meleshenko.* Coupled inverted pendulums: stabilization problem // Archive of Applied Mechanics, 2018, v.88, p.517–524.
12. *F. Ikhouane, J. Rodellar.* On the Hysteretic Bouc–Wen Model // Nonlinear Dynamics, 2005, v.42, p.63–78.
13. *W.D. Iwan.* A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 1966, 33(4), 1966, p.893–900.
14. *M.F.M. Naser, F. Ikhouane.* Consistency of the Duhem Model with Hysteresis. Mathematical Problems in Engineering, 2013. Article ID 586130, 16 p.
15. *C.-J. Lin, P.-T. Lin.* Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model // Comp. and Math. with Applications, 2012, v.64, p.766–787.
16. *М.А. Красносельский, Б.М. Даринский, И.В. Емелин, П.П. Забрейко, Е.А. Лифшиц, А.В. Покровский.* Оператор-гистерант // Докл. АН СССР, 1970, 190:1, с.34–37.;

- M.A. Krasnosel'skii, V.M. Darinskii, I.V. Emelin, P.P. Zabreiko, E.A. Lifshitz, A.V. Pokrovskii.* Operator-hysteron // Dokl. AN SSSR, 1970, 190, p.29–33.
17. *M.E. Semenov, D.V. Shevlyakova, P.A. Meleshenko.* Inverted pendulum under hysteretic control: stability zones and periodic solutions // *Nonlinear Dynamics*, 2014, v.75, N1-2. p.247-256.
18. *M.E. Semenov, P.A. Meleshenko, A.M. Solovyov, A.M. Semenov.* Hysteretic nonlinearity in inverted pendulum problem. В сборнике: Springer Proceedings in Physics Сер. "Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis – Selected papers from CSNDD 2012 and CSNDD 2014", 2015, p.463-506.
19. *M. Belhaq, A. Bichri, J. Der Hogapian, J. Mahfoud.* Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, 2011, 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.001
20. *W. Lacarbonara, M. Talò, B. Carboni, G. Lanzara.* Tailoring of Hysteresis Across Different Material Scales. In Collection: M. Belhaq (ed.), *Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics*, Springer Proceedings in Physics 199, p.227–250.
21. *D. Rachinskii.* Realization of Arbitrary Hysteresis by a Low-dimensional Gradient Flow, 2015, arXiv:1506.03842v1 [math.DS].
22. *I.D. Mayergoyz.* Mathematical models of hysteresis // *Physical Review Letters*, 1986, v.56(15), p.1518-1521.
23. *I.D. Mayergoyz, M. Dimian.* Stochastic aspects of hysteresis // *Journal of Physics: Conference Series*, 2005, v.22, p.139–147.
24. *R. Bouc.* Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation*. Prague, Czechoslovakia, 1967, p. 315.
25. *R. Bouc.* Modèle mathématique d'hystérésis: application aux systèmes à un degré de liberté. *Acustica* [in French], 1971, v.24, p.16–25.
26. *Y.K. Wen.* Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of Engineering Mechanics*. American Society of Civil Engineers, 1976, 102 (2), p.249–263.
27. *A.E. Charalampakis, V.K. Koumousis.* A Bouc–Wen model compatible with plasticity postulates. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, v.322, p.954–968.
28. *A.K. Kottaria, A.E. Charalampakis, V.K. Koumousi.* A consistent degrading Bouc–Wen model. *Engineering Structures*, 2014, v.60, p.235–240.
29. *S.A. Belbas.* New hysteresis operators with applications to counterterrorism // *Applied Mathematics and Computation*, 2005, v.170, p.425–439.
30. *A.E. Charalampakis, V.K. Koumousis.* Identification of Bouc-Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm // *J. of Sound and Vibration*, 2008, 314 (3–5), p.571–585.
31. *A.Н. Ширяев.* Вероятность–1. – М.: МЦНМО, 2007. 552 с.;  
*A.N. Shiryaev.* Probability–1. Springer, 2016, 486 p.
32. *B.A. Зорич.* Математический анализ. Часть 1. – М.: МЦНМО, 2017, 576 с.;  
*V.A. Zorich.* *Mathematical Analysis I*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2015, 616 p.

Поступила в редакцию 20.12.2018

После доработки 20.12.2018

Принята к публикации 11.03.2019