

МЕТОД УЧЕТА ЗАПОЛНЕННОСТИ ЯЧЕЕК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ

© 2019 г. *А.И. Сухинов¹, А.Е. Чистяков¹, Е.А. Проценко²,
В.В. Сидорякина², С.В. Проценко¹*

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

²Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал Ростовского государственного экономического университета РИНХ), Таганрог
sukhinov@gmail.com, cheese_05@mail.ru, rab55555@rambler.ru,
eapros@rambler.ru, cvv9@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 17–11–01286).

DOI: 10.1134/S0234087919080057

Рассматривается развитие и применение метода учета заполненности прямоугольных ячеек материальной средой, в частности, жидкостью для повышения гладкости и точности конечноразностного решения задач гидродинамики со сложной формой граничной поверхности. Для исследования возможностей предлагаемого метода рассмотрены две задачи вычислительной гидродинамики – пространственно-двумерного течения вязкой жидкости между двумя соосными полуцилиндрами и пространственно-трехмерная задача волновой гидродинамики – распространения волны в прибрежной зоне и ее выхода на сушу. Для решения поставленных задач используются прямоугольные сетки, учитывающие заполненность ячеек. Аппроксимация задач по времени выполнена на основе схем расщепления по физическим процессам, а по пространственным переменным – на основе интегро-интерполяционного метода с учетом заполненности ячеек и без ее учета. Для оценки точности численного решения первой задачи в качестве эталона используется аналитическое решение, описывающее течение Куэтта-Тейлора. Моделирование производилось на последовательности сгущающихся расчетных сеток размерами: 11×21 , 21×41 , 41×81 и 81×161 узлов в случае применения метода и без его использования. В случае непосредственного использования прямоугольных сеток (ступенчатой аппроксимации границ) относительная погрешность расчетов достигает 70%; при тех же условиях использование предлагаемого метода позволяет уменьшить погрешность до 6%. Показано, что дробление прямоугольной сетки в 2-8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к такому же повышению точности, которой обладают численные решения, полученные с учетом заполненности ячеек.

Ключевые слова: схемы расщепления по физическим процессам, течение Куэтта-Тейлора, погрешность численного решения.

**ACCOUNTING METHOD OF FILLING CELLS
FOR THE HYDRODYNAMICS PROBLEMS SOLUTION
WITH COMPLEX GEOMETRY OF THE COMPUTATIONAL DOMAIN**

A.I. Sukhinov¹, A.E. Chistyakov¹, E.A. Protsenko², V.V. Sidoryakina², S.V. Protsenko¹

¹Don State Technical University, Rostov-on-Don

²Chekhov Taganrog Institute Taganrog branch of Rostov State University of Economics (RSUE), Taganrog

The article is devoted to the development and application of the filling cells method for the hydrodynamics problems solution with complicated geometry of the computational domain, in particular, liquid, to increase the smoothness and accuracy of a finite-difference solution. The spatial-two-dimensional flow problem of a viscous fluid between two coaxial semi-cylinders and the spatial-three-dimensional problem of wave propagation in the coastal zone demonstrate the possibilities of the proposed method. The rectangular grids are used to solve these problems, taking into account the filling of cells. The approximation of problems have been used splitting schemes in time for physical processes and the approximation in spatial variables is made using the balance method, taking into account the filling of cells and without it. Analytical solution describing the Taylor-Couette flow is used as a reference to assess the accuracy of the numerical solution of the first problem. The simulation was performed on a sequence of condensing computational grids with the following dimensions: 11×21, 21×41, 41×81 and 81×161 nodes in the case of using the method and without using it. In the case of the direct use of rectangular grids (stepwise approximation of boundaries), the relative error of the calculations reaches 70%; under the same conditions, the use of the proposed method allows to reduce the error to 6%. It is shown that splitting up rectangular grid by 2-8 times in each of the spatial directions does not lead to the same increase of the numerical solutions accuracy, obtained taking into account the filling of the cells.

Key words: splitting schemes for physical processes, the Taylor-Couette flow, the error of numerical solution.

1. Введение

В [1] предложены разностные схемы, учитывающие степень заполненности ячеек, для решения двумерных задач волновой гидродинамики с динамически перестраиваемой геометрией расчетной области. Показано, что решения, полученные на основе данных схем, лишены дефектов, связанных со ступенчатой аппроксимацией границы. Позже на основе данных схем разработана трехмерная математическая модель движения водной среды в Азовском море [2]. При максимальной глубине водоема 14.2 метра ветровые нагоны могут достигать 4 метра и более. В качестве механизма перестроения геометрии водоема использован динамический пересчет запол-

ненности ячеек. Данная модель показала достаточно высокую точность и большой запас устойчивости. Так, при расчете штормового нагона, который произошел в сентябре 2014 года (скорость ветра достигала 40 м/с и более), ошибка моделирования функции возвышения уровня составила 20 см при подъеме уровня более чем на 4 метра. Результаты моделирования отставали по времени на 15 минут на временном интервале штормовых явлений порядка 1000 минут [3]. Традиционно при моделировании гидродинамики мелководных водоемов используют σ -координатную систему [4-6]. Решения, полученные на данных сетках, обладают большой погрешностью и плохо описывают влияние рельефа дна на структуру течений. В качестве альтернативы прямоугольным сеткам, которые обладают низкой точностью в случае ступенчатой аппроксимации границы, сейчас используют неструктурированные адаптивные сетки, которые достаточно точно аппроксимируют границу [7, 8]. Методы построения трехмерных неструктурированных сеток для решения задач с разрывными коэффициентами подробно описаны в [9-11].

В настоящее время отсутствует универсальный метод построения оптимальных трехмерных расчетных сеток [7]. Не преуменьшая значимости развития методов моделирования на неструктурированных сетках, можно утверждать, что разработка математических моделей на прямоугольных сетках и сейчас является актуальной задачей. Целью данной работы является количественное исследование точности схем, учитывающих степень заполненности ячеек на прямоугольной сетке для модельных и реальной задач.

2. Постановка модельной задачи

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в двумерной области между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами. Введем систему координат xOy перпендикулярно оси цилиндров. Начало системы координат совпадает с осью цилиндров. В сечении цилиндра плоскостью $x = 0$ задается поле скорости. Требуется определить вектор скоростей для движущейся жидкости. Исходными уравнениями являются [8, 12, 13]:

– уравнение Навье – Стокса:

$$u'_t + uu'_x + vv'_y = -P'_x / \rho + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y = -P'_y / \rho + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y; \quad (2)$$

– уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$u'_x + v'_y = 0. \quad (3)$$

Уравнения (1)-(3) рассматриваются при следующих граничных условиях:
– на входной и выходной границе задается поток:

$$u(x, y, t) = U(x, y), \quad v(x, y, t) = V(x, y), \quad P'_n(x, y, t) = 0, \quad (4)$$

– на боковых поверхностях задается условие непроницаемости и скольжения (в случае $|\boldsymbol{\tau}| = 0$, то есть без трения):

$$P'_n(x, y, t) = 0, \quad \mathbf{u}_n(x, y, t) = 0, \quad \rho \mu u'_y(x, y, t) = -\tau_x(t), \quad \rho \mu v'_x(x, y, t) = -\tau_y(t) \quad (5)$$

или условие прилипания:

$$P'_n(x, y, t) = 0, \quad u(x, y, t) = 0, \quad v(x, y, t) = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{u} = \{u, v\}$ – вектор скорости движения водной среды; (x, y) – декартова система координат, t – время, P – давление; μ – коэффициент турбулентного обмена; ρ – плотность жидкости; \mathbf{n} – вектор нормали; τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения на дне жидкости.

Тангенциальное напряжение, вызванное донным трением, согласно закону Ван-Дорна, рассчитывается по формулам [6]:

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \{\tau_x, \tau_y\} = \rho C_p \mathbf{u} |\mathbf{u}|, \quad (7)$$

где C_p – безразмерный коэффициент.

3. Дискретная модель гидродинамики

Расчетная область вписана в прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи волновой гидродинамики вводится равномерная сетка:

$$w_h = \left\{ t^n = n\tau, \quad x_i = ih_x, \quad y_j = jh_y; \quad n = \overline{0, \dots, N_t}, \quad i = \overline{0, \dots, N_x}, \quad j = \overline{0, \dots, N_y}; \right.$$

$$\left. N_t \tau = T, \quad N_x h_x = l_x, \quad N_y h_y = l_y \right\},$$

где τ – шаг по времени, h_x, h_y – шаги по пространству, N_t – наибольшее число шагов по времени, N_x, N_y – количество шагов пространственной сетки по направлению Ox и Oy соответственно.

Воспользуемся схемой расщепления по физическим процессам [13, 14]. Решение исходной задачи (1)-(3) сводится к решению расщепленной цепочки задач на каждом шаге по времени:

$$\frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} + uu'_x + vv'_y = (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y, \quad (8)$$

$$\frac{v^{n+\sigma} - v^n}{\tau} + uv'_x + vv'_y = (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \quad (9)$$

$$P_{xx}'' + P_{yy}'' = \frac{\rho}{\tau} \left((u^{n+\sigma})'_x + (v^{n+\sigma})'_y \right), \quad (10)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_x}{\rho}, \quad \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_y}{\rho}, \quad (11)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями; верхний индекс « $n + \sigma$ » означает, что соответствующая компонента вектора скорости является промежуточной.

Расчетные ячейки представляют собой прямоугольники, они могут быть заполненными, частично заполненными или пустыми. Центры ячеек и узлы разнесены на $h_x/2$ и $h_y/2$ по координатам x и y соответственно. Поле скоростей и давление рассчитываются в вершинах ячейки, как представлено на рис.1. Вершинами ячейки (i, j) являются узлы (i, j) , $(i - 1, j)$, $(i, j - 1)$, $(i - 1, j - 1)$.

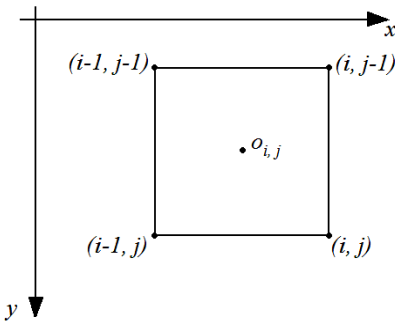


Рис.1. Расположение ячейки относительно прилегающих к ней узлов.

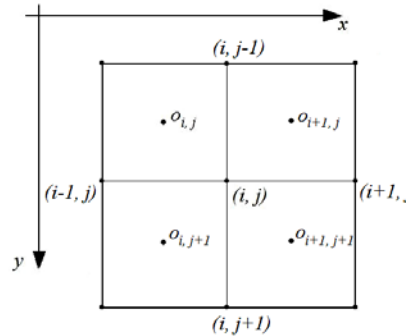


Рис.2. Расположение узлов относительно ячеек.

Обозначим через $o_{i,j}$ заполненность ячейки. Под заполненностью будем понимать отношение заполненной жидкостью площади ячейки ко всей её площади. Узел (i, j) является общим для ячеек (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i + 1, j + 1)$ (см. рис. 2).

Введем коэффициенты k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 , описывающие заполненность областей, находящихся в окрестности данной ячейки. Значение k_0 характеризует заполненность области $\Omega_0: x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1})$, $k_1 - \Omega_1: x \in (x_i, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1})$, $k_2 - \Omega_2: x \in (x_{i-1}, x_i), y \in (y_{j-1}, y_{j+1})$, $k_3 - \Omega_3: x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_j, y_{j+1})$, $k_4 - \Omega_4: x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_j)$. Заполненные части областей Ω_m будем называть D_m , где $m = \overline{0, \dots, 4}$. В соответствии с этим коэффициенты k_m можно вычислить по формулам

$$(k_m)_{i,j} = \frac{S_{D_m}}{S_{\Omega_m}}, \quad (k_0)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{4}, \quad (k_1)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1}}{2},$$

$$(k_2)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (k_3)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (k_4)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j}}{2},$$

где S_{D_m} – площадь заполненной части ячейки (i, j) , S_{Ω_m} – общая площадь ячейки (i, j) .

Для первой подзадачи расщепленной схемы уравнений гидродинамики (8), (9) – граничные условия, которые в общем случае примут вид

$$u'_x(x, y, t) = \alpha_{u,x}u + \beta_{u,x}, \quad v'_x(x, y, t) = \alpha_{v,x}v + \beta_{v,x},$$

$$u'_y(x, y, t) = \alpha_{u,y}u + \beta_{u,y}, \quad v'_y(x, y, t) = \alpha_{v,y}v + \beta_{v,y}. \quad (12)$$

Проинтегрируем уравнение (8) по области D_0 и воспользуемся свойством линейности интеграла, в результате получим

$$\iint_{D_0} \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} dx dy + \iint_{D_0} uu'_x dx dy + \iint_{D_0} vv'_y dx dy = \iint_{D_0} (\mu u'_x)'_x dx dy + \iint_{D_0} (\eta v'_y)'_y dx dy. \quad (13)$$

Вычислим отдельно каждый из полученных интегралов.

$$\iint_{D_0} \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} dx dy = (k_0)_{i,j} \iint_{\Omega_0} \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} dx dy = (k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^n}{\tau} h_x h_y. \quad (14)$$

Второй интеграл в выражении (13) запишем в виде

$$\iint_{D_0} uu'_x dx dy = \iint_{D_1} uu'_x dx dy + \iint_{D_2} uu'_x dx dy = (k_1)_{i,j} \iint_{\Omega_1} uu'_x dx dy + (k_2)_{i,j} \iint_{\Omega_2} uu'_x dx dy.$$

Вычисляя интегралы по областям Ω_1 и Ω_2 , получим

$$\iint_{D_0} uu'_x dx dy = \frac{(k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} h_y (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} h_y (u_{i,j} - u_{i-1,j})}{2}. \quad (15)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части выражения (13):

$$\iint_{D_0} (\mu u'_x)'_x dx dy = \iint_{D_1} (\mu u'_x)'_x dx dy + \iint_{D_2} (\mu u'_x)'_x dx dy.$$

В последнем равенстве для определенности положим, что $S_{D_1} > S_{D_2}$, выделим из области D_1 фрагмент $D_{1,2}$, смежный с областью D_2 , причем $S_{D_2} = S_{D_{1,2}}$ (рис.3).

$$\begin{aligned} \iint_{D_0} (\mu u'_x)'_x dx dy &= \iint_{D_1/D_{1,2}} (\mu u'_x)'_x dx dy + \iint_{D_{1,2} \cup D_2} (\mu u'_x)'_x dx dy = \\ &\approx ((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j}) \iint_{\Omega_1} (\mu u'_x)'_x dx dy + (k_2)_{i,j} \iint_{\Omega_0} (\mu u'_x)'_x dx dy. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \iint_{D_0} (\mu u'_x)'_x dx dy &\approx \left((k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} - \right. \\ &\left. - ((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j}) \mu_{i,j} (\alpha_{u,x} u_{i,j} + \beta_{u,x}) \right) h_y. \end{aligned} \quad (16)$$

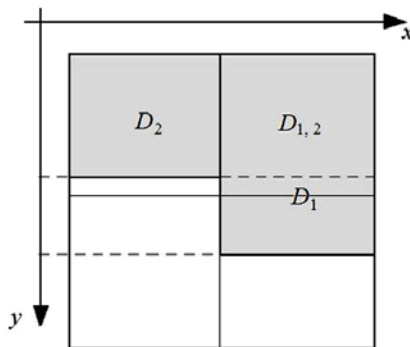


Рис.3. Схема заполненности областей.

В случае если $S_{D_2} > S_{D_1}$, результат будет аналогичным. Подставим в уравнение (13) выражения (14)-(16), в результате получим

$$\begin{aligned}
& (k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^n}{\tau} h_x h_y + \\
& + \left((k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} h_y (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} h_y (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right) / 2 + \\
& + \left((k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2} h_x (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2} h_x (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \right) / 2 = \\
& = \left((k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} - \right. \\
& - \left. ((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j}) \mu_{i,j} (\alpha_{u,x} u_{i,j} + \beta_{u,x}) \right) h_y + \left((k_3)_{i,j} \eta_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} - \right. \\
& - \left. (k_4)_{i,j} \eta_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} - ((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j}) \eta_{i,j} (\alpha_{u,y} u_{i,j} + \beta_{u,y}) \right) h_x. \tag{17}
\end{aligned}$$

Разделим полученное выражение на площадь ячейки $h_x h_y$, получим

$$\begin{aligned}
& (k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^n}{\tau} + (k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2h_x} + (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + \\
& + (k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{2h_y} + (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{2h_y} = \\
& = (k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x^2} - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x^2} - \\
& - \left((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j} \right) \mu_{i,j} \frac{\alpha_{u,x} u_{i,j} + \beta_{u,x}}{h_x} + (k_3)_{i,j} \eta_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y^2} - \\
& - (k_4)_{i,j} \eta_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y^2} - \left((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j} \right) \eta_{i,j} \frac{\alpha_{u,y} u_{i,j} + \beta_{u,y}}{h_y}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить дискретные аналоги для уравнений (9)-(12). С целью упрощения записи уравнений вводится «маска» граничного условия: $m_{i,j}$. Параметр $m_{i,j}$ принимает значение 1 в случае, если узел (i,j) принадлежит множеству граничных узлов, находящихся в приграничной области, где происходит скольжение с трением, в противном случае $m_{i,j} = 0$. С учетом вышеописанных обозначений дискретная модель

задачи гидродинамики может быть представлена следующими сеточными уравнениями [15]:

– для составляющей вектора скорости $u_{i,j}$ в случае условия скольжения:

$$\begin{aligned}
 & (k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^n}{\tau} + (k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j}^n \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\
 & + (k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2}^n \frac{u_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_y} + (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2}^n \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{2h_y} = \\
 & = (k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} + \\
 & + (k_3)_{i,j} \mu_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - (k_4)_{i,j} \mu_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - \\
 & - \left| (k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j} \right| \frac{\tau_x}{\rho h_y} m_{i,j};
 \end{aligned}$$

в случае условия прилипания:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - (k_0)_{i,j} u_{i,j}^n}{\tau} + (k_{1,2})_{i,j} u_{i+1/2,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\
 & + (k_{1,2})_{i,j} u_{i-1/2,j}^n \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\
 & + (k_{3,4})_{i,j} v_{i,j+1/2}^n \frac{u_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_y} + (k_{3,4})_{i,j} v_{i,j-1/2}^n \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{2h_y} = \\
 & = (k_{1,2})_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} - (k_{1,2})_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} + \\
 & + (k_{3,4})_{i,j} \mu_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - (k_{3,4})_{i,j} \mu_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{h_y^2},
 \end{aligned}$$

$$(k_{1,2})_{i,j} = \min\{(k_1)_{i,j}, (k_2)_{i,j}\}, \quad (k_{3,4})_{i,j} = \min\{(k_3)_{i,j}, (k_4)_{i,j}\};$$

для составляющей вектора скорости $v_{i,j}$ в случае условия скольжения:

$$\begin{aligned}
& (k_0)_{i,j} \frac{v_{i,j}^{n+\sigma} - v_{i,j}^n}{\tau} + (k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j}^n \frac{v_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j}^n \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\
& + (k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2}^n \frac{v_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_y} + (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2}^n \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{2h_y} = \\
& = (k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{v_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} + \\
& + (k_3)_{i,j} \mu_{i,j+1/2} \frac{v_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - (k_4)_{i,j} \mu_{i,j-1/2} \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - \\
& - \left| (k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j} \right| \frac{\tau_y}{\rho h_x} m_{i,j};
\end{aligned}$$

в случае условия прилипания:

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{i,j}^{n+\sigma} - (k_0)_{i,j} v_{i,j}^n}{\tau} + (k_{1,2})_{i,j} u_{i+1/2,j}^n \frac{v_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\
& + (k_{1,2})_{i,j} u_{i-1/2,j}^n \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\
& + (k_{3,4})_{i,j} v_{i,j+1/2}^n \frac{v_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_y} + (k_{3,4})_{i,j} v_{i,j-1/2}^n \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{2h_y} = \\
& = (k_{1,2})_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{v_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} - (k_{1,2})_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} + \\
& + (k_{3,4})_{i,j} \mu_{i,j+1/2} \frac{v_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - (k_{3,4})_{i,j} \mu_{i,j-1/2} \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{h_y^2};
\end{aligned}$$

– для расчета поля давления:

$$\begin{aligned}
& (k_1)_{i,j} \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{h_x^2} - (k_2)_{i,j} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h_x^2} + (k_3)_{i,j} \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{h_y^2} - (k_4)_{i,j} \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{h_y^2} = \\
& = \frac{\rho}{\tau} \left(\frac{(k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j}^{n+\sigma} - (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j}^{n+\sigma}}{h_x} + \frac{(k_2)_{i,j} - (k_1)_{i,j}}{h_x} U_{i,j} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2}^{n+\sigma} - (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2}^{n+\sigma}}{h_y} + \frac{(k_4)_{i,j} - (k_3)_{i,j}}{h_y} V_{i,j} \Big];$$

– уравнениями для уточнения поля скоростей по давлению:

$$(k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\sigma}}{\tau} = - \left((k_1)_{i,j} \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{2h_x \rho} + (k_2)_{i,j} \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x \rho} \right),$$

$$(k_0)_{i,j} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+\sigma}}{\tau} = - \left((k_3)_{i,j} \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{2h_y \rho} + (k_4)_{i,j} \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y \rho} \right).$$

Проведено исследование погрешности аппроксимации модели. Показано, что погрешность аппроксимации есть величина $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$ во внутренних узлах сетки и $O(\tau + h_x + h_y)$ – в граничных узлах. Достаточное условие монотонности схем для метода поправки к давлению определяется на основе принципа максимума [16, 17] при ограничениях на шаг по пространству: $h_x < |2\mu / u|$, $h_y < |2\mu / v|$ или $Re \leq 2N$, где $Re = u \cdot l / \mu$ – число Рейнольдса, u – скорость движения водной среды, l – характерный размер области, μ – коэффициент турбулентного обмена.

Для решения полученных сеточных уравнений был применен адаптивный модифицированный попеременно-треугольный метод вариационного типа [17-19].

4. Течение Куэтта – Тейлора

Рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами:

$$uu'_x + vv'_y = -\rho^{-1} P'_x + \mu \Delta u, \quad uv'_x + v\eta'_y = -\rho^{-1} P'_y + \mu \Delta v,$$

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (19)$$

Предположим, на внутренней стороне скорость вращения $|\mathbf{u}|_{r=r_1} = u_1$, на внешней стороне скорость вращения $|\mathbf{u}|_{r=r_2} = u_2$. Для решения задачи введена полярная система координат ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$)

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right),$$

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right).$$

С учетом того, что $v_r = 0$, $v_\theta = v_\theta(r)$ и $P = P(r)$, получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{u_\theta^2}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) = 0.$$

Аналитическим решением данной задачи является функция [20]:

$$u_\theta(r) = c_1 r + c_2 / r, \quad P(r) = P(r_1) + \rho \int_{r_1}^r (u_\theta^2 / r) dr.$$

Для сопоставления результатов численных расчетов с аналитическим решением возьмем $r_1 = 5$ м, $r_2 = 10$ м, $u_1 = 1$ м/с, $u_2 = 0.5$ м/с.

В данном случае аналитическое решение примет вид

$$u_\theta(r) = 5 / r, \quad P(r) = P(r_1) - 12.5\rho / r^2 + \rho / 2.$$

Аналитическое решение в декартовой системе координат примет вид

$$u(x, y) = -\frac{5y}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{5x}{x^2 + y^2}, \quad P(x, y) = P(r_1) - \frac{12.5\rho}{x^2 + y^2} + \rho / 2. \quad (20)$$

5. Тестирование разностных схем, учитывающих заполненность ячеек

Рассматривается задача нахождения численного течения вязкой жидкости между двумя соосными полуцилиндрами ($x \geq 0$). Радиус внутреннего цилиндра $r_1 = 5$ м. Радиус внешнего цилиндра $r_2 = 10$ м. Расчетная область вписана в прямоугольник размерами 10×20 м ($0 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$). В сечении цилиндра плоскостью $x = 0$ задается поле скорости $u(0, y) = -5/y$ м/с, $v(0, y) = 0$ м/с. Во всех остальных узлах сетки поле скорости рассчитывается. На внутренней и внешней стенках цилиндра задаются условия скользящего и непротекания.

Погрешности численных решений наиболее отчетливо видны на грубых сетках. Опишем параметры грубой сетки. Шаги по пространственным направлениям равны 1 м, шаг по времени 0.1 с, размеры сетки 21×11 узлов, величина расчетного временного интервала – 10 с, плотность среды $\rho = 1000$ кг/м³, коэффициент турбулентного обмена $\mu = 1$ м²/с.

На рис.4 представлено содержимое массива, описывающего степень заполненности ячеек в случае использования расчетной сетки 21×11 .

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|
| 0 | 0.983 | 0.883 | 0.678 | 0.362 | 0.03 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.894 | 0.344 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.59 | 0.01 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.59 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.344 | 0 |
| 5 | 0.034 | 0.24 | 0.683 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.894 | 0.03 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0.453 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.362 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.683 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.678 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.883 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.034 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.983 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.034 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.983 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.883 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.683 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.678 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0.453 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.362 |
| 14 | 0.034 | 0.24 | 0.683 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.894 | 0.03 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.344 | 0 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.59 | 0 | 0 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.59 | 0.01 | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.894 | 0.344 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 19 | 0.983 | 0.883 | 0.678 | 0.362 | 0.03 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Рис.4. Степень заполненности ячеек для сетки 21×11 узлов.

Численное решение задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами представлено на рис.5. Цветом показаны потоки движения жидкости $|k_0 \mathbf{u}|$.

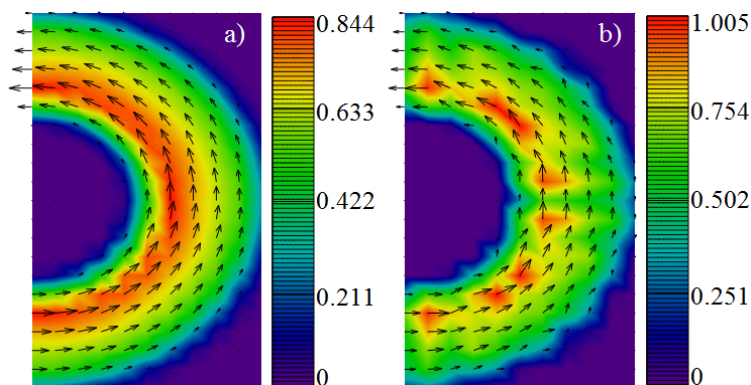


Рис.5. Численное решение задачи: а – случай использования частичной заполненности ячеек, б – случай ступенчатой границы раздела двух сред.

Рис.6а демонстрирует, что решение задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами, полученное на сетках, учитывающих заполненность ячеек, является достаточно гладким. Решение, представленное на рис.6б, имеет существенные ошибки в определении направления векторов

скорости, связанные со ступенчатой аппроксимацией границы раздела двух сред.

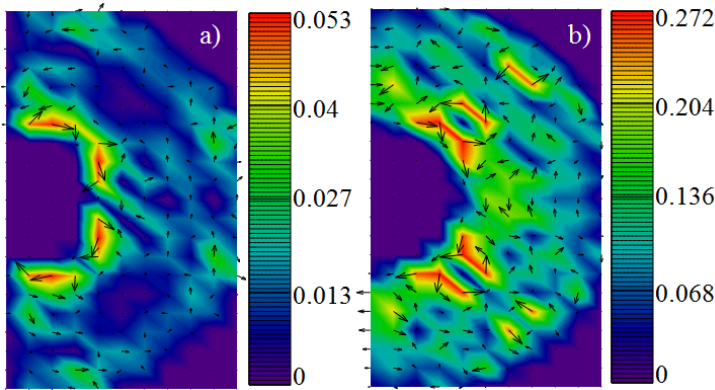


Рис.6. Поле, полученное как разность между численным и аналитическим решениями задачи: а – случай гладкой границы, б – случай ступенчатой границы.

На рис.7,8 представлены погрешности численного решения задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами на сетках, учитывающих заполненность ячеек (случай гладкой границы), и на сетках со ступенчатой аппроксимацией границы. Для численного исследования точности предложенных схем найдено решение на последовательности сгущающихся сеток. На рис.8 представлено численное решение исходной задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами на более подробных сетках размерами 21×41 и 41×81 узлов.

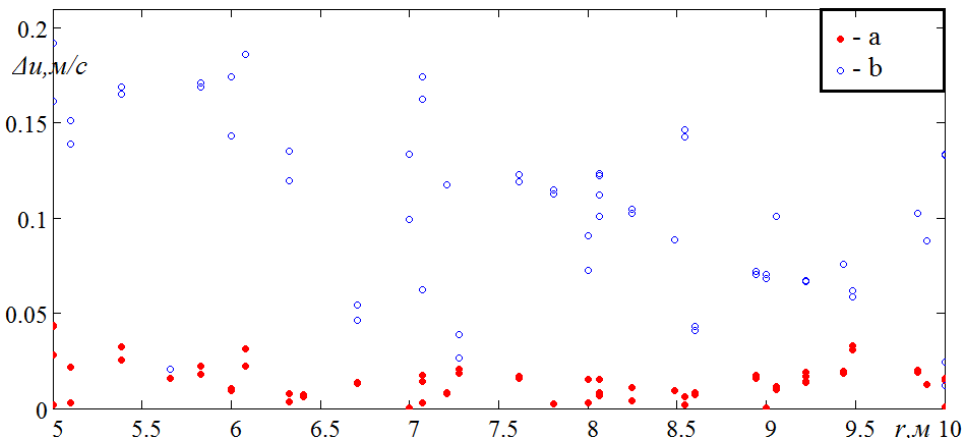


Рис.7. Зависимости погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами от радиуса: а – с использованием метода учета заполненности ячеек, б – без учета заполненности ячеек.

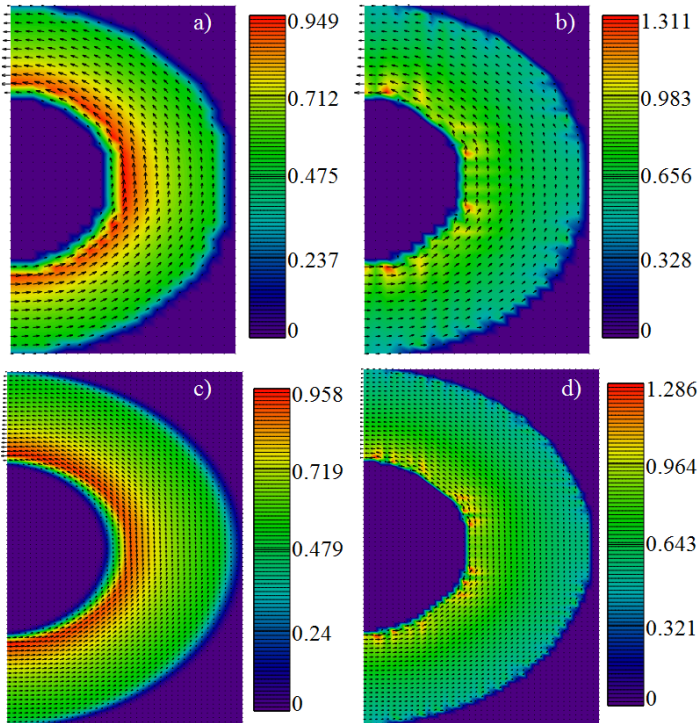


Рис.8. Численное решение задачи: а,с – с использованием метода учета заполненности ячеек; b,d – без учета заполненности ячеек; а,b – размеры расчетной сетки 21×41 узлов; с,d – 41×81 узлов.

На рис.9 представлены значения погрешностей численного решения задачи течения жидкости, зависящие от радиуса (кружками показана погрешность в случае гладкой границы, окружностями – в случае ступенчатой границы).

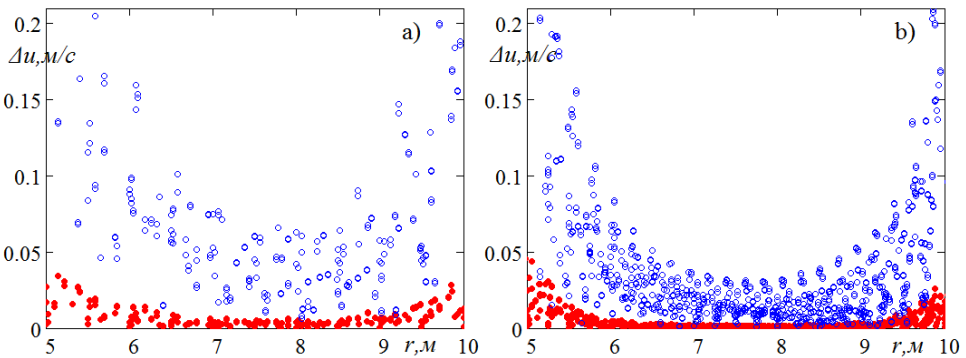


Рис.9. Зависимости погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами от радиуса на сетке размерами: а – 21×41 узлов, b – 41×81 узлов.

Рис.7,9 демонстрируют, что в случае ступенчатой аппроксимации границы, для задачи течения водной среды увеличение числа узлов расчетных сеток приводит не к повышению точности, например, в норме сеточного пространства C , а к уменьшению линейных размеров приграничной области, где проявляются дефекты решения, связанные с грубой аппроксимацией границы. Следует отметить, что при использовании сеток, учитывающих заполненность ячеек, погрешности численного решения модельных задач гидродинамики, вызванная аппроксимацией границы, не превосходят 6% от решения задачи.

В табл.1 представлены значения погрешностей численного решения задачи течения жидкости между двумя соосными полуцилиндрами, полученные на последовательности сгущающихся расчетных сеток размерами: 11×21 , 21×41 , 41×81 и 81×161 узлов в случаях гладкой и ступенчатой границы.

Таблица 1. Погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами.

| Размеры сетки | 11×21 | 21×41 | 41×81 | 81×161 |
|---|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| Максимальное значение погрешности в случае гладкой границы, м/с | 0.053 | 0.052 | 0.058 | 0.056 |
| Среднее значение погрешности в случае гладкой границы, м/с | 0.023 | 0.012 | 0.006 | 0.003 |
| Максимальное значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с | 0.272 | 0.731 | 0.717 | 0.75 |
| Среднее значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с | 0.165 | 0.132 | 0.069 | 0.056 |

Анализ результатов расчетов погрешности численного решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами на последовательности сгущающихся сеток, представленных в табл.1, позволяет сделать вывод об эффективности использования разностных схем, учитывающих заполненность ячеек. При решении модельной задачи дробление сетки в 8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к заметному повышению точности, которой обладают решения, полученные на сетках, учитывающих заполненность ячеек.

6. Решение трехмерной задачи волновой гидродинамики на основе разностных схем, учитывающих заполненность ячеек

Исходными уравнениями гидродинамики мелководных водоемов являются:

– уравнение движения (Навьё – Стокса):

$$u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v u'_z)'_z,$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z, \quad (21)$$

$$w'_t + uw'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + g ;$$

– уравнение неразрывности в случае переменной плотности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \quad (22)$$

где $V = \{u, v, w\}$ – компоненты вектора скорости, P – давление, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность, μ, ν – горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена соответственно. Геометрия расчетной области представлена на рис. 10.

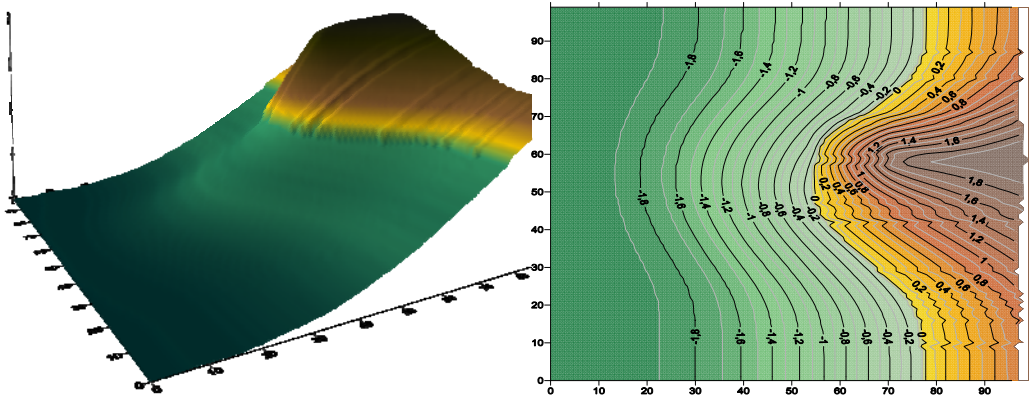


Рис.10. Геометрия расчетной области.

Система уравнений (21)-(22) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на входе:

$$u(x, y, z, t) = u(t), \quad v(x, y, z, t) = v(t), \quad P'_n(x, y, z, t) = 0, \quad V'_n(x, y, z, t) = 0,$$

– боковая граница (берег и дно):

$$\rho \mu (u')_n(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad \rho \mu (v')_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t),$$

$$V'_n(x, y, z, t) = 0, \quad P'_n(x, y, z, t) = 0;$$

– верхняя граница:

$$w(x, y, t) = -\omega - P'_t / \rho g, \quad P'_n(x, y, t) = 0, \quad (23)$$

где ω – интенсивность испарения жидкости, τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения. Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности: $\tau_x = \rho_a C_s w_x |\mathbf{w}|$, $\tau_y = \rho_a C_s w_y |\mathbf{w}|$, где \mathbf{w} – вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a – плотность атмосферы, $C_s = 0.0026$ – безразмерный коэффициент, который зависит от скорости ветра, рассматривается в диапазоне 0.0016 – 0.0032.

Составляющие тангенциального напряжения для дна с учетом введенных обозначений могут быть записаны следующим образом: $\tau_x = \rho C_b u |V|$, $\tau_y = \rho C_b v |V|$, $C_b = gn^2 / h^{1/3}$, h – глубина, $n = 0.04$ – групповой коэффициент шероховатости по формуле Мэннинга, в зависимости от шероховатости дна лежит в диапазоне 0.025 – 0.2.

Рассмотренная ниже аппроксимация позволяет на основании измеренных пульсаций скоростей строить коэффициент вертикального турбулентного обмена, неоднородный по глубине (см. [12]):

$$v = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\partial \bar{U} / \partial z\right)^2 + \left(\partial \bar{V} / \partial z\right)^2}, \quad (24)$$

где \bar{U}, \bar{V} – осредненные по времени пульсации горизонтальных компонент скорости, Δ – характерный масштаб сетки, C_s – безразмерная эмпирическая константа, значение которой обычно определяется на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности.

Далее рассмотрена задача расчета пространственно-трехмерного распределения давлений и вектора скоростей водной среды. В качестве примера практического использования данной модели и метода учета частичной заполненности ячеек решается задача расчета полей скорости и давления. Выделенный участок моделирования имеет размеры 50 м на 50 м по горизонтальным направлениям и глубину 2 м, пиковая точка возвышается над уровнем моря на 2 м. Источник возмущений задается на некотором расстоянии от линии берега. В начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя. Для решения поставленной задачи использована сетка размерами 100×100×40, шаг по времени равен 0.01 секунды.

На рис.11 изображено распределение скоростей движения водной среды при накате волны на берег; одновременно показано динамически изменяющаяся функция возвышения уровня, положение которой рассчитано на основе метода учета заполненности ячеек и определения зон затопления и осушения.

На рис.12 показано затопление участка суши. Численное моделирование осуществлялось с использованием динамического пересчета функции заполненности расчетных ячеек. Предложенный подход позволяет решать задачи на прямоугольных сетках с удовлетворительной точностью в областях со сложной и динамически перестраиваемой геометрией границы. Следует отметить, что разработанный программный комплекс обладает отличительной особенностью, при моделировании распространения поверхностных колебаний учитывается выход волны на берег. В [21, 22] описан подход к моделированию задач гидродинамики со свободной поверхностью за счет пересчета заполненностей расчетных ячеек. Предложенный в работе подход не требует решения уравнения переноса и информации о геометрии функции раздела сред при пересчете заполненности ячеек. Другой положительной особенностью предложенной модели является непосредственный учет частичной заполненности в разностных схемах.

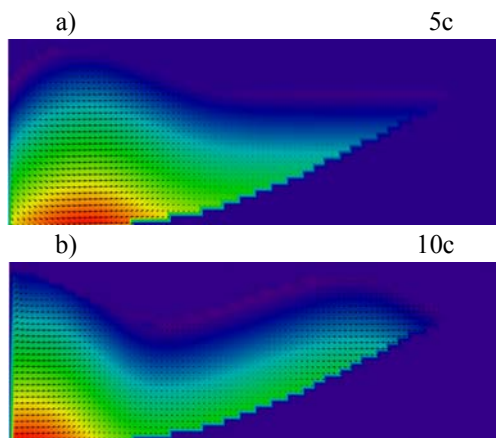


Рис.11. Распределение вектора скорости движения водной среды (сечение плоскостью xOz).

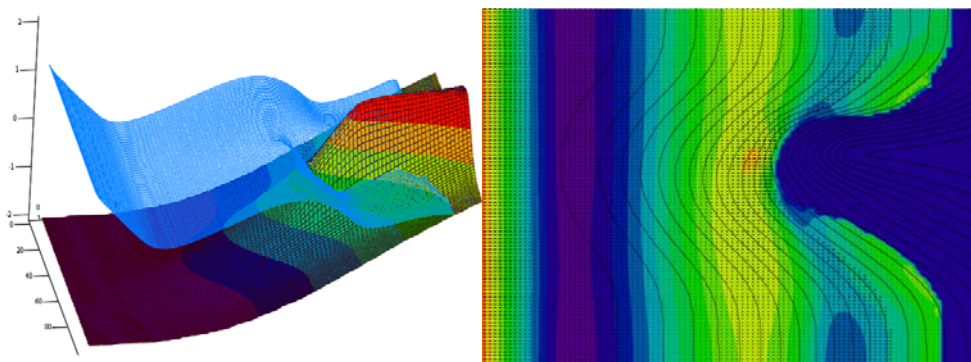


Рис.12. Функция возвышения уровня и рельефа дна.

7. Заключение

Предложен метод учета заполненности ячеек прямоугольной сетки для повышения точности и гладкости численного решения задач гидродинамики. Рассмотрена задача нахождения численного течения вязкой жидкости между двумя соосными полуцилиндрами. Для оценки точности численного решения задач гидродинамики в качестве эталона используется аналитическое решение, описывающее течение Куэтта-Тейлора. Моделирование производилось на последовательности сгущающихся расчетных сеток размерами: 11×21 , 21×41 , 41×81 и 81×161 узлов в случаях гладкой и ступенчатой границы. Для повышения гладкости решения использованы сетки, учитывающие заполненность ячеек. В случае ступенчатой аппроксимации границы раздела двух сред погрешность расчетов достигает 70% от решения задачи. При использовании сеток, учитывающих заполненность ячеек, относительная погрешность численного решения модельных задач гидродинамики, вызванная, в основном, аппроксимацией границы, не превосходит 6% от решения задачи. Показано, что дробление сетки в 8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к повышению точности, которой обладают решения, полученные на сетках, учитывающих заполненность ячеек.

Решена пространственно-трехмерная задача волновой гидродинамики. Применение метода учета заполненности ячеек позволило естественным образом моделировать поведение функции возвышения уровня, выход волны на сушу и процессы затопления и осушения участков берега.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.F. Timofeeva, A.V. Shishenya*. Mathematical model for calculating coastal wave processes // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, v.5. №2, p.122-129. DOI: 10.1134/S2070048213020087
2. *A.I. Sukhinov, A.A. Sukhinov*, Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models *Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications 2005*, p.231-238. DOI: 10.1016/B978-044452024-1/50030-0.
3. *А.В. Никитина, М.В. Пучкин, И.С. Семенов, А.И. Сухинов, Г.А. Угольницкий, А.Б. Усов, А.Е. Чистяков*. Дифференциально-игровая модель предотвращения заморозов в мелководных водоемах // *Управление большими системами: сб. трудов*, 2015, № 55, с.343-361; *A.V. Nikitina, M.V. Puchkin, I.S. Semenov, A.I. Sukhinov, G.A. Ugolnitskii, A.B. Usov, A.E. Chistiakov*. *Differentsialno-igrovaia model predotvrashcheniia zamorov v melkovodnykh vodoemakh // Upravlenie bolshimi sistemami: sbornik trudov*, 2015, № 55, s.343-361.
4. *А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Е.В. Алексеенко*. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // *Математическое моделирование*, 2011, т.23, №3, с.3-21;

- A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, and E.V. Alekseenko.* Numerical Realization of the Three-Dimensional Model of Hydrodynamics for Shallow Water Basins on a High-Performance System // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2011, v.3, №5, p.562-574.
5. *А.С. Монин.* Турбулентность и микроструктура в океане // *Успехи физических наук*, 1973, т.109, №2, с.333-354;
A.S. Monin. Turbulence and microstructure in the ocean // *Physics-Usppekhi*, 1973, v.16, №1, p.121-131.
 6. *Ю.И. Шокин.* Вычислительный эксперимент в проблеме цунами / Ю.И. Шокин, Л.Б. Чубаров, А.Г. Марчук, К.В. Симонов. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1989, 164 с.;
Yu.I. Shokin. Vychislitel'nyi eksperiment v probleme tsunami / Yu.I. Shokin, L.B. Chubarov, An.G. Marchuk, K.V. Simonov. – Novosibirsk: Nauka. Sib. otdelnie 1989. 164 s.
 7. *Б.Н. Четверушкин, М.В. Якововский.* Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*, 2018, 052, 12 с.;
B.N. Chetverushkin, M.V. Yakobovskiy. Vychislitelnye algoritmy i arkhitektura sistem vysokoy proizvoditelnosti // *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2018, 052, 12 s.
 8. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Гидродинамика. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат.лит., 1986, 736 с.;
L.D. Landau, E.M. Lifshits. *Gidrodinamika*. – М.: Nauka, Gl. red. fiz-mat.lit., 1986, 736 s.
 9. *М.М. Краснов, П.А. Кучугов, М.Е. Ладонкина, В.Ф. Тишкин.* Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // *Математическое моделирование*, 2017, т.29, №2, с.3-22;
M.M. Krasnov, P.A. Kuchugov, M.E. Ladonkina, V.F. Tishkin. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids: Using the operator programming method // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, v.9, №5, p.529-543.
 10. *О.Ю. Милюкова, В.Ф. Тишкин.* Многосеточный метод для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом со специальным выбором сеток // *Математическое моделирование*, 2015, т.27, №9, с.17-32;
O.Yu. Milyukova, V.F. Tishkin. A multigrid method for a heat equation with discontinuous coefficients with a special choice of grids // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2016, v.8, №2, p.118-128.
 11. *В.А. Гасилов, И.В. Гасилова, Л.В. Клочкова, Ю.А. Повецenco, В.Ф. Тишкин.* Разностные схемы на основе метода опорных операторов для задач динамики флюидов в коллекторе, содержащем газогидраты // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2015, т.55, №8, с.1341-1355;
V.A. Gasilov, I.V. Gasilova, L.V. Klochkova, Yu.A. Poveshchenko, V.F. Tishkin. Difference schemes based on the support operator method for fluids dynamics problems in a collector containing gas hydrates // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, v.55, №8, p.1310-1323.
 12. *О.М. Белоцерковский.* Турбулентность: новые подходы. – М.: Наука, 2003, 286 с.;
O.M. Belotserkovskiy. Turbulentnost: novye podkhody. – М.: Nauka, 2003, 286 s.
 13. *О.М. Белоцерковский, В.А. Гушчин, В.В. Щенников.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1975, т.15, №1, с.197-207;
O.M. Belotserkovskii, V.A. Gushchin, V.V. Shchennikov. Use of the splitting method to solve problems of the dynamics of a viscous incompressible fluid USSR // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1975, v.15, №1, p.190-200.

14. О.М. Белоцерковский, В.А. Гуцин, В.Н. Коньшин. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1987, т.27, №4, с.594-609;
O.M. Belotserkovskiy, V.A. Gushchin, V.N. Kon'shin. The splitting method for investigating flows of a stratified liquid with a free surface // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1987, v.27, №2, p.181-191.
15. А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Н.А. Фоменко. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия ЮФУ. Технические науки, 2013, №4 (141), с.87-98;
A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, N.A. Fomenko. Metodika postroyeniya raznostnykh skhem dlia resheniia zadach diffuzii-konveksii-reaktsii, uchityvaiushchikh stepen zapolnennosti kontrolnykh iacheek // Izvestiia YUFU. Tekhnicheskije nauki, 2013, №4 (141), s.87-98.
16. А.А. Самарский. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989, 616 с.;
A.A. Samarskii. The theory of difference schemes. – NY – Basel, Marcel Dekker, Inc, 2001, 761 p.
17. А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Эдиториал УРСС, 1999, 247 с.;
A.A. Samarskiy, P.N. Vabishchevich. Chislennye metody resheniia zadach konveksii-diffuzii. – M.: Editorial URSS, 1999, 247 s.
18. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978, 592 с.;
A.A. Samarskiy, E.S. Nikolayev. Metody resheniia setochnykh uravnenii. – M.: Nauka, 1978, 592 s.
19. А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков. Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование, 2012, т.24, №1, с.3-20;
A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov. Adaptive Modified Alternating Triangular Iterative Method for Solving Grid Equations with a NonSelfAdjoint Operator // Mathematical Models and Computer Simulations, 2012, v.4, № 4, p.398-409.
20. С.В. Валландер. Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978, 296 с.;
S.V. Vallander. Lektsii po gidroaeromekhanike. Ucheb. posobiye. – L.: Izd-vo LGU, 1978, 296 s.
21. И.С. Меньшов, М.А. Корнев. Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // Матем. моделирование, 2014, т.26, №5, с.99-112;
I.S. Menshov, M.A. Kornev. Free boundary method for numerical solving gas dynamics equations in domains with varying geometry // Math. Models & Comput. Simul., 2014, v.26, №6, p.612-621.
22. А.Е. Луцкий, И.С. Меньшов, Я.В. Ханхасаева. Влияние неоднородности набегающего потока на сверхзвуковое обтекание затупленного тела // Матем. моделирование, 2016, т.28, №7, с.45-55.
A.E. Lutskiy, I.S. Menshov, Ya.V. Khankhasaeva. Numerical simulation of the wake influence on the flow around truncated cone // Math. Models & Comput. Simul., 2017, v.9, №1, p.92-100.

Поступила в редакцию 11.02.19

После доработки 11.02.19

Принята к публикации 08.04.19