

Памяти И.В. Фрязинова

О МОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

© 2019 г. *И.В. Попов*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва
popov@imamod.ru, piv2964@mail.ru

DOI: 10.1134/S0234087919080021

Предлагается подход к построению монотонных разностных схем для решения простейших уравнений эллиптического и параболического типа с первыми производными и малым параметром при старшей производной. Для этого вводится понятие адаптивной искусственной вязкости. С его помощью строятся монотонные схемы аппроксимацией потока $O(h^4)$ для задачи с пограничным слоем и $O(\tau^2 + h^2)$ для уравнений Бюргерса, где h и τ – шаги сетки по пространству и времени. Вне области больших градиентов используется аппроксимация Самарско-Голанта (либо схемы с направленными разностями). Отмечена важность использования схем второго порядка по времени. Приводятся результаты расчётов.

Ключевые слова: разностная схема, монотонные схемы, адаптивная искусственная вязкость, схемная вязкость.

In memory of I.V. Fryazinov

ON MONOTONIC DIFFERENTIAL SCHEMES

I.V. Popov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow
National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute)

Method of construction of monotonic differential schemes for solving the simplest partial differential equations of elliptic and parabolic types with first derivatives and a small parameter at highest derivative is suggested. For this, the concept of adaptive artificial viscosity (AAV) is introduced. The AAV was used for construction of monotonic differential schemes of the approximation order $O(h^4)$ for the problem with boundary layer and $O(\tau^2 + h^2)$ for Burgers equation, where h and τ are mesh steps in space and time correspondingly. Samarsky-Golant approximation schemes (or schemes with ordered differences) are used out of the domains of large gradients. Importance of usage of second order time schemes is outlined. Numerical results are presented.

Key words: finite difference scheme, monotone schemes, adaptive artificial viscosity.

Введение

Хорошо известно, что разностные схемы, коэффициенты которых не удовлетворяют условиям принципа максимума, могут давать немонотонные решения. Их немонотонность имеет сеточную природу. Чтобы избежать немонотонности, в сеточные уравнения вводят искусственную дополнительную вязкость (теплопроводность). Известны искусственные вязкости, монотонизирующие решения сеточных уравнений: приводящие к схемам с направленными разностями, аппроксимации Самарского–Голанта [1, 2] и экспоненциальные схемы Ильина [3].

Будем рассматривать простейшие одномерные задачи для уравнений эллиптического и параболического типов (задачи для уравнений с пограничным слоем и бегущей волной, где играет роль вязкость ν)

$$\operatorname{div} \mathbf{W} + f = 0, \quad u_t = \operatorname{div} \mathbf{W} + f.$$

Здесь $\mathbf{W} = \nu \operatorname{grad} u - Vu$ – поток, ν – вязкость (малый параметр), V – функция или вектор скорости. К этим уравнениям добавим соответствующие граничные условия.

При построении разностной схемы для ячейки сетки записывается уравнение баланса. Строятся разностные схемы

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h \mathbf{W}_h(y) + f_h &= 0, \\ y_{\bar{t}}^{j+1} &= 0.5 \left[(\operatorname{div}_h \mathbf{W}_h(y) + f_h)^{j+1} + (\operatorname{div}_h \mathbf{W}_h(y) + f_h)^j \right]. \end{aligned}$$

Здесь и ниже div_h и grad_h – сеточные аналоги операторов дивергенции и градиента, $\mathbf{W}_h(y) = \nu \operatorname{grad}_h y - V \cdot \bar{y}$, $y_{\bar{t}}^{j+1} = (y^{j+1} - y^j) / \tau$ – сеточные аналоги потока и производной по времени, $\bar{y} = y_{i+1/2} = (y_{i+1} + y_i) / 2$ – аппроксимация функции u в точках определения потока, τ – шаг сетки по времени, индекс j соответствует моменту времени $t_j = \tau \cdot j$.

Введём ошибку $z = y - u$ и подставим $y = z + u$ в сеточные уравнения. Получим уравнения для ошибки z , в которые будет входить погрешность аппроксимации

$$\psi = \psi_* + \operatorname{div}_h \mu.$$

Здесь ψ_* – погрешности аппроксимации правых частей, производной по времени и μ – аппроксимация потока. Ошибка решения z определяется этими двумя величинами.

Задача состоит в отыскании монотонных аппроксимаций с малыми ψ_* и μ . Пусть оказалось возможным каким-то образом установить равенство

$$\mathbf{W}_{h\ i+1/2}(u) = v \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - V_{i+1/2} \frac{u_{i+1} + u_i}{2} = (v_s \operatorname{grad} u - Vu)_{i+1/2},$$

где v_s – некоторая новая вязкость, которую назовём схемной вязкостью и запишем в виде $v_s = v(1 + \kappa_s)$, κ_s – малая поправка, $\kappa_s \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, h – пространственный шаг сетки. Также пусть

$$v \operatorname{grad}_h u = v_g \operatorname{grad} u$$

или

$$v \operatorname{grad}_h u = v \operatorname{grad} u + \rho(h),$$

где $v_g = v(1 + \kappa_g)$, κ_g и ρ – поправки, стремящиеся к нулю при $h \rightarrow 0$. Последнее равенство естественно. Если величины κ_s, κ_g известны точно или с некоторой точностью, то можно изменить исходную аппроксимацию, вводя в поток \mathbf{W}_h поправку $\tilde{\kappa}$ и полагая

$$\tilde{\mathbf{W}}_h(y) = v(1 + \tilde{\kappa}) \operatorname{grad}_h y - V \bar{y}.$$

Тогда ошибка в аппроксимации потока

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mathbf{W}}_h(u) - \mathbf{W}(u) = v(\kappa_s + \tilde{\kappa}(1 + \kappa_g)) \operatorname{grad} u,$$

и можно выбрать $\tilde{\kappa} = -\kappa_s / (1 + \kappa_g)$.

При аппроксимации f_h средним по ячейке от функции f получим точную разностную схему для эллиптического уравнения. При малом κ_g и ρ будем иметь $\tilde{\kappa} \approx -\kappa_s$. Уменьшение погрешности ψ_* может быть связано с более точной (с учётом исходного уравнения) аппроксимацией f и $\partial u / \partial t$.

Величина $\tilde{\kappa}$, определяемая по κ_s , повышает точность схем и делает их монотонными в областях пограничного слоя и бегущей волны. Вне области больших градиентов решения будем использовать другие искусственные вязкости, монотонизирующие разностную схему, например, схемы с направленными разностями, аппроксимацию Самарского–Голанта. Тем самым возникают разностные схемы с разрывной вязкостью. Разрывы эти невелики, порядка шага сетки.

Повышение точности схемы в области больших градиентов уменьшает ошибки в области выхода из пограничного слоя или отходе от бегущей волны. Ошибки, сделанные вне области больших градиентов, не будут сильно увеличивать ошибку в пограничном слое.

Повышение погрешности аппроксимации в пограничном слое или об-

ласти бегущей волны уменьшает число необходимых интервалов сетки в этих областях.

В работе рассматривается простейшая одномерная задача для эллиптического уравнения при наличии пограничного слоя у стенки и задача для уравнения Бюргерса с бегущей волной.

Строятся монотонные разностные схемы аппроксимации $O(h^2)$, $O(h^2 + \tau^2)$ с аппроксимацией потока в области больших градиентов – $O(h^4)$. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ранее в [4] был предложен способ построения точных разностных схем для одномерных эллиптических уравнений, содержащих первые производные. Можно использовать указанный там приём и строить схемы высокой точности, что приведёт к монотонности решений сеточной задачи.

Во многих работах авторы стремятся построить монотонные разностные схемы и получить оценки их сходимости, равномерные по малому параметру ν . Первые такие схемы были построены на кусочно-равномерных сетках и для них были получены равномерные по ν оценки сходимости в работах Г.И. Шишкина (см., например, [5]). Позже эти вопросы рассматривались в [6-8].

1. Эллиптические уравнения

1.1. Сеточные уравнения. Рассмотрим простейшую одномерную задачу

$$\nu u'' = V_0 u', \quad 0 < x < \infty, \quad u(0) = 0, \quad u(\infty) = u_0 > 0.$$

Здесь вязкость ν и скорость $V_0 < 0$ – постоянные.

Построим для решения этой задачи разностную схему и вычислим схемную вязкость. Для этого отметим, что решение задачи имеет вид

$$u = u_0 (1 - \exp(-x|V_0|/\nu)).$$

При малой вязкости ν решение быстро выходит на постоянное значение u_0 . Это значение можно задать не при значении $x = \infty$, а на некотором конечном расстоянии l . Определим толщину пограничного слоя как величину, при которой экспонента становится малой и равной 0.01. Его толщина равна

$$\delta \cong 4.6\nu / |V_0|.$$

На отрезке $0 < x < l$ введём неравномерную сетку узлов $x_1=0, x_2, x_3, \dots, x_N=l$, $x_i < x_{i+1}$, $i=1, 2, \dots, N-1$ с шагами $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$. Введём сеточные разностные отношения

$$y_{x,i+1/2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1/2}}, \quad W_{\hat{x},i} = \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{\bar{h}_i},$$

где $\bar{h}_i = 0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$, $i = 2, \dots, N-1$.

Рассмотрим далее простейшую аппроксимацию потока

$$W_{i+1/2}(y) = v \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1/2}} - V_0 \frac{y_{i+1} + y_i}{2},$$

и разностную схему

$$W_{\hat{x},i} \equiv \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{\bar{h}_i} = 0, \quad i = 2, \dots, N-1; \quad y_1 = 0, \quad y_N = u_0. \quad (1.1)$$

Запишем основные уравнения схемы в виде

$$A_i y_{i+1} - C_i y_i + B_i y_{i-1} = -F_i,$$

где $A_i = \frac{v}{h_{i+1/2}}(1 - H_{i+1/2})$, $B_i = \frac{v}{h_{i-1/2}}(1 + H_{i-1/2})$, $C_i = A_i + B_i$, $H_{i+1/2} = \frac{V_0 h_{i+1/2}}{2v}$.

Для того чтобы схема была монотонной, необходимо выполнение неравенств $A_i > 0$, $B_i > 0$, $C_i \geq A_i + B_i$. Эти неравенства будут иметь место при условии:

$$|H_{i+1/2}| < 1 \quad \text{или} \quad \frac{h_{i+1/2}}{\delta} \leq \frac{1}{2.3}.$$

При малой величине v ($v \ll 1$) и больших размерах области ($l \gg 1$) условие $|H_{i+1/2}| < 1$ не может быть выполнено при больших шагах сетки вне пограничного слоя. Если в коэффициенты A_i и B_i добавить слагаемые $|H_{i\pm 1/2}|$:

$$A_i = \frac{1}{h_{i+1/2}} v(1 + |H_{i+1/2}| - H_{i+1/2}), \quad B_i = \frac{1}{h_{i-1/2}} v(1 + |H_{i-1/2}| + H_{i-1/2}),$$

то получим монотонную разностную схему с направленными разностями.

Введем далее поток

$$W_{i+1/2}^{(1)}(y) = v_{i+1/2}^{(1)} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1/2}} - V_0 \frac{y_{i+1} + y_i}{2},$$

где $v_{i+1/2}^{(1)} = v(1 + |H_{i+1/2}|)$. Соответствующую схему с направленными разностями $W_{\hat{x},i}^{(1)} = 0$ можно записать в виде

$$(\nu y_x)_{\hat{x},i} + \frac{|V_0| h_{i+1/2}}{\hat{h}_i} y_{x,i+1/2} = 0. \quad (1.2)$$

В [2] было предложено для дивергентных разностных схем вычесть из вязкости $\nu_{i+1/2}^{(1)}$ величину $\nu |H_{i+1/2}|$ и заменить $1 - |H_{i+1/2}|$ на $1 / (1 + |H_{i+1/2}|)$:

$$\nu(1 - |H_{i+1/2}| + |H_{i+1/2}|) \rightarrow \nu \left(\frac{1}{1 + |H_{i+1/2}|} + |H_{i+1/2}| \right) = \nu \left(1 + \frac{H_{i+1/2}^2}{|H_{i+1/2}|} \right). \quad (1.3)$$

Рассмотренные схемы (1.1)–(1.3) могут быть записаны единообразно:

$$W_{i+1/2}^{(n)}(y) = \nu_{i+1/2}^{(n)} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1/2}} - V_0 \frac{y_{i+1} + y_i}{2},$$

$$\nu_{i+1/2}^{(n)} = \nu(1 + \kappa_{i+1/2}^{(n)}), \quad \kappa_{i+1/2}^{(0)} = 0, \quad \kappa_{i+1/2}^{(1)} = |H_{i+1/2}|, \quad \kappa_{i+1/2}^{(2)} = \frac{H_{i+1/2}^2}{(1 + |H_{i+1/2}|)}.$$

Вычислим для исходной схемы с $\kappa_{i+1/2}^{(0)} = 0$ схемную вязкость. Для этого разложим в ряд Тейлора на решении задачи величины

$$\nu \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} = \nu u'_{i+1/2} + \frac{(h_{i+1/2}/2)^2}{3!} \nu u_{i+1/2}^{(3)} + \frac{(h_{i+1/2}/2)^4}{5!} \nu u_{i+1/2}^{(5)} + \dots,$$

$$V_0 \frac{u_{i+1} + u_i}{2} = V_0 u_{i+1/2} + V_0 \frac{(h_{i+1/2}/2)^2}{2!} \nu u_{i+1/2}'' + V_0 \frac{(h_{i+1/2}/2)^4}{4!} \nu u_{i+1/2}^{(4)} + \dots$$

Из исходного уравнения следует, что

$$\nu u^{(n)} = (-|V_0|/\nu)^{n-1} \nu u', \quad n = 2, 3, \dots$$

Тогда

$$\nu \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} = \nu u'_{i+1/2} \left[1 + \frac{H_{i+1/2}^2}{3!} + \frac{H_{i+1/2}^4}{5!} + \dots \right] = \nu u'_{i+1/2} \frac{\text{sh } H_{i+1/2}}{H_{i+1/2}},$$

$$\begin{aligned} V_0 \frac{u_{i+1} + u_i}{2} &= V_0 u_{i+1/2} + \nu u'_{i+1/2} \left[-\frac{H_{i+1/2}^2}{2!} - \frac{H_{i+1/2}^4}{4!} - \dots \right] = \\ &= V_0 u_{i+1/2} + \nu u'_{i+1/2} (1 - \text{ch } H_{i+1/2}). \end{aligned}$$

Из предыдущего следует, что

$$W_{i+1/2}^{(0)}(u) = \nu \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} - V_0 \frac{u_{i+1} + u_i}{2} = \nu_s u'_{i+1/2} - V_0 u_{i+1/2}.$$

Здесь v_s – схемная вязкость

$$v_{s_{i+1/2}} = v \left(\frac{\operatorname{sh} H_{i+1/2}}{H_{i+1/2}} + 1 - \operatorname{ch} H_{i+1/2} \right) \equiv v(1 + \kappa_{s_{i+1/2}}),$$

$$\kappa_{s_{i+1/2}} = -\operatorname{ch} H_{i+1/2} + \frac{\operatorname{sh} H_{i+1/2}}{H_{i+1/2}}.$$

Таким образом, сеточная аппроксимация потока соответствует потоку исходной задачи с несколько иной вязкостью, обозначенной выше через v_s . Как нетрудно видеть, величина $\kappa_s < 0$ и $v_s < v$. Поэтому сеточное решение должно проходить выше решения дифференциального уравнения, что будет показано ниже. Возвращаясь к степенным рядам, найдём, что

$$v_s = v \left(1 - \frac{H_{i+1/2}^2}{3} - \frac{H_{i+1/2}^4}{30} - \dots \right).$$

Рассмотрим ещё одну разностную схему. Для этого введём

$$W_{i+1/2}^{(\infty)}(y) = v(1 + \kappa_{i+1/2}^{(\infty)}) \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1/2}} - V_0 \frac{y_{i+1} + y_i}{2}$$

и запишем

$$W_{\hat{x}_i}^{(\infty)} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad y_1 = 0, \quad y_N = u_0.$$

Выберем величину $\kappa_{i+1/2}^{(\infty)}$ так, чтобы решение сеточной задачи совпадало с решением дифференциальной задачи. Для этого рассмотрим аппроксимацию потока в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_{i+1/2}^{(\infty)}(u) &= v_{s_{i+1/2}} u'_{i+1/2} + v \kappa_{i+1/2}^{(\infty)} \frac{\operatorname{sh} H_{i+1/2}}{H_{i+1/2}} u'_{i+1/2} - V_0 u_{i+1/2} = \\ &= v u'_{i+1/2} \left[1 + \kappa_{s_{i+1/2}} + \kappa_{i+1/2}^{(\infty)} \frac{\operatorname{sh} H_{i+1/2}}{H_{i+1/2}} \right] - V_0 u_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$W_{i+1/2}^{(\infty)}(u) = v u'_{i+1/2} - V_0 u_{i+1/2}.$$

Это будет иметь место, когда

$$\kappa_{i+1/2}^{(\infty)} = \frac{-\kappa_{s_{i+1/2}}}{\operatorname{sh} H_{i+1/2}} H_{i+1/2} = -1 + H_{i+1/2} \operatorname{cth} H_{i+1/2}.$$

Положим

$$v_{i+1/2}^{(\infty)} = v H_{i+1/2} \operatorname{cth} H_{i+1/2} \equiv v |H_{i+1/2}| |\operatorname{cth} |H_{i+1/2}| |,$$

тогда

$$W_{i+1/2}^{(\infty)} = v_{i+1/2}^{(\infty)} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1/2}} - V_0 \frac{y_{i+1} + y_i}{2}.$$

Разностная схема $W_{\hat{x}_i}^{(\infty)} = 0, y_1 = 0, y_N = u_0$ даёт точное решение дифференциальной задачи (см. [3, 4]). Схему с вязкостью $v_{i+1/2}^{(\infty)}$ можно использовать во всей области решения задачи. Подобная аппроксимация возникает и в случае переменной скорости V_0 . При этом надо заменить V_0 на $(V_0)_{i+1/2}$ и $H_{i+1/2}$ на $h_{i+1/2}(V_0)_{i+1/2}/(2v)$.

Введём вместо $\kappa_{i+1/2}^{(\infty)}$, $W_{i+1/2}^{(\infty)}$ величину $\kappa_{i+1/2}^{(4)}$ и соответственно поток $W_{i+1/2}^{(4)}$. Как и выше, получим

$$W_{i+1/2}^{(4)}(u) = v u'_{i+1/2} \left[1 + \kappa_{s_{i+1/2}} + \kappa_{i+1/2}^{(4)} \frac{\operatorname{sh} H_{i+1/2}}{H_{i+1/2}} \right] - V_0 u_{i+1/2}.$$

Величину в квадратной скобке запишем в виде

$$1 + \kappa_{s_{i+1/2}} + \kappa_{i+1/2}^{(4)} \frac{\operatorname{sh} H_{i+1/2}}{H_{i+1/2}} = 1 - \frac{H_{i+1/2}^2}{3} - \frac{H_{i+1/2}^4}{30} - \dots + \\ + \kappa_{i+1/2}^{(4)} \left(1 + \frac{H_{i+1/2}^2}{6} + \frac{H_{i+1/2}^4}{120} + \dots \right).$$

Выберем

$$\kappa_{i+1/2}^{(4)} = \frac{H_{i+1/2}^2}{3}.$$

Тогда предпоследнее выражение оказывается равным $1 + H_{i+1/2}^4/45 + \dots$ и поток $W_{i+1/2}^{(4)}(u)$ будет отличаться от потока $W(u) = v u' - V_0 u$ в любом узле $x_{i+1/2}$ на величину $O(H_{i+1/2}^4)$. Это же следует и из разложения $H_{i+1/2} \operatorname{cth} H_{i+1/2}$ в ряд Тейлора.

Поскольку в рассматриваемой задаче вне пограничного слоя решение $u = u_0$ и все производные (и погрешность аппроксимации) малы, то точность (асимптотическая) легко определяется по погрешности аппроксимации. Схемы с $\kappa = \kappa^{(n)}$, $n = 1, 2, 4$, имеют точность $O(H^n)$, $H = \max_i |H_{i+1/2}|$.

В общем случае аппроксимация потока вне пограничного слоя может быть менее точной. Так, величина $\kappa_{i+1/2}^{(4)}$ в точках внутри пограничного слоя мала, как и величина $H_{i+1/2}^2/3$. Вне пограничного слоя шаг $h_{i+1/2}$ может быть существенно большим и величина $\kappa_{i+1/2}^{(4)}$ может стать большой, не соответствующей характеру решения задачи. Это может привести к неоправданному затуханию решения. В частности, схема с $\kappa_{i+1/2}^{(0)} = 0$ вне пограничного слоя при больших шагах $h_{i+1/2}$ теряет свою монотонность. Чтобы избежать этих ситуаций вне пограничного слоя, можно вместо $\kappa_{i+1/2}^{(4)}$ и $\kappa_{i+1/2}^{(0)}$ использовать $\kappa_{i+1/2}^{(2)}$. В таком случае будут возникать разностные схемы с разрывной искусственной вязкостью. Эти схемы будут монотонными. Монотонность схемы с $\kappa_{i+1/2}^{(4)}$ следует из положительности коэффициентов $A_i, B_i, C_i = A_i + B_i$, поскольку $1 + (H_{i+1/2}^2/3) \pm H_{i+1/2} > 0$.

Вне пограничного слоя также бывает необходимо понизить искусственную вязкость $\nu^{(2)}$ и повысить точность схемы. Для этого строятся разностные схемы на расширенном шаблоне (схема «крест» в двумерном случае на шаблоне 5×5 узлов) с искусственной вязкостью $O(H_{i+1/2}^3)$. Такие схемы не дают «пилообразных» решений (см. [9, 10]). Используются также и так называемые компактные схемы (схемы точности $O(h^3)$ на трехточечных шаблонах с 3×3 или с $3 \times 3 \times 3$ узлами) [11].

На рис.1 показаны различные «искусственные вязкости» $\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}, \kappa^{(4)}$. Из рисунка видно, что на асимптоту быстро выходит точная разностная схема с $\kappa^{(\infty)}$ и очень медленно – схема с $\kappa^{(2)}$.

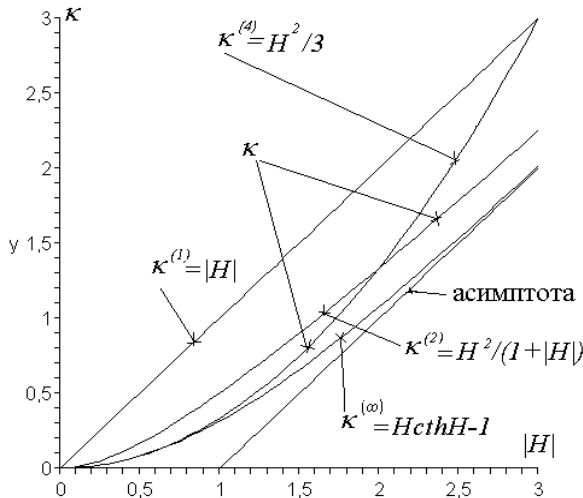


Рис.1. Виды искусственных вязкостей.

Искусственную вязкость $\nu^{(2)}$ можно записать в виде $\nu_{i+1/2}^{(2)} = \nu \left(1 / (1 + |H_{i+1/2}|) + |H_{i+1/2}| \right)$. Здесь второе слагаемое вместе с конвективными и слагаемыми приводит к аппроксимации их направленными разностями, а первое слагаемое при малой вязкости ν и большом шаге $h_{i+1/2}$ имеет малую величину $\nu^2 / (|V_0| h_{i+1/2})$.

При малых шагах сетки $|H_{i+1/2}| < 1.15$, когда в пограничном слое укладывается два или более шагов сетки, вязкость $\nu^{(\infty)}$ наименьшая, как и $\nu^{(4)}$. Поэтому вне пограничного слоя будем использовать вязкость $\nu^{(2)}$ (или $\nu^{(1)}$), для чего введем величину

$$\kappa = \begin{cases} \kappa^{(4)} & \text{в области пограничного слоя,} \\ \kappa^{(2)} & \text{в остальной области решения.} \end{cases}$$

Область пограничного слоя должна определяться в процессе решения задачи величиной производных решения вблизи границ.

Теперь рассмотрим характер приведённых выше аппроксимаций с $\kappa = \kappa^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, 4$. При выходе из пограничного слоя решение в некоторой точке x_0 ($\partial u / \partial x \approx 0$). Тогда в такой точке x_0 можно при исследовании сеточных аппроксимаций задать поток

$$W = -V_0 u_0, \quad u_0 = u(x_0).$$

Соответственно и сеточный поток в точке $x_{N-1/2}$ определить как $-V_0 u_0$. Тогда решение сеточной задачи $W_{\hat{x}_i} = 0$ определяется из условия

$$W_{i+1/2}^{(n)} = \nu_{i+1/2}^{(n)} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1/2}} - V_0 \frac{y_{i+1} + y_i}{2} = -V_0 u_0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y_i = u_0 \left(1 - \xi_i \exp(-x_i |V_0| / \nu) \right),$$

где ξ_i – новая искомая функция. Нетрудно показать, что

$$\xi_{i+1} = r_{i+1/2} \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \xi_1 = 1,$$

$$r_{i+1/2} = \frac{1 + \kappa_{i+1/2}^{(n)} - |H_{i+1/2}|}{1 + \kappa_{i+1/2}^{(n)} + |H_{i+1/2}|} \exp(2 |H_{i+1/2}|).$$

Поскольку $u_i = u_0 \left(1 - \exp(-(x_i |V_0|) / \nu) \right)$, ошибка разностного решения

$z_i = y_i - u_i$ определяется равенством

$$z_i = u_0(1 - \xi_i) \exp(-x_i |V_0|/\nu).$$

Для схемы с $\kappa_{i+1/2}^{(0)} = 0$ производная $\partial r_{i+1/2} / \partial |H_{i+1/2}| < 0$. Поскольку при $|H_{i+1/2}| = 0$ $r_{i+1/2} = 1$, то все $r_{i+1/2} < 1$, а поэтому $\xi_i < 1$. Но тогда $y_i > u_i$. Для прочих схем $\partial r_{i+1/2} / \partial |H_{i+1/2}| > 0$, $r_{i+1/2} > 1$, $\xi_i > 1$ и $y_i < u_i$.

Из выражения для z_i и связи ξ_{i+1} и ξ_i находим

$$z_{i+1} = \alpha_{i+1/2}^{(n)} z_i + F_{i+1/2}^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad z_1 = 0;$$

$$\alpha_{i+1/2}^{(n)} = r_{i+1/2} \exp(-2|H_{i+1/2}|) = \frac{1 + \kappa_{i+1/2}^{(n)} - |H_{i+1/2}|}{1 + \kappa_{i+1/2}^{(n)} + |H_{i+1/2}|},$$

$$F_{i+1/2}^{(n)} = \left(\exp(-2|H_{i+1/2}|) - \alpha_{i+1/2}^{(n)} \right) u_0 \exp(-x_i |V_0|/\nu).$$

Из предыдущего следует, что $0 < \alpha_{i+1/2}^{(n)} < 1$. Из уравнения для $z_i = z_i^{(n)}$ имеем

$$z_i^{(n)} = \sum_{k=2}^{i-1} F_{k-1/2}^{(n)} \prod_{m=k+1}^i \alpha_{m-1/2}^{(n)} + F_{i-1/2}^{(n)}, \quad i = 3, 4, \dots, N, \quad z_2^{(n)} = F_{3/2}^{(n)}.$$

Отсюда находим асимптотические оценки для $z_i^{(n)}$ (для разностных уравнений с $\kappa = \kappa^{(n)}$):

$$\left| z_i^{(n)} \right| \leq C_z^{(n)} \left(\max |H_{i+1/2}| \right)^n, \quad n = 1, 2, 4, \quad \left| z_i^{(0)} \right| \leq C_z^{(0)} \left(\max |H_{i+1/2}| \right)^2,$$

где $C_z^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, 4$, – постоянные могут зависеть от ν .

Приведенные оценки ошибок являются асимптотическими. Представляя ошибку в виде $C|H|^\beta$ и вычисляя её для значений $|H|$ и $0.5|H|$, можно найти величину β , которая может отличаться от n для больших $|H|$.

Неверная оценка пограничного слоя и использование внутри него значения $\kappa^{(2)}$ вместо $\kappa^{(4)}$ приводят к ошибкам. Поэтому искусственную вязкость $\kappa_{i+1/2}^{(4)}$ надо использовать в области, несколько превышающей толщину пограничного слоя.

1.2. Численные эксперименты. Численные эксперименты проводились в безразмерных переменных: $\tilde{x} = x|V_0|/\nu$, $\tilde{y} = u/u_0$. Величины $\tilde{\delta} = 4.6$, $\tilde{h}_{i+1/2} = 2|H_{i+1/2}|$. Аналогично [5] неравномерные сетки были выбраны кусочно-постоянными с шагом h в пограничном слое, и шагами $\sim 4 \div 8h$ в остальной области.

Приведём результаты расчётов решения в пограничном слое $0 < \tilde{x} < 4.6$ в точках $\tilde{x}_1 = 1.15$, $\tilde{x}_2 = 2.3$, $\tilde{x}_3 = 3.45$. В табл.1 приводится отношение ошибки $|z(\tilde{x}_n)|$ к точному решению задачи $u(\tilde{x}_n)$ в процентах для $n=1,2,3$, а также величина β , вычисленная для сеток с шагами \tilde{h} и $0.5\tilde{h}$. Число интервалов сетки внутри пограничного слоя бралось $I_1 = 2$, $I_2 = 4$, $I_3 = 8$.

Таблица 1.

№		I_1	I_2	I_3	№	I_1	I_2	I_3	№	I_1	I_2	I_3
1	\tilde{x}_1		22	12	2		6.8	1.5	5		0.14	0.008
	\tilde{x}_2	22	12	7		20	3	0.7		1.3	0.07	0.004
	\tilde{x}_3		7	3.5			1.2	0.3			0.03	0.0017
	β	0.8	0.9			2.63	2.08			4.31	4.08	
3	\tilde{x}_1		6.8	1.5	4		5.7	2				
	\tilde{x}_2	1.89	3.0	0.7		7.55	2.92	1				
	\tilde{x}_3		1.25	0.3			1.4	0.44				
	β	2.63	2.08			1.37	1.58					

Расчёты проводились для следующих случаев:

- 1) во всей расчётной области бралась схема с односторонними разностями ($\kappa^{(1)}$);
- 2) в пограничном слое использовалась аппроксимация с $\kappa_{i+1/2}^{(0)} = 0$, вне его – схема с односторонними разностями $\kappa_{i+1/2}^{(1)}$;
- 3) в пограничном слое использовалась аппроксимация с $\kappa_{i+1/2}^{(0)} = 0$, а вне его – аппроксимация с $\kappa_{i+1/2}^{(2)}$;
- 4) во всей расчётной области бралась аппроксимация с $\kappa_{i+1/2}^{(2)}$;
- 5) в пограничном слое бралась аппроксимация с $\kappa_{i+1/2}^{(4)}$, вне его – аппроксимация $\kappa_{i+1/2}^{(2)}$.

Сравнивая результаты расчётов, можно сделать следующие выводы.

Использование односторонних разностей в пограничном слое недопустимо. Если в пограничном слое использовать разностные схемы без искусственной вязкости ($\kappa_{i+1/2}^{(0)} = 0$), а вне пограничного слоя схемы с односторонними разностями или схему с $\kappa_{i+1/2}^{(2)}$, то результаты оказываются близкими. Близки они и к расчётам, когда во всей области используется аппроксимация с $\kappa_{i+1/2}^{(2)}$ (за исключением случая очень грубых сеток с $I_1 = 2$). Ве-

личина β для всех схем, кроме схемы с $\kappa^{(2)}$, близка к показателю n асимптотической оценки, а для схемы с $\kappa_{i+1/2}^{(2)}$ $\beta \sim 1.5$. Величина шага сетки вне пограничного слоя при $|\tilde{H}|=4$ и $|\tilde{H}|=8$ не влияла на точность решения внутри пограничного слоя.

Как и следовало ожидать, наибольшая точность расчётов достигается для схемы четвёртого порядка аппроксимации в пограничном слое. Хорошие результаты достигаются, когда в пограничном слое всего 2 или 4 интервала сетки.

Были проведены также расчёты по схеме $(\kappa^{(4)} - \kappa^{(2)})$ с шагом в пограничном слое $\tilde{h} = 1.5333\dots$, когда в пограничном слое укладывается три интервала сетки. Ошибки в точках $\tilde{x}^{(1)} = 1.5333\dots$ и $\tilde{x}^{(2)} = 3.0666\dots$ составляли соответственно 0.3% и 0.13%.

Как было показано выше, сеточное решение задачи в пограничном слое $\kappa_{i+1/2}^{(0)} = 0$ было больше решения исходной задачи ($v_s < v$), при переходе решения в область с $\kappa_{i+1/2}^{(2)}$ ситуация изменялась. Решения с прочими значениями $\kappa_{i+1/2}^{(n)}$, $n = 1, 2, 4$, были меньше решения исходной задачи ($v_s > v$).

2. Параболические уравнения

2.1. Случай бегущей волны. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -l < x < l, \quad 0 < t < t_0$$

с граничными и начальными условиями

$$u(-l, t) = u_0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0 [1 + \exp((xu_0)/\nu)].$$

Здесь в качестве l возьмем большое число, чтобы начальная функция при $x = \pm l$ была согласована с граничными условиями (с хорошей точностью). Решение задачи имеет вид бегущей волны со скоростью $u_0 > 0$ в области $x > 0$. Пусть к времени t_0 волна ещё не достигла значения $x = l$. Тогда решение этой задачи есть функция

$$u = \frac{u_0}{1 + \exp((x - Vt)u_0/\nu)}, \quad V = u_0.$$

Ширина волны при $|\partial u / \partial x| > \varepsilon = 0.01$ для каждого момента времени t относительно точки $x = u_0 t$ равна $9.2(\nu / u_0)$ (в обе стороны по $\delta = 4.6(\nu / u_0)$).

При численном решении задачи в области бегущей волны нужно использовать пространственную сетку с малым шагом h относительно ширины волны. В проведенных расчетах сетка была выбрана с постоянным и малым шагом h во всей области. Иначе необходимо было бы решать задачу на подвижной адаптивной сетке к области максимальных градиентов.

При построении разностной схемы удобно вначале перейти к переменной $\xi = x - Vt$, где V – скорость бегущей волны, которую будем считать неизвестной. Введём вместо u функцию

$$q(\xi) = u(\xi) - V/2.$$

Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad W(\xi) = v \frac{\partial q}{\partial \xi} - q^2. \quad (2.1)$$

Из полученного уравнения следует, что $W = \text{const}$, $W \rightarrow -(V/2)^2$ при $\xi \rightarrow +\infty$ и $W \rightarrow -(u_0 - V/2)^2$ при $\xi \rightarrow -\infty$. Отсюда следует, что скорость $V = u_0$.

В фиксированный момент времени t введём равномерную сетку узлов с $\xi_{i+1} - \xi_i = x_{i+1} - x_i = h$. Рассмотрим разностную схему

$$W_{\xi_i} = 0, \quad W_{i+1/2} = v \frac{q_{i+1} - q_i}{h} - \overline{q^2}_{i+1/2}, \quad \overline{q^2}_{i+1/2} = \frac{q_{i+1}^2 + q_i^2}{2} \quad (2.2)$$

и найдём для неё схемную вязкость с точностью $O(h^4)$. Разложим в ряд Тейлора слагаемые, входящие в выражение для потока (2.2). Получим

$$v \frac{q_{i+1} - q_i}{h} = v q'_{i+1/2} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{v q'''_{i+1/2}}{3!} + \dots, \quad \overline{q^2}_{i+1/2} = q_{i+1/2}^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{(q^2)''}{2!} + \dots.$$

Из уравнения (2.1) найдём

$$v q''' = (q^2)'' = q'(2q' + (4q^2)/v).$$

Теперь поток можно записать в следующем виде:

$$W_{i+1/2} = v q_{x_{i+1/2}} - \overline{q^2}_{i+1/2} = v_{s_{i+1/2}} q'_{i+1/2} - q_{i+1/2}^2,$$

где $v_{s_{i+1/2}} = v \left(1 - h^2 \left(\frac{q'}{6v} + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{v} \right)^2 \right) + \dots \right)$ – схемная вязкость. Точками, как и выше, отмечены слагаемые порядка $O(h^4)$.

В поток $W_{i+1/2}$ можно ввести поправку, заменяя v на

$$v_{i+1/2}^{(4)} = v \left(1 + h^2 \left(\frac{u_{x\ i+1/2}}{6v} + \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{u}_{i+1/2} - 0.5\bar{V}}{v} \right)^2 \right) \right), \quad \bar{u}_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}.$$

Возвращаясь к функции u , запишем поток следующим образом:

$$W_{i+1/2} = v_{i+1/2}^{(4)} u_{x\ i+1/2} - \bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{u}_{i+1/2} \bar{V} - \bar{V}^2 / 2.$$

Для этого уточнённого потока потребуем выполнения тождества $W_{\xi} \approx 0$. В результате получим

$$(v_{i+1/2}^{(4)} u_{x\ i+1/2} - \bar{u}_{i+1/2}^2)_{\hat{x}} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} V \approx 0.$$

Последнее слагаемое в левой части запишем в виде

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{2h} V = \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} V \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

Вынесем $\partial u / \partial t$ из-под знака интеграла в точке x_i и получим

$$\Lambda u \equiv (v_{i+1/2}^{(4)} u_{x\ i+1/2} - \bar{u}_{i+1/2}^2)_{\hat{x}} \approx \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i.$$

В новом потоке $v_{i+1/2}^{(4)} u_{x\ i+1/2} - \bar{u}_{i+1/2}^2$ вне бегущей волны заменим искусственную вязкость $v^{(4)}$ на $v^{(2)}$.

Теперь можно записать разностную схему. Умножим полученное выше равенство на моменты времени $t = t_j$ и $t = t_{j+1}$ на $1/2$ и сложим. Заменяя производную по времени разностным отношением $y_{\bar{t}i}^{j+1} = (y_i^{j+1} - y_i^j) / \tau$, получим разностную аппроксимацию Кранка-Никольсон

$$y_{\bar{t}i}^{j+1} = \frac{1}{2} \left((\Lambda y^{j+1})_i + (\Lambda y^j)_i \right).$$

Умножая уравнение на $2h$, эту схему запишем в виде:

$$\begin{aligned} A_i^{j+1} y_{i+1}^{j+1} - C_i^{j+1} y_i^{j+1} + B_i^{j+1} y_{i-1}^{j+1} &= -F_i^{j+1}, \\ A_i^{j+1} &= \frac{1}{h} (\tilde{v}_{i+1/2} - h \bar{y}_{i+1/2})^{j+1}, \quad B_i^{j+1} = \frac{1}{h} (\tilde{v}_{i-1/2} + h \bar{y}_{i-1/2})^{j+1}, \\ C_i^{j+1} &= A_i^{j+1} + B_i^{j+1} + 2h / \tau. \end{aligned}$$

Правую часть F_i^{j+1} вычисляем с помощью рекуррентного соотношения

$$F_i^{j+1} = -F_i^j + \frac{4h}{\tau} y_i^j, \quad F_i^0 = A_i^0 y_{i+1}^0 - C_i^0 y_i^0 + B_i^0 y_{i-1}^0,$$

а искусственную вязкость по формуле

$$\tilde{v}_{i+1/2} = \begin{cases} v_{i+1/2}^{(4)}(y) & \text{при } |y_{x_{i+1/2}}^{j+1}| > \varepsilon, \\ v_{i+1/2}^{(2)}(y) & \text{при } |y_{x_{i+1/2}}^{j+1}| < \varepsilon, \end{cases}, \quad \varepsilon = 0.01.$$

Разностное решение задачи находится с помощью прогонок и итерационного процесса, коэффициенты схемы вычисляются по значениям функции с предыдущей итерации. Величину скорости фронта V можно определить в каждой точке фронта, например, из соотношения

$$V_i = \frac{(\tilde{v}y_x - y^2)_{\hat{x}_i}}{0.5(y_{x,i} + y_{\bar{x},i})}, \quad \bar{V}_{i+1/2} = \frac{V_{i+1} + V_i}{2},$$

и включать в итерационный процесс $0.5(y_{x,i} + y_{\bar{x},i}) = (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2h$. Коэффициенты A, B, C положительны на волне при числе интервалов сетки не менее шести.

Некоторые вычислители предпочитают аппроксимировать q^2 не $(\bar{q}^2)_{i+1/2}$, а $(\bar{q}_{i+1/2})^2 = ((q_{i+1} + q_i)/2)^2$. Аналогично предыдущему, для этой аппроксимации найдем схемную вязкость $v_{s,i+1/2}$. С точностью до $O(h^4)$ будем иметь

$$v_{s,i+1/2} = v(1 + \kappa_{s,i+1/2}), \quad \kappa_{s,i+1/2} = \frac{h^2}{12v} y_{x,i+1/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{v} \left(\bar{y} - \frac{\bar{V}}{2} \right) \right)_{i+1/2}^2 + \dots$$

и

$$\kappa_{i+1/2}^{(4)} = \left(-\frac{h^2}{12v} y_x + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{v} \left(\bar{y} - \frac{\bar{V}}{2} \right) \right)_{i+1/2}^2 \right) \quad \text{и} \quad \Delta y = \left(v^{(4)} y_x - (\bar{y})^2 \right)_{\hat{x}}.$$

Если записать теперь, что

$$(\bar{y})_{i+1/2}^2 = \bar{y}_{i+1/2}^2 - \frac{h^2}{4} y_{x,i+1/2}^2,$$

то можно увидеть, что рассматриваемые выше схемы совпадают. Изменение в аппроксимации u^2 компенсируется изменением v_s – поправки $\kappa^{(4)}$.

Как и в первом разделе, построим экспоненциальную аппроксимацию (см. [3]). Для этого постоянный в данном случае поток

$$W = vq' - q^2$$

умножим на $2\frac{q}{v}\exp\left(\int_{\xi_i}^{\xi}(2q/v)d\xi\right)$ и придём к равенству ($W_{\xi} = 0$)

$$-W \frac{d}{d\xi} \left(\exp \left(- \int_{\xi_i}^{\xi} \frac{2q}{v} d\xi \right) \right) = \frac{d}{d\xi} \left(q^2 \exp \left(- \int_{\xi_i}^{\xi} \frac{2q}{v} d\xi \right) \right).$$

Интегрируя это уравнение по ξ от ξ_i до ξ_{i+1} , учитывая постоянство W , будем иметь

$$W_{i+1/2} = W = v_{i+1/2}^{(\infty)} q_{\xi_{i+1/2}} - \bar{q}_{i+1/2}^2,$$

где $v_{i+1/2}^{(\infty)} = v \frac{\bar{q}_{i+1/2} h}{v} \operatorname{cth} \left(\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} q d\xi \right)$. Таким образом, получаем точное выражение для потока. Введём далее обозначение

$$I_{i+1/2} = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} q d\xi \tag{2.3}$$

и разложим cth в ряд Тейлора по $I_{i+1/2}$. Тогда

$$W_{i+1/2} = W = v \left(\frac{\bar{q}_{i+1/2} h}{v} \right) \left(\frac{1}{I_{i+1/2}} + \frac{I_{i+1/2}}{3} - \frac{I_{i+1/2}^3}{45} + \dots \right) q_{\xi_{i+1/2}}.$$

Раскладывая в ряд Тейлора подынтегральное выражение в (2.3) и интегрируя, получим

$$\bar{q}_{i+1/2} = q_{i+1/2} + \frac{h^2}{8} q_{i+1/2}'' + \dots, \quad I_{i+1/2} = q_{i+1/2} h + \frac{h^3}{24} q''.$$

Отсюда и из равенства $vq'' = 2qq'$ с точностью $O(h^4)$ имеем

$$I_{i+1/2} = v \frac{\bar{q}_{i+1/2} h}{v} \frac{1}{1 + ((h^2 q_{\xi_{i+1/2}}) / 6v) + \dots}.$$

Заменяя теперь $q_{\xi_{i+1/2}}$ на $u_{x_{i+1/2}}$, получим

$$v_{i+1/2}^{(\infty)} = v \left(1 + \frac{h^2}{6v} u_{x\ i+1/2} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{v} \left(\bar{u} - \frac{\bar{V}}{2} \right)_{i+1/2} \right)^2 + \dots \right).$$

Далее проведём те же, что и ранее, преобразования с $\overline{q_{i+1/2}^2}$. Отбрасывая слагаемые порядка h^4 , получим снова всю ту же разностную схему с $\mu = O(h^4)$. Используя выражение $v_{i+1/2}^{(\infty)}$, можно легко получить схемы с $\mu = O(h^6)$ и более высокого порядка точности.

Итак, в области с большим градиентом (пограничном слое, бегущей волне) нет необходимости использовать большое число интервалов (узлов сетки). Можно повысить точность схемы, увеличивая порядок аппроксимации. Выше это было показано для одномерного случая, когда на интервале h поток W оказывался постоянным, с чем и связана аппроксимация порядка h^4 . Однако в многомерном случае это сделать существенно труднее. Рассмотрение этого вопроса приводит к компактным разностным схемам [11].

Завершая обсуждение схемы, заметим, что основная ошибка при решении задачи с бегущей волной связана с аппроксимацией по времени. Поэтому нами использована схема Кранка-Никольсон второго порядка точности по времени. В предложенной выше схеме на волне величина $\mu = O(h^4)$, а погрешность аппроксимации $\psi_* = O(\tau^2 + h^2)$.

2.2. Численные расчёты. 2.2.1. Бегущая волна. Расчёты проводились для нормированного решения $\tilde{u} = u/u_0$, зависящего от $\tilde{x} = (xu_0)/v$ и $\tilde{t} = tu_0^2/v$, так что $0 < \tilde{u} < 1$. Как и выше, полагалось $\kappa = \kappa^{(4)}$ в области больших градиентов и $\kappa = \kappa^{(2)}$ в остальной области.

Итерационный процесс на каждом временном слое заканчивался, когда разность соседних итераций не превышала по модулю величину 10^{-6} . Расчёт проводился до момента времени $\tilde{t} = 200$, так что волна успевала пройти около 200 пространственных интервалов \tilde{h} . Рассчитываемая в итерациях скорость волны \tilde{V} была близка к 1 ($\tilde{V} = 0.97 \div 1.03$). При этом сеточное решение следовало вместе с волной исходной задачи, не расплываясь и не изменяя точности, определяемой погрешностью аппроксимации.

Выполненные расчёты показали, что монотонность решения имеет место при $\tilde{h} \leq \tilde{h}_0$, $\tilde{\tau} \leq \tilde{\tau}_0$, где постоянные \tilde{h}_0 и $\tilde{\tau}_0$ близки к $1.15 \div 1.5$. Монотонность наблюдалась и при $\tilde{\tau} / \tilde{h}^2 = 6$ ($\tilde{h} = 0.5$, $\tilde{\tau} = 1.5$), а также при шагах $\tilde{h} = 1.5 \div 2$, когда на длине волны $\tilde{\delta} = 9.2$ укладывалось примерно то же число интервалов, что и в задаче с пограничным слоем. При $\tilde{\tau} = 1.5 \div 2$ у задне-

го фронта волны возникали пространственные колебания решения. Превышение сеточным решением 1 ($\tilde{u}_0 = 1$) было порядка $0.025 \div 0.05$.

Для выяснения точности схемы были проведены расчёты с $\tilde{h} = 1.25$, $\tilde{\tau} = 1$ и шагами, в два раза меньшими $\tilde{h} = 0.625$, $\tilde{\tau} = 0.5$. Максимальная ошибка имела место в точке, где $\tilde{u} = 0.5$, и равнялась $|z_{\max}| = 0.0652$ (13%) и $|z_{\max}| = 0.017$ (3.4%). С уменьшением шага в два раза она уменьшилась в ~ 4 раза. Так же было и в других расчётах при $\tilde{h} = 1.5$, $\tilde{\tau} = 1.15$ ($|z_{\max}| = 0.096$, 15%) и $\tilde{h} = 0.75$, $\tilde{\tau} = 0.575$ ($|z_{\max}| = 0.02255$, 3.6%). Во втором случае максимум ошибки достигался при значении $\tilde{u} = 0.622$.

На последних двух сетках были проведены расчёты, когда на всех интервалах использовалась аппроксимация Самарского–Голанта. В обоих случаях точка, где достигался максимум ошибки, соответствовала значению $\tilde{u} = 0.269$ и составляла соответственно 15.6% и 38.6% (против ранее достигнутых 3.6% и 15.5%). При уменьшении шагов \tilde{h} и $\tilde{\tau}$ в два раза и предположении $|z_{\max}| = C(\tilde{h}^\beta + \tilde{\tau}^\beta)$ было найдено, что $\beta \approx 1.25$.

На рис.2 приведены решение сеточной задачи, функции \tilde{y}_i , и точное решение исходной задачи $\tilde{u}(x_i)$, сеточное решение для $\tilde{h} = 1$, $\tilde{\tau} = 1$, когда максимальная ошибка достигалась в центре волны (при $\tilde{u} = 0.5$) и равнялась $5 \cdot 10^{-2}$ (10%). На рис.3 приведено решение с $\tilde{h} = 0.5$, $\tilde{\tau} = 2$ (максимальная ошибка $6.78 \cdot 10^{-2}$ (13.5%)). За фронтом волны видна немонотонность решения.

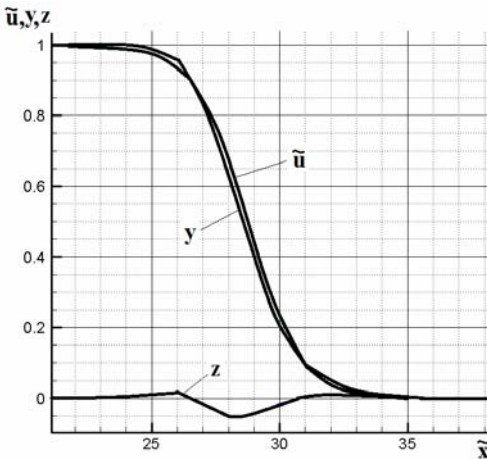


Рис.2. Сеточное решение для $\tilde{h} = 1$, $\tilde{\tau} = 1$.

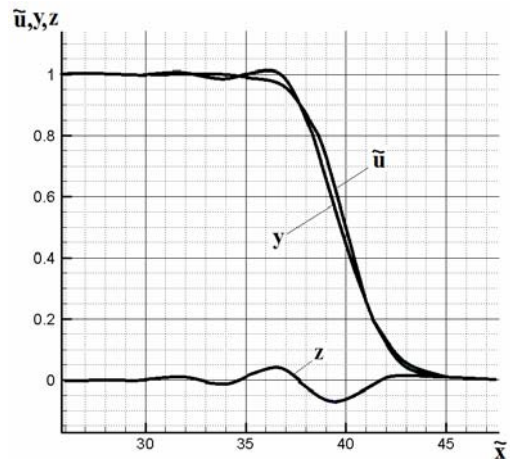


Рис.3. Сеточное решение для $\tilde{h} = 0.5$, $\tilde{\tau} = 2$.

Рассматривалась также задача, когда в начальный момент времени фронт волны имел малый наклон к оси \tilde{x} по сравнению с решением исход-

ной задачи. До выхода на режим бегущей волны скорость \tilde{V} у переднего фронта была меньше 1, а у верхнего – порядка 1. Это привело к увеличению наклона фронта волны к оси \tilde{x} и приближению скорости \tilde{V} к единице.

2.2.2. Решение нестационарной задачи с выходом на стационар.

Рассмотрим задачу для того же нестационарного уравнения при $0 < x < l$, $t > 0$ с граничными условиями $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = -u_0 < 0$, $0 < t < \infty$. В качестве начальных условий рассматривались два условия 1) $u(x, 0) = 0$, либо 2) $u(x, 0) = -u_0 < 0$ при $0 < x < l$. Стационарное решение при больших l ($\text{th}((lu_0)/v) \cong 1$) близко к функции $u = -u_0 \text{th}((xu_0)/v)$ ($\tilde{u} = -\text{th} \tilde{x}$).

Если в начальный момент задавалось нулевое значение функции, то образовывалась волна, бегущая от $x=l$ к $x=0$ со скоростью $V \cong -u_0$, а затем происходило установление решения с выходом на скорость $V \approx 0$. Во втором случае ($u(x, 0) = -u_0 < 0$) наблюдался лишь второй этап выхода на стационар.

2.2.3. Многомерные задачи. Обсудим вопрос о монотонизации сеточных уравнений в случае многомерных задач. Здесь не удастся построить схемы с аппроксимацией потока $O(h^4)$, а лишь схемы не выше 2-го порядка точности. Поэтому чтобы повысить точность расчёта, нужно измельчить сетку в области больших градиентов решения задачи в пограничном слое и на бегущей волне. Приведем один пример.

Покроем область ячейками – остроугольными треугольниками (тетраэдрами в случае трех измерений). Рассмотрим описанные около каждого треугольника (тетраэдра) окружности (сферы). Центры их будут внутри ячейки. Соединим центры соседних ячеек A и B отрезком Δn_{AB} , направленным (от A к B) по нормали \mathbf{n}_{AB} к границе ячейки. К центрам ячеек будем относить искомую сеточную функцию u – приближение решения уравнений эллиптического или параболического уравнений. Сеточное уравнение является балансом потоков через границы соседних ячеек. Если поток в исходном дифференциальном уравнении в направлении нормали \mathbf{n} записать в виде

$$W_n = v \frac{\partial u}{\partial n} - V_n u,$$

где V_n – нормальная компонента скорости \mathbf{V} , то соответствующий сеточный поток с монотонизирующими добавками $\kappa^{(l)}$ ($l=1, 2, \infty$) в вязкость $v^{(l)} = v(1 + \kappa^{(l)})$ записывается в виде

$$W_{n_{AB}}^h = v_{n_{AB}}^{(l)} \frac{u_B - u_A}{\Delta n_{AB}} - V_{n_{AB}} \frac{u_B + u_A}{2}, \quad l = 1, 2, \infty.$$

Здесь для схем с направленными разностями $\kappa_{n_{AB}}^{(1)} = |q_{AB}|$, для аппроксимации Самарского–Голанта $\kappa_{n_{AB}}^{(2)} = q_{AB}^2 / (1 + |q_{AB}|)$, для аппроксимации Ильина $\kappa_{n_{AB}}^{(\infty)} = |q_{AB}| \operatorname{cth} |q_{AB}| - 1$ ($v_{n_{AB}}^{(\infty)} = v |q_{AB}| \operatorname{cth} |q_{AB}|$, $q_{AB} = \Delta n_{AB} (V_{n_{AB}} / (2v))$). Здесь все, как и в одномерном случае. Но поскольку поток $W_{n_{AB}}$ непостоянен, то четвертого порядка аппроксимации здесь нет. В аппроксимации Ильина при малых шагах Δn_{AB} и малых q_{AB} можно записать, что $v_{n_{AB}}^{(\infty)} \approx v(1 + (|q_{AB}|^2)/3)$. При больших $|q_{AB}|$, когда $\operatorname{cth} |q_{AB}| \approx 1$, из аппроксимации выпадает вязкость v (диссипативные слагаемые), что естественно. Тогда

$$W_{n_{AB}}^h = -\left(u_B V_{n_{AB}}^- + u_A V_{n_{AB}}^+\right), \quad V_{n_{AB}}^\pm = \frac{1}{2} \left(V_{n_{AB}} \pm |V_{n_{AB}}|\right).$$

Итак, в многомерном случае нужно для повышения точности измельчать сетку в пограничном слое и в области бегущей волны, либо переходить к компактным схемам, что на нерегулярных треугольных (тетраэдральных) сетках тоже сделать не просто.

Единственным выходом кажется переход к методу конечных элементов [12, 13] и рассмотрение сеточной функции не только в вершинах ячеек, но и на их сторонах, переходя к квадратичному восполнению решения. При расширении шаблона не только повышается точность, но и увеличивается фактическое число узлов сетки в соответствующих областях. Оба эти факта повышают точность решения. При этом оказывается, что на приемлемых сетках нет необходимости во введении в схему монотонизирующих решения добавок. Примеры расчётов без введения искусственной вязкости можно найти в [12].

В заключение отметим, что предлагаемый подход к построению разностных схем, основанный на вычислении схемной вязкости, и повышение аппроксимации потока, в том числе и для задач с бегущими волнами, может быть использован в других задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического уравнения // ЖВМ и МФ, 1965, т.2, №3, с.548-551;

- Samarskii A.A.* Monotonic difference schemes for elliptic and parabolic equations in the case of a non-self adjoint elliptic operator // USSR Comp. Math. & Math. Physics, 1965, v.5, issue 3, p.212-217.
2. *Голант Е.И.* О сопряженных семействах разностных схем для уравнений параболического типа с младшими членами // ЖВМиМФ, 1969, т.18, №5, с.1162-1169;
Golant E.I. O sopryazhennykh semeystvakh raznostnykh skhem dlya uravneniy parabolicheskogo tipa s mladshimi chlenami // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki, 1969, t.18, №5, s.1162-1169. [in Russian]
 3. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математ. заметки, 1969, т.6, вып.2, с.237-248;
Ilin A.M. Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative // Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 1969, v.6, Issue 2, p.596-602.
 4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках // ЖВМиМФ, 1962, т.2, №5, с.812-832;
Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Homogeneous difference schemes on non-uniform nets // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1963, v.2, issue 5, p.927-953.
 5. *Шишкин Г.И.* Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных параболических уравнений с кусочно-непрерывными начально-краевыми условиями // Тр. ИММ УрО РАН, 2007, 13, № 2, с.218-233;
Shishkin G.I. Grid approximation of singularly perturbed parabolic equations with piecewise continuous initial-boundary conditions // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2007, v.259, Supplement 2, p.S213-S230.
 6. *Андреев В.Б., Савин И.А.* О равномерной по малому параметру сходимости монотонных разностной схемы Самарского и её модификации // ЖВМиМФ, 1995, т.35, №5, с.739-752;
Andreev V.B., Savin I.A. On the convergence, uniform with respect to the small parameter, of A.A. Samarskii's monotone scheme and its modifications // Comp. Math.&Math. Phys., 1995, v.35:5, p.581-591.
 7. *Андреев В.Б., Савин И.А.* К вычислению граничного потока с равномерной по малому параметру точностью // ЖВМиМФ, 1996, т.36, №12, с.57-63;
Andreev V.B., Savin I.A. The computation of boundary flow with uniform accuracy with respect to a small parameter // Comp. Math.&Math. Phys., 1996, v.36:12, p.1687-1692.
 8. *Савин И.А.* Равномерные сеточные методы для некоторых сингулярно-возмущенных уравнений. Диссертация к.ф.-м.н., – М.: 1996;
Savin I.A. Ravn timer nye setochnye metody dlia nekotorykh singuliarno-vozmushchennykh uravnenii / Dissertatsiia k.f.–m.n., – M.: 1996.
 9. *Гончаров А.Л., Фрязинов И.В.* Разностные схемы на девятиточечном шаблоне «крест» решения уравнений Навье-Стокса // ЖВМиМФ, 1988, т.28, №6, с. 867-878;
Goncharov A.L., Fryazinov I.V. Difference schemes on a nine-point “cross” pattern for solving the Navier–Stokes equations // U.S.S.R. Comp. Math.&Math. Phys., 1988, v.28:3, p.164-172.
 10. *Мажорова О.С., Марченко М.П., Фрязинов И.В.* Монотонизирующие регуляризаторы и матричные методы решения уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости // Математическое моделирование, 1994, т.6, №12, с.97-116.
Mazhorova O.S., Marchenko M.P., Friazinov I.V. Monotoniziruiushchie regularizatory i

matrichnye metody resheniia uravneniia Navie-Stoksa dlia neszhimaemoi zhidkosti // Matematicheskoe modelirovanie, 1994, t.6, №12, s.97-116.

11. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэродинамики. – М.: Наука, 1990, ВЦ АН СССР.
Tolstykh A.I. Compact Difference Schemes and Their Application to Aerohydrodynamic Problems. – М.: Nauka, 1990.
12. Волков П.К., Переверзев А.В. Метод конечных элементов для решения краевых задач регуляризованных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «скорость-давление» // Математическое моделирование, 2003, т.15. №3, с.15-28;
Volkov P.K., Pereverzev A.V. Metod konechnykh elementov dlia resheniia kraevykh zadach reguliarizovannykh uravnenii neszhimaemoi zhidkosti v peremennykh «skorost-davlenie» // Matematicheskoe modelirovanie, 2003, t.15. №3, s.15-28;
13. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. – М.: «Мир», 1991, т.1,2.
Fletcher C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics // Springer-Verlag, 1991, v.1,2.

Поступила в редакцию 18.09.2018

После доработки 18.09.2018

Принята к публикации 11.02.2019