МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 год, том 31, номер 7, стр. 127-142

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РЫБОЛОВСТВОМ

© *2019 г.* ***А.И. Сухинов***[1]***, Г.А. Угольницкий***[2]***, А.Б. Усов***[2]

[1]Донской государственный технический университет sukhinov@gmail.com
[2]Южный федеральный университет ougoln@mail.ru, tol151968@yandex.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №17-11-01286.

DOI: 10.1134/S0234087919070086

Исследуются динамические теоретико-игровые модели согласования частных и общественных интересов агентов в рамках концепции устойчивого развития управляемой ими динамической системы. В рамках этой концепции механизмы иерархического управления – методы принуждения и побуждения – формализованы как решения иерархических дифференциальных игр с фазовыми ограничениями, отражающими требования к состоянию управляемой динамической системы, обеспечивающему условия устойчивого развития. Принуждение предполагает воздействие ведущего игрока (субъекта управления устойчивым развитием) на множество допустимых управлений ведомого (субъекта воздействия на управляемую динамическую систему), а побуждение – на его функцию выигрыша. Механизмы административного и экономического управления формализованы как сценарии компьютерной имитации. Рассмотренные в статье динамические модели являются развитием моделей согласования общественных и частных интересов, предложенных Ю.Б. Гермейером и И.А. Вателем. Проведены численные расчеты и выполнен сравнительный анализ эффективности указанных механизмов управления для модели рыболовства.

Ключевые слова: дифференциальные игры, имитационное моделирование, механизмы управления, устойчивое развитие.

METHODS OF SOLUTION OF THE GAME THEORETIC MODELS OF COORDINATION OF INTERESTS IN THE FISHERY REGULATION

A.I. Sukhinov[1]***, G.A. Ougolnitsky***[2]***, A.B. Usov***[2]

[1]Don State Technical University
[2]Southern Federal University

Dynamic game-theoretic models for concordance of private and social interests of agents within the framework of the concept of sustainable development of the dynamic system controlled by them are investigated. Within the framework of this concept, the hierarchical control mechanisms – methods of adminstrative control and motivation – are formalized as solutions of hierarchical differential games with phase constraints reflecting the requirements for the state of the controlled dynamic system providing conditions for sustainable development. Administrative control involves the impact of the lead player (the subject of managing sustainable development) on the set of admissible slave controls (the subject of the impact on the controlled dynamic system), and the incentive - on his win function. Mechanisms of administrative and economic management are formalized as computer imitation scenarios. The dynamic models considered in the article are the development of the models for concordance of private and social interests proposed by Yu.B. Germeier and I.A. Vatel. Numerical calculations are carried out and a comparative analysis of the effectiveness of these control mechanisms for the fishing model is fulfilled.

Key words: differential games, simulation, control mechanisms, sustainable development.

1. Введение

Настоящая работа посвящена анализу динамических моделей согласования частных и общественных интересов с учетом требований устойчивого развития (на примере рыболовства). Концепция иерархического управления устойчивым развитием (УР) на базе математического моделирования описана в работах [1-6]. В рамках этой концепции механизмы иерархического управления (методы принуждения и побуждения) формализованы как решения иерархических дифференциальных игр с фазовыми ограничениями, отражающими требования к состоянию управляемой динамической системы (условия устойчивого развития). Принуждение предполагает воздействие ведущего игрока (субъекта управления устойчивым развитием) на множество допустимых управлений ведомого (субъекта воздействия на управляемую динамическую систему), а побуждение – на его функцию выигрыша. При анализе дифференциальных игр используется работа [7].

Постановка задачи согласования частных и общественных интересов восходит к основополагающей работе Ю.Б. Гермейера и И.А. Вателя [8], в которой показано, что при определенной структуре функций выигрыша агентов существует парето-оптимальное равновесие Нэша их игры в нормальной форме, т.е. достигается полное согласование интересов. Близкие постановки рассматривались также в статических моделях теории активных систем [9] и информационной теории иерархических систем [10]. Впоследствии тематика согласования интересов активно развивалась в сетевых играх. В частности, Х. Пападимитриу ввел понятие цены анархии, дающее количественную характеристику уровня согласования частных и общесистемных интересов [11]. Динамические постановки указанных моделей авторам неизвестны.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разд.2 приводится динамическая постановка модели согласования общественных и частных интересов (СОЧИ-модели) с учетом требований УР в древовидной системе управления на примере рыболовства. В разд.3 описывается численное исследование линейной версии модели и модели общего вида на основе имитационного моделирования для различных сценариев управления и поведения игроков в случае программных стратегий. В заключительном разд.4 дан сравнительный анализ полученных результатов с точки зрения эффективности методов управления УР с использованием специальных индексов системной согласованности, а также использования общей модели и ее линейной версии.

2. Динамическая СОЧИ-модель рыболовства с учетом требований устойчивого развития

Игроки максимизируют целевые функционалы

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}\{av_i(t)P(t) - s_i(t)M[P(t)-P^*]^2\}dt - \\ - e^{-\rho T} s_i(T)M[P(T)-P^*]^2 \to \max \tag{1}$$

при ограничениях на управления

$$q_i(t) \le u_i(t) \le r_i\,, \quad i=1,...,N\,; \tag{2}$$

и уравнениях динамики биомассы рыбной популяции

$$\dot{P} = f(P(t),u(t)), \quad P(0)=P_0\,. \tag{3}$$

Поясним структуру целевых функционалов (1). В СОЧИ-моделях предполагается, что каждый игрок распределяет свой ресурс между общественными и частными интересами, поэтому его выигрыш складывается из двух составляющих – дохода от частной деятельности и доли в совместно создаваемом общественном доходе (или доли ущерба от общественного зла, с которым совместно борются игроки). В настоящей работе игроки – это рыболовецкие предприятия $i=1,...,N$, максимизирующие доход от рыболовства с учетом возможного штрафа за нарушение условий УР популяции. Условие УР имеет вид $\forall t\; P(t)=P^*$ или в более слабой форме $\forall t\; [P(t)-P^*]^2 \le \delta$, где $P(t)$ – текущее значение биомассы рыбной популяции; P^* – его идеальное значение, полностью удовлетворяющее требованиям УР (гомеостаза). При нарушении условия УР на игроков налагается штраф с коэффициентом M; $s_i(t)$ – доля штрафа для игрока i в момент t, что определяет второе слагаемое в подынтегральной функции. Первое слагаемое это доход игрока i в момент t от рыболовства, где a – цена единицы биомассы рыбы. Период рассмотрения T может быть конечным и бесконечным. Второй вариант более адекватен задаче управления УР; тогда терминальный член отсутствует.

В динамических СОЧИ-моделях управление игрока $u_i(t)$ – часть ресурса r_i, ассигнуемая на общественные нужды (тогда $r_i - u_i(t)$ – часть ресурса, выделяемая на частную деятельность). В нашей модели $r_i - u_i(t)$ – это инвестиции в наращивание промысловых усилий, тогда доля вылова рыбы i-м предприятием вычисляется как некоторая функция промыслового усилия $v_i(t) = h_i(r_i - u_i(t))$. Без существенного ограничения общности положим $v_i(t) = k_i(r_i - u_i(t))^{p_i}, 0 < p_i < 1$. Величина $u_i(t)$ – ассигнования в повышение экологичности промысла и рыборазведение.

Модель (1)–(3) представляет собой дифференциальную игру N лиц, в которой условия УР учтены с помощью штрафов в целевых функционалах. Наряду с моделью (1)–(3) рассмотрим также ее упрощенную (линейную по состоянию) версию

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}[ak_i(r_i - u_i(t))^{p_i} P(t) - s_i(t)M(P^* - P(t))]dt - \\ - s_i(T)M(P^* - P(T)) \to \max. \qquad (4)$$

В этом случае под P^* понимается пороговое значение биомассы рыбной популяции, превышение которого выгодно ведущему. Поэтому при превышении он поощряет ведомых и, наоборот, накладывает на них штраф, если численность рыбной популяции меньше значения P^*. Рассмотрим два вида уравнения динамики (3): линейное по состоянию [7]

$$\frac{dP}{dt} = [\varepsilon + \alpha(\sum_i u_i(t))^{\gamma} - \sum_i \alpha_i (r_i - u_i(t))^{\gamma_i}]P(t), \quad P(0) = P_0, \quad i = 1,...,N, \qquad (5)$$

и нелинейное (на основе модели Ферхюльста-Пирла)

$$\frac{dP}{dt} = [\varepsilon - \beta P(t) + \alpha(\sum_i u_i(t))^{\gamma} - \sum_i \alpha_i (r_i - u_i(t))^{\gamma_i}]P(t), \quad P(0) = P_0, \quad i = 1,...,N. \qquad (6)$$

Задачи (1), (6) и (4), (5) рассматриваются с ограничениями на управления (2). В (6) ε – коэффициент естественного прироста рыбной популяции, β – коэффициент самолимитирования. Задача (4), (5) – линейная по состоянию, а (1), (6) – нелинейная. Переменные $s(t)=\left\{s_i(t)\right\}_{i=1}^{N}\in S$ естественно трактовать как экономические управления (управления побуждения) государственного контрольного органа верхнего уровня (например, службы рыбного хозяйства) такие, что

$$0\le s_i(t)\le 1,\quad \sum_{i=1}^{N} s_i=1;\quad t\ge 0,\quad i=1,...,N. \tag{7}$$

Контрольный орган может использовать и административное управление (принуждение) $q(t)=\{q_i(t)\}_{i=1}^{N}\in Q=\{0\le q_i(t)\le r_i, t\ge 0\}$, выбирая переменные $q_i(t)$ из условия

$$0\le q_i(t)\le r_i,\quad t\ge 0,\quad i=1,...,N. \tag{8}$$

В динамических СОЧИ-моделях считается, что интересы органа управления верхнего уровня описываются стремлением к максимизации функционала (утилитаристской функции общественного благосостояния)

$$J=\sum_{i=1}^{N} J_i\to \max. \tag{9}$$

Тогда модель (1), (2), (6)–(9) или ее упрощенная версия (2), (4), (5), (7)–(9) представляют собой иерархическую дифференциальную игру органа управления верхнего уровня (ведущего) с несколькими активными агентами нижнего уровня (ведомыми). Примем следующие предположения относительно информационного регламента такой игры: все игроки используют программные стратегии; ведущий выбирает и сообщает ведомым экономические (7) либо административные управления (8), которые могут быть только функциями времени (игры Штакельберга) либо зависеть также от управлений ведомых (игры Гермейера); при известных стратегиях ведущего ведомые одновременно и независимо выбирают свои стратегии, что приводит к равновесию Нэша в игре ведомых. В сделанных предположениях возможны четыре информационных регламента иерархических дифференциальных игр, показанных в табл.1.

Таблица 1. Информационные регламенты рассматриваемых игр.

	Игра Штакельберга (ST)	Игра Гермейера (GER)
Принуждение (COMP)	$q_i = q_i(t); \quad J^* = J_{NE}^{COMP-ST}$	$q_i = q_i(t, u(t)); \quad J^* = J_{NE}^{COMP-GER}$
Побуждение (IMP)	$s_i = s_i(t); \quad J^* = J_{NE}^{IMP-ST}$	$s_i = s_i(t, u(t)); \quad J^* = J_{NE}^{IMP-GER}$

Решения указанных игр определяются на основе принципа гарантированного результата Ю.Б. Гермейера [9]. Обозначения для выигрышей ведущего J^* показаны в табл.1. В случае принуждения они определяются следующим образом:

$$J_{NE}^{COMP-ST} = \sup_{q \in Q} \inf_{u \in NE(q)} J(q, u), \tag{10}$$

$$J_{NE}^{COMP-GER} = \sup_{\tilde{q} \in \tilde{Q}} \inf_{u \in NE(\tilde{q})} J(\pi(\tilde{q}, u)), \tag{11}$$

$\tilde{Q} = \{\tilde{q} : U \to Q\}$, $\pi : \tilde{Q} \times U \to Q \times U$, $NE(q)$ – множество равновесий Нэша в игре ведомых при известном наборе управлений $q = (q_1, ..., q_N)$. Решения для побуждения задаются аналогично. Предполагается, что множество равновесий Нэша не пусто. Определим также индексы системной согласованности

$$\begin{gathered} K_{NE}^{COMP-ST} = J_{NE}^{COMP-ST} / J_{\max}^{COMP-ST}, \\ K_{NE}^{COMP-GER} = J_{NE}^{COMP-GER} / J_{\max}^{COMP-GER}, \\ K_{NE}^{IMP-ST} = J_{NE}^{IMP-ST} / J_{\max}^{IMP-ST}, \\ K_{NE}^{IMP-GER} = J_{NE}^{IMP-GER} / J_{\max}^{IMP-GER}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $J_{\max}^{(\cdot)}$ – выигрыш ведущего в соответствующей игре в случае, когда все ведомые тоже максимизируют (9). Обозначим в общем случае $K = J / J_{\max}$, где знаменатель – глобальный максимум *J*, числитель – наихудшее значение *J* на множестве равновесий Нэша. Всегда $J \le J_{\max}$. Тогда возможные случаи и соответствующая оценка степени согласованности приведены в табл.2.

Таблица 2. Оценка степени согласованности.

	$J>0$	$J<0$
$J_{max}>0$	$0<K<1$ Чем ближе к 1, тем лучше	невозможно
$J_{max}<0$	$K<0$ Чем ближе к нулю, тем лучше	$K>1$ Чем ближе к 1, тем лучше

Приведем алгоритмы построения равновесий для предложенных моделей при разных информационных регламентах.

Алгоритм построения равновесия в игре Штакельберга при побуждении (принуждении) состоит в следующем [3].

1. Ведущий игрок (контрольный государственный орган) выбирает программную стратегию вида

$$s(t) = \{s_i(t)\}_{i=1}^{N} \in \\ \in S = \{s_i(t) \ge 0;\ i = 1,\dots,N;\ s_1(t) + \dots + s_N(t) = 1,\ t \ge 0\} \quad \text{(при побуждении)}$$

или

$$q(t) = \{q_i(t)\}_{i=1}^{N} \in Q = \{0 \le q_i(t) \le r_i,\ i = 1,\dots,N;\ \ t \ge 0\} \quad \text{(при принуждении)}$$

и сообщает ее остальным игрокам.

2. Зная выбранную Ведущим игроком стратегию, остальные игроки разыгрывают между собой дифференциальную игру $\{(1), (6), (2)\}$ или $\{(4), (5), (2)\}$, решением которой служит равновесие Нэша $NE(w(\cdot))$, где при побуждении $w(\cdot) = s(\cdot)$, а при принуждении – $w(\cdot) = q(\cdot)$.

3. Ведущий игрок выбирает свою программную стратегию таким образом, чтобы максимизировать свой выигрыш (9) на множестве равновесий Нэша $NE(w(\cdot))$ с учетом (7) при побуждении и (8) при принуждении.

Алгоритм построения равновесия в игре Гермейера при побуждении (принуждении) состоит в следующем [3].

1) Ведущий игрок определяет стратегии наказания Ведомых, если они отказываются с ним сотрудничать. Для этого в ходе дифференциальной игры $\{(1), (6), (2)\}$ или $\{(4), (5), (2)\}$ находятся равновесия Нэша в зависимости от управлений Ведущего – $NE(w(\cdot))$, где при побуждении $w(\cdot) = s(\cdot)$, а при принуждении – $w(\cdot) = q(\cdot)$.

Допустим, что равновесий Нэша при фиксированном управлении Ведущего $w(t)$ есть L_w штук. Обозначим их через

$$(u_i^{NE}(t))_k = (u_i^{NE}(w(t),t))_k;\ i = 1,\dots,N;\ k = 1,2,\dots,L_w \quad \text{и} \quad u_k^{NE}(t) = \left\{(u_i^{NE}(t))_k\right\}_{i=1}^{N}.$$

Вводится стратегия наказания Ведомого Ведущим

$$w^P(t) = \left\{w_i^P(t)\right\}_{i=1}^{N}:\ w_i^P(t) = \arg \min_{w(t) \in W} \max_{1 \le k \le L_w} J_i((u_i^{NE})_k(t), x(t));\ i = 1,\dots,N.$$

Находятся величины максимальных выигрышей Ведомых, если они отказываются сотрудничать с Ведущим и он применяет стратегию наказания:

$$(L_F)_i = \min_{w(t)\in W} \max_{1\le k\le L_w} J_i((u_i^{NE})_k(t), x(t)); \quad i=1,..,N.$$

2) Решается задача оптимального управления (9), (6)–(8), (2) или (9), (5), (2), (7), (8) с дополнительными условиями $(L_F)_i < J_i(u_i(t), x(t))$; i=1,...,N. Максимум (9) ищется по 2N функциям $w_i(t), u_i(t); \ i=1,..,N$ с учетом (7) при побуждении и (8) при принуждении. Решение указанной задачи оптимального управления обозначим $\{w_i^R(t),\ u_i^R(t)\}_{i=1}^N$, где $w_i^R(t)$ – стратегия поощрения i-го Ведомого Ведущим.

3) Ведущий предъявляет Ведомым стратегию с обратной связью

$$w_i(t) = \begin{cases} w_i^R(t), & \text{если } u_i(t) = u_i^R(t) \text{ для } \forall\ t\in[0,\infty), \\ w_i^P(t), & \text{иначе.} \end{cases}$$

4) При экономически разумных Ведомых равновесие имеет вид

$\{w_i^R(t),\ u_i^R(t)\}_{i=1}^N$.

В случае входных данных общего вида решение иерархических игр для информационных регламентов, указанных в табл.1, ищется с помощью имитационного моделирования по методу сценариев.

Алгоритм имитационного моделирования по методу сценариев при построении равновесия Штакельберга при побуждении (принуждении) состоит в следующем.

1. Задать множества сценариев ведущего $W_M = \{w^{(1)}(\cdot),...,w^{(M)}(\cdot)\}$, где $w^{(m)}(\cdot) = \left\{w_i^{(m)}\right\}_{i=1}^N \in W$, $m=1,...,M$ (при побуждении $W=S$, а при принуждении – $W=Q$) и ведомых игроков – $U_D = \{u_i^{(1)}(\cdot),...,u_i^{(D)}(\cdot)\}_{i=1}^N$.

2. При известном $w^{(m)}(\cdot)\in W_M$ в результате перебора для каждого ведомого его множества сценариев U_D найти равновесия Нэша $NE(w^{(m)}(\cdot))$. Допустим, что равновесий Нэша при фиксированном управлении Ведущего $w^{(m)}(\cdot)\in W_M$ – L_w штук.

3. Вычислить выигрыш ведущего

$$\min_{1\le k\le L_w} J^{ST}(w^{(m)}(\cdot), u_k^{NE(w^{(m)}(\cdot))}, x^{NE(w^{(m)}(\cdot))}) \quad \text{для всех} \quad m=1,...,M.$$

4. Найти

$$w^*(\cdot)\in W_M : J^{ST}(w^*(\cdot),u^{NE(w^*(\cdot))},x^{NE(w^*(\cdot))}) =$$

$$= \max_{1\le m\le M}\ \min_{1\le k\le L_w} J^{ST}(w^{(m)}(\cdot),u_k^{NE(w^{(m)}(\cdot)},x^{NE(w^{(m)}(\cdot))}).$$

5. Равновесие имеет вид $(w^*(\cdot),u^{NE(w^*(\cdot))}(\cdot))$.

Алгоритм имитационного моделирования по методу сценариев при построении равновесия Гермейера при побуждении (принуждении) состоит в следующем.

1. Задать множества сценариев ведущего $W_M=\{w^{(1)}(\cdot),...,w^{(M)}(\cdot)\}$, где $w^{(m)}(\cdot)=\left\{w_i^{(m)}\right\}_{i=1}^{N}\in W$, $m=1,...,M$ (при побуждении $W=S$, а при принуждении – $W=Q$) и ведомых игроков – $U_D=\{u_i^{(1)}(\cdot),...,u_i^{(D)}(\cdot)\}_{i=1}^{N}$.

2. Для всех $w^{(m)}(\cdot), m=1,...,M$, путем перебора множеств сценариев U_D вычислить $NE(w^{(m)}(\cdot))$. Допустим, что равновесий Нэша при фиксированном управлении Ведущего $w^{(m)}(\cdot)$ имеется L_w.

Путем перебора стратегий $w^{(m)}(\cdot)\ (m=1,...,M)$ определить стратегии наказания Ведомых Ведущим $w^P(t)=\{w_i^P(t)\}_{i=1}^{N}\in W_M$:

$$w_i^P(t)=\arg\min_{1\le m\le M}\ \max_{1\le k\le L_w} J_i((u_i^{NE(w^{(m)}(\cdot))})_k(t),x^{NE(w^{(m)}(\cdot))}(t));\ i=1,...,N.$$

Находится гарантированный выигрыш Ведомых, если они отказываются сотрудничать с Ведущим и он применяет стратегию наказания:

$$(L_F)_i=\min_{1\le m\le M}\ \max_{1\le k\le L_w} J_i((u_i^{NE(w^{(m)}(\cdot))})_k(t),x^{NE(w^{(m)}(\cdot))}(t));\ i=1,..,N.$$

3. Для каждого $w^{(m)}(\cdot)(m=1,...,M)$ в результате перебора множеств сценариев каждого ведомого $u_i^{(d)}\ (i=1,...,N; d=1,...,D)$ находится наибольшее значение (9) с учетом (5) или (6) с дополнительными условиями $(L_F)_i<$ $<J_i(u_i^d(t),x(t)); i=1,...,N$ и (7) или (8). Управления ведомого, доставляющие максимум, обозначим $\{u_i^R(w^{(m)}(t))\}_{i=1}^{N}; m=1,...,M$. Отсюда выбирается пара $(w^{(m_0)}(t),u^R(w^{(m_0)}(t))$, доставляющая (9) максимум по m. Уравнение (5) или (6) при этом решается численно, например, методом конечных разностей.

4. Равновесие имеет вид $(w^{(m_0)}(t),u^R(w^{(m_0)}(t)))$.

3. Численное исследование модели с учетом требований устойчивого развития

При численном исследовании задачи управляющие воздействия задаются по сценариям вида $w_i(t) = w_i, \forall t \geq 0$. В качестве сценариев для субъекта управления верхнего уровня при побуждении в играх Штакельберга и Гермейера берется следующий набор стратегий: равномерный штраф всех ведомых или штраф только одного ведомого, остальные в этом случае не штрафуются. Всего получается $N+1$ сценарий: $\forall i\, s_1 = 1/N$ или $\exists j : s_j = 1$, $s_i = 0, i \neq j$. При принуждении для Ведущего рассмотрено три варианта сценариев: $\forall i\, q_i(t) \equiv 0$ или $q_i(t) \equiv r_i$, или $q_i(t) \equiv r_i / 2; i = 1,2,...,N$. Для каждого ведомого предусматривается три возможных сценария: $u_i = 0$, или $u_i = r_i$, или $u_i = r_i / 2$. Всего 27 сценариев поведения всех ведомых. Представляется, что этот небольшой набор сценариев дает вполне представительную характеристику качественно различных стратегий [1].

Следует отметить, что в ряде работ по теоретико-игровому моделированию эксплуатации биоресурсов [13-15] при расчетах используются условные иллюстративные данные. Мы поступаем так же.

Дальнейшие расчеты проводились для моделей {(1), (6), (2)} или {(4), (5), (2)}. Исследовались игры Штакельберга и Гермейера в линейном и нелинейном случаях для побуждения ($q_i = 0; i = 1,2,3$) и принуждения ($s_i = 1/3$; $i = 1,2,3$). Входные параметры при численных расчетах брались в следующем виде.

В примере 1 $\rho = 0.005\,\text{сут}^{-1}$; $T = 3 \cdot 365\,\text{сут}$; $N = 3$; $a = 20\,\text{руб/ед.}$; $k_1 = k_2 = k_3 = 0.000065\,\text{сут}^{-1}$; $p = p_1 = p_2 = p_3 = 0.1$; $\gamma = 0.000008\dfrac{\text{сут}^{-1}}{\text{тыс.ед.}}$; $r_1 = 5$; $r_2 = 10$; $r_3 = 20$; $P^* = 100\,\text{тыс.ед.}$; $P(0) = 120\,\text{тыс.ед.}$; $M = 0.001\dfrac{\text{руб.}}{\text{сут.ед.}}$; $k = 0.00065\,\text{сут}^{-1}$; $\varepsilon = 0.0007\,\text{сут}^{-1}$; $\beta = 0.7r / P(0)$ (сут – сутки; руб – рубли; ед. – единица биомассы; тыс. – тысяча). В остальных примерах расчеты проводились для входных данных примера 1 и $M = 0.0001\dfrac{\text{руб}}{\text{сут.ед.}}$ и $M = 0.007\dfrac{\text{руб}}{\text{сут.ед.}}$ (примеры 2,3); $p_1 = p_2 = p_3 = 0.5$ и $p_1 = p_2 = p_3 = 0.9$ (примеры 4, 5); $p = 0.5$ и $p = 0.9$ (примеры 6, 7); $P(0) = 100\,\text{тыс.ед.}$ и $P(0) = 80\,\text{тыс.ед.}$ (примеры 8, 9); $\beta = 2\dfrac{\text{руб}}{\text{ед.}}$, $\beta = 0.1\dfrac{\text{руб}}{\text{ед.}}$ и $\beta = 0\dfrac{\text{руб}}{\text{ед.}}$ (примеры 10 – 12).

В табл.3-6 приведены результаты расчетов для указанных входных данных (примеры 1 – 12). Результаты приведены в виде f/g, где f – результат при побуждении, а g – при принуждении.

Таблица 3. Результаты счета в случае побуждения $(A = IMP)$ /принуждения $(A = COMP)$ для линейной по состоянию модели (игра Штакельберга).

	J_1^{A-ST} (т.р.)	J_2^{A-ST} (т.р.)	J_3^{A-ST} (т.р.)	J_{NE}^{A-ST} (т.р.)	$J_{\max}^{A-ST}$ (т.р.)	K_{NE}^{A-ST}
1	2355/2753	2355/2915	4069/3089	8779/8758	8900	0.99/0.98
2	2175/2219	2632/ 2543	2678/2722	7485/7485	7625	0.98/0.98
3	5687/5743	5857/5905	5657/6079	17402/17728	17728	0.98/1
4	3083/3083	4381/4381	6216/6216	13681/13681	15343	0.89/089
5	3043/3043	6129/6129	11888/11888	21061/21061	23219	0.91/0.91
6	4558/4558	4794/4794	5046/5046	14400/14400	14400	1/1
7	47192/103010	50579/103010	104015/103010	201788/309031	309031	0.65/1
8	1963/2092	1963/2226	2782/2374	6708/6690	6809	0.99/0.98
9	1570/1430	1570/1536	1496/1651	4636/4622	4717	0.98/0.98

Таблица 4. Результаты счета в случае побуждения $(A = IMP)$ /принуждения $(A = COMP)$ для нелинейной по состоянию модели (игра Штакельберга).

	J_1^{A-ST} (т.р.)	J_2^{A-ST} (т.р.)	J_3^{A-ST} (т.р.)	J_{NE}^{A-ST} (т.р.)	$J_{\max}^{A-ST}$ (т.р.)	K_{NE}^{A-ST}
1	402/402	536/536	680/680	1 618/1618	1 618	1/1
2	1727/1727	1864/1864	2006/2006	5597/5597	5597	1/1
3	–8440/–8440	–8305/–8305	–8161/–8161	–24907/–24907	–24 907	1/1
4	–1002/2301	4744/3746	6709/3746	10450/9793	10450	1/0.94
5	5951/–1599	11106/965	–6502/5749	10555/5114	11825	0.89/0.43
6	402/402	536/536	680/680	1618/1618	1618	1/1
7	402/402	536/536	680/680	1618/1618	1618	1/1
8	1376/1376	1505/1505	1505/1505	4388/4388	5091	0.86/0.86
9	1523/–1377	1632/–1279	–5507/–1174	–2352/–3830	–2006	1.17/1.91
10	1870/479	–2160/613	2004/613	1706/1706	2294	0.74/0.74
11	–1655/–1655	–1512/–1512	–1357/–1357	–4524/–4524	–4524	1/1
12	–2257/–2257	–2109/–2109	–1952/–1952	–6318/–6318	–6318	1/1

Во всех примерах оптимальные стратегии предприятий и контролирующего органа зависят от выбранного метода управления и реализуемого информационного регламента. Так, в примере 1 в игре Штакельберга в линейном случае оптимальные стратегии игроков имеют вид $u_1^* = u_3^* \equiv 0;$ $u_2^* \equiv$

$\equiv 5 \, \forall t \in [0,T]$; $s_1^* = s_3^* \equiv 0$; $s_2^* \equiv 1$ (побуждение) и $u_1^* = q_1^* \equiv 2.5$; $u_2^* = q_2^* \equiv 5$; $u_3^* = q_3^* \equiv 10$ (принуждение); в нелинейном случае $u_1^* = u_3^* = u_2^* \equiv 0$; $s_1^* = s_3^* = {}$ $= s_2^* \equiv 1/3$ (побуждение) и $u_1^* = q_1^* = u_2^* = q_2^* = u_3^* = q_3^* \equiv 0$ (принуждение); в игре Гермейера в линейном случае – $u_1^* = u_2^* \equiv 0$; $u_3^* \equiv 10$; $s_1^* = s_2^* \equiv 0$; $s_3^* \equiv 1$ (побуждение), и $u_1^* = q_1^* = u_2^* = q_2^* \equiv 0$; $u_3^* \equiv 10$; $q_3^* \equiv 0$ (принуждение); в нелинейном случае – $u_1^* = u_2^* = u_3^* \equiv 0$; $s_1^* = s_2^* = 0$; $s_3^* \equiv 1$ (побуждение) и $u_1^* = q_1^* = {}$ $= u_2^* = q_2^* = q_3^* \equiv 0$; $u_3^* \equiv 10$ (принуждение).

Таблица 5. Результаты счета в случае побуждения $(A = IMP)$ /принуждения $(A = COMP)$ для линейной по состоянию модели (игра Гермейера).

	J_1^{A-ST} (т.р.)	J_2^{A-ST} (т.р.)	J_3^{A-ST} (т.р.)	J_{NE}^{A-ST} (т.р.)	$J_{\max}^{A-ST}$ (т.р.)	$J_{\max}^{A-ST}$ (т.р.)
1	2381/2853	2551/3024	3968/3023	8900/8900	8900	1/1
2	2255/2428	2417/2598	2740/2598	7413/7625	7625	0.97/1
3	5743/5743	5905/5905	6079/6079	17728/17728	17728	1/1
4	3084/2698	4381/5261	6217/7384	13682/15343	15343	0.89/1
5	2225/1821	6536/7343	14458/14054	23219/23219	23219	1/1
6	4558/4558	4795/4795	5047/5047	14400/14400	14400	1/1
7	103010/103010	103010/103010	103011/103011	309031/309031	309031	1/1
8	2175/2175	2317/2317	2317/2317	6809/6809	6809	1/1
9	1587/1497	1429/1610	1701/1610	4717/4717	4717	1/1

Таблица 6. Результаты счета в случае побуждения $(A = IMP)$ /принуждения $(A = COMP)$ для нелинейной по состоянию модели (игра Гермейера).

	J_1^{A-ST} (т.р.)	J_2^{A-ST} (т.р.)	J_3^{A-ST} (т.р.)	J_{NE}^{A-ST} (т.р.)	$J_{\max}^{A-ST}$ (т.р.)	K_{NE}^{A-ST}
1	1875/401	2009/536	–2266/680	1618/1618	1618	1/1
2	1727/1727	1863/1863	2007/2007	5597/5597	5597	1/1
3	–29071/-8441	2009/-8305	2154/–8161	–24907/–24907	–24 907	1/1
4	1247/1247	3619/3619	5584/5584	10450/10450	10450	1/1
5	3407/2258	–3446/10715	11864/–1148	11825/11825	11825	1/1
6	1875/402	2009/536	–2266/680	1618/1618	1618	1/1
7	1875/402	2009/536	–2266/680	1618/1618	1618	1/1
8	1488/1488	1733/1733	1870/1870	5091/5091	5091	1/1
9	1436/–1306	–3443/402	0/–1306	–2006/–2210	–2006	1/1.1
10	547/547	893/893	944/944	2294/2294	2294	1/1
11	2011/–1655	2156/–1513	–8691/–1356	–4524/–4524	–4524	1/1
12	–2255/–2255	–2109/–2109	–1953/–1953	–6318/–6318	–6318	1/1

В примерах 1–3 численность рыбной популяции растет в линейном случае ($P(T)$ = 160 тыс.ед.) и падает в нелинейном ($P(T)$ = 100 тыс.ед.) независимо от информационного регламента и выбранного метода управления; в примерах 4, 5 – падает (в примерах 4, 5 в нелинейном случае – $P(T)$ = 88 тыс.ед.; в примере 4 в линейном – 102 тыс.ед. при принуждении в игре Гермейера и 75 тыс.ед. – в остальных случаях; в примере 5 в линейном случае – до 32 тыс.ед.); в примерах 6–8 – в линейном случае значительно растет до 323 тыс.ед., 52142 тыс.ед. и 132 тыс.ед. соответственно, а в нелинейном – падает до 100 тыс.ед.; в примерах 9, 10 – колеблется в районе 100 тыс.ед., а в примерах 11,12 – в районе 117 тыс.ед.

4. Заключение

На основе проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. В СОЧИ-постановке в силу сонаправленности интересов ведущего и ведомых для достаточно широкого класса входных данных интересы субъектов согласованы, индекс системной согласованности близок к единице и необходимость в иерархическом управлении отсутствует. Изменение входных параметров модели в большинстве случаев незначительно влияет на степень системной согласованности системы управления (индекс системной согласованности колеблется от 0.89 до 1).

2. При реализации информационного регламента игры Гермейера модель системно согласована для широкого класса входных функций (индекс системной согласованности равен 1).

3. Тем не менее имеются наборы входных параметров модели, для которых система при разных информационных регламентах как в линейном, так и в нелинейном случаях становится менее согласованной (индекс системной согласованности становится меньше 0.7 в играх Штакельберга – пример 7 линейная модель, пример 5 – нелинейная; и меньше 0.9 в играх Гермейера – пример 4).

4. Важно отметить, что выбор метода иерархического управления (принуждение или побуждение), который был бы наиболее эффективным при управлении, зависит от входных параметров модели. В отдельных случаях больший доход субъектам и лучшую согласованность обеспечивает принуждение, в других случаях – побуждение.

5. Реализация информационного регламента игры Гермейера приносит всем субъектам управления не меньший (а во многих случаях существенно больший) суммарный доход, чем использование регламента игры Штакельберга.

6. В нелинейной модели доходы субъектов падают по сравнению с их доходами в линейном случае для всех входных данных. Это связано с поощрением роста численности рыбной популяции сверх оптимального значения P^* в линейном случае.

7. В нелинейном случае система для большинства входных данных лучше согласована, чем в линейном (индекс системной согласованности близок к единице для весьма широкого класса входных данных). Хотя имеются примеры входных данных (пример 8), когда линейная модель лучше согласована, чем нелинейная.

8. С ростом коэффициента самолимитирования β, характеризующего нелинейность по состоянию уравнения динамики, согласованность системы в игре Штакельберга падает, а в игре Гермейера практически не меняется.

9. С ростом коэффициента штрафа M доход всех субъектов в нелинейном случае при любых входных данных резко падает, а в линейном, когда поощряется увеличение численности рыбной популяции сверх оптимального значения P^*, при значительной начальной численности популяции P_0 – резко растет.

10. С ростом показателей степенной функции промыслового усилия p_i $(i = 1, 2, ..., N)$ (приближении к единице) доход всех субъектов возрастает.

11. С ростом показателя p из уравнения динамики (приближении к единице) доход всех субъектов возрастает в линейном случае и практически не меняется в нелинейном независимо от реализуемого информационного регламента.

12. В нелинейном случае для достаточно широкого класса входных данных игры Штакельберга и Гермейера приносят убытки всем субъектам управления. Это связано с необходимостью поддержания численности рыбной популяции вблизи оптимального значения, что не всегда возможно.

В дальнейшем предполагается исследовать модель для случая, когда функционал выигрыша ведущего не равен сумме выигрышей ведомых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Г.А. Угольницкий.* Управление устойчивым развитием активных систем. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016, 940 с.;
G.A. Ugol'nitsckii. Upravlenie ustoichivym razvitiem aktivnykh sistem. – Rostov-na-Donu: Izdatelstvo Iuzhnogo Federalnogo Universiteta, 2016, 940 s.
2. *G.A. Ougolnitsky.* Game theoretic formalization of the concept of sustainable development in the hierarchical control systems // Annals of Operations Research, 2014, № 220 (1), p.69-86.

3. *Г.А. Угольницкий, А.Б. Усов.* Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика, 2014, №6, с.86-102;
   G.A. Ugol'nitskii, A.B. Usov. Equilibria in models of hierarchically organized dynamic systems with regard to sustainable development conditions // Automation and Remote Control, 2014, №75:6, p.1055-1068.
4. *С. Дэмбэрэл, Н.Н. Оленев, И.Г. Поспелов.* К математической модели взаимодействия экономических и экологических процессов // Математическое моделирование, 2003, т.15, №4, с.107;
   S. Demberel, N.N. Olenev, I.G. Pospelov. K matematicheskoi modeli vzaimodeistviia ekonomicheskikh i ekologicheskikh protsessov // Matematicheskoe modelirovanie, 2003, t.15, №4, s.107.
5. *А.В. Никитина, А.И. Сухинов, Г.А. Угольницкий и др.* Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование, 2016, т.28, №7, с.96-106.;
   A.V. Nikitina, A.I. Suchinov, G.A. Ugolnitsky. et al. Optimal control of sustainable development in the biological rehabilitation of the Azov Sea // Mathematical Models and Computer Simulations, 2017, v.9, №1, p.101-107.
6. *А.В. Никитина, М.В. Пучкин, И.С. Семенов, А.И. Сухинов и др.* Дифференциально-игровая модель предотвращения заморов в мелководных водоемах // Управление большими системами, 2015, вып. 55, с. 343-361;
   A.V. Nikitina, M.V. Puchkin, I.S. Semenov i dr. Differencialno-igrovaia model predotvrashcheniia zamorov v melkovodnykh vodoemakh // Upravlenie bolshimi sistemami, 2015, vyp.55, s.343-361.
7. *E.J. Dockner, S. Jorgensen, N.V. Long, G. Sorger.* Differential Games in Economics and Management Science. – Cambridge University Press, 2000, 396 p.
8. *Ю.Б. Гермейер, И.А. Ватель*. Игры с иерархическим вектором интересов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, №3, с.54-69;
   Iu.B. Germeier, I.A. Vatel. Igry s ierarkhicheskim vektorom interesov // Izvestiia AN SSSR. Tekhnicheskaia kibernetika, 1974, №3, s.54-69.
9. *В.Н. Бурков, В.И. Опойцев.* Метаигровой подход к управлению иерархическими системами // Автоматика и телемеханика, 1974, №1, с.103-114;
   V.N. Burkov, V.I. Opoitsev. Metaigrovoi podkhod k upravleniiu ierarhicheskimi sistemami // Avtomatika i telemekhanika, 1974, №1, s.103-114.
10. *В.А. Горелик, М.А. Горелов, А.Ф. Кононенко.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991, 287 с.;
    V.A. Gorelik, M.A. Gorelov, A.F. Kononenko. Analiz konfliktnykh situatsii v sistemakh upravleniia. – M.: Radio i sviaz, 1991, 287 s.
11. Algorithmic Game Theory / Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. – Cambridge University Press, 2007, 754 p.
12. *Г.А. Угольницкий, А.Б. Усов.* Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации // Автоматика и телемеханика, 2013, №2, с.109-122;
    G.A. Ugol'nitskii, A.B. Usov. A study of differential models for hierarchical control systems via their discretization // Automation and Remote Control, 2013, № 74:2, p.252-263.

13. *А.Н. Реттиева*. Задача управления биоресурсами с асимметричными игроками // Математическая теория игр и ее приложения, 2013, №5(3), с.72-87;
A.N. Rettieva. Zadacha upravleniia bioresursami s asimmetrichnymi igrokami // Matematicheskaia teoriia igr i ee prilozheniia, 2013, №5(3), s.72-87.
14. *В.В. Мазалов, А.Н. Реттиева*. Асимметрия в кооперативной задаче управления биоресурсами // Управление большими системами, 2015, вып.55, с.280-325;
V.V. Mazalov, A.N. Rettieva. Asimmetriia v kooperativnoi zadache upravleniia bioresursami // Upravlenie bolshimi sistemami, 2015, vyp.55, s.280-325.
15. *Н.С. Иванко, А.И. Абакумов*. Задачи управления рыбным промыслом в условиях квотирования // Управление большими системами, 2015, вып.55, с.224-238.
N.S. Ivanko, A.I. Abakumov. Zadachi upravleniia rybnym promyslom v usloviiakh kvotirovaniia // Upravlenie bolshimi sistemami, 2015, vyp.55, 2015, s.224-238.

Поступила в редакцию 05.02.19
После доработки 05.02.19
Принята к публикации 08.04.19