МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 год, том 31, номер 8, стр. 101-119

ГРАФЫ ЗАДАЧ ДЛЯ РЕПЛИКАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И "ТРАГЕДИЯ ИСЧЕРПАНИЯ ОБЩЕГО РЕСУРСА"

© *2019 г.* ***Н.К. Волосова, А.К. Волосова, К.А. Волосов, С.П. Вакуленко***

Российский университет транспорта (МИИТ)
navolosova@yandex.ru, alya01@yandex.ru, konstantinvolosov@yandex.ru, k-gdsu@mail.ru

DOI: 10.1134/S0234087919080069

Появились активные пользователи, которым необходимо решение обратных задач на графе в условиях неопределённости для моделирования процессов в экономической сфере. Такие задачи ранее математиками не рассматривались. В данной работе найдена аналогия с математическими моделями, которые описываются репликаторной системой (РС) уравнений, связанной с темой «трагедии исчерпания общего ресурса» (ТИОР). Построены точные и асимптотические решения в случае «жёстких» РС. Обнаружены эффекты «apriori» вымирающего клона и эффект пограничного слоя, которые наблюдаются при численных расчётах. Проведена аналогия с некоторыми похожими по свойствам объектами, реально существующими в экономике. Описан эффект существования «теневых, невидимых» сверхпотребителей.

Ключевые слова: исчерпание общего ресурса, репликаторные системы, реальные структуры в экономике.

GRAPHS FOR THE REPLICATOR EQUATIONS AND "TRAGEDY OF COMMON RESOURCE"

N.K. Volosova, A.K. Volosova, K.A. Volosov, S.P. Vakulenko

Russian University of Transport

Appeared active users, which require the solution of inverse problems on the graph with uncertainty for modeling processes in the economic sphere. Such tasks earlier mathematicians were not considered. There was provided a connection replicator systems of equations (RS) with the stated theme. The exact and asymptotic solutions were developed in the case of a «hard» RS equations. The effect of «a priori» dying clone and boundary layer for small values of time were discovered. There was the analogy with similar structures in the economy the effect of the existence of "shadow invisible" super-consumers described was.

Key words: tragedy of common resource, the replicator systems of equations, real structures in economy.

1. Введение

Примеры модельных систем и их значение в методологии науки описаны, например, в [1, гл.1]. Роль маломерных моделей описана также в [2, гл.3]. К ним относятся и ниже рассмотренные примеры. Первоначально в [3] была предложена модель гиперциклов. В гиперцикле более примитивные цепочки РНК кооперируются и привлекают примитивные полипептидные ферменты. Возникает синергетический эффект, и количество информации передаваемое следующим поколениям, увеличивается. Как следствие, увеличивается их выживаемость. Таким образом, в [3] моделируется гипотетическая стадия эволюции, которая могла следовать за квазивидами. Репликаторная система (РС) уравнений давно заняла своё базисное место в математической теории отбора и эволюции РНК молекул на Земле.

Этой теории посвящены, например, работы [3-8]. В большом потоке публикаций в «мире РНК» с разных позиций предпринимаются попытки объяснить условия и причины возникновения жизни и объяснить способность молекул хранить информацию и катализировать реакции, ведущие к воспроизводству и их усложнению. В данной работе обсуждается другой аспект этой темы.

Постановка обратной задачи на графе в условиях неопределённости. Пусть дана часть ориентированного графа, а именно известны только вершины $u_2, u_3, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ и некоторые компоненты вектора весов на дугах, заказчики также дают некоторую априорную информацию о задаче.

Задача состоит в том, чтобы, во-первых, восстановить гипотетический граф, не противоречащий экономическому смыслу задачи, а, во-вторых, сделать оценку недостающих значений весов (потоков соответствующих ситуации на рынке в некоторый промежуток времени), см. рис.1. Мы связываем эту задачу с темой «трагедии исчерпания общего ресурса» (ТИОР). Задача не имеет единственного решения, и один из вариантов, который вполне удовлетворил заказчика, описан в разд. 4.

Сначала мы рассмотрим, как решалась проблема ТИОР[1] в природе в некоторых случаях. Модели в экономике похожи на биологические, но они более изощрённые, так как строятся человеком.

Замечание 1. В случае с молекулами РНК нет информации об их популяциях, количестве таких различных популяций, о законе размножения, скорости роста их количества и т.д., то есть того, что обычно известно о по-

---

[1] Мы беседовали со скептиками, однако выяснили, что они не пьют воду из водопровода, избегают потребления пальмового масла и других факторов, приводящих к загрязнению своих кровеносных сосудов и т.д.

пуляциях в макромире. Поэтому и была предложена репликаторная модель на основе динамических систем. Это моделирование процессов, с помощью которых решалась в прошлом в природе проблема ТИОР.

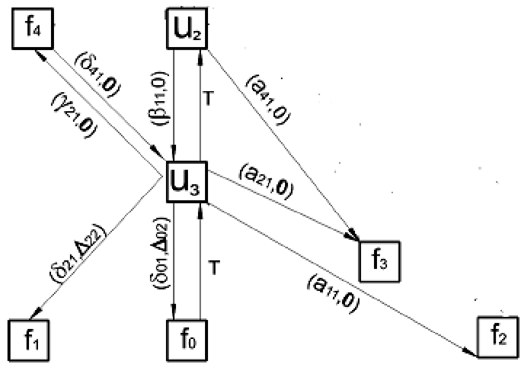


Рис.1. Исходные данные для решения обратной задачи на графе в условиях неопределённости.

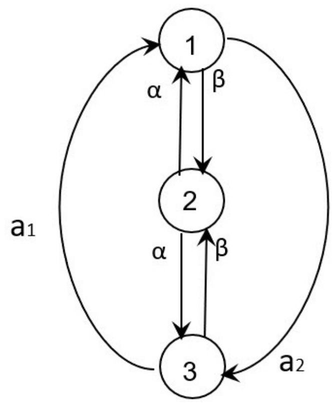
Символьный результат часто позволяет глубоко вникнуть в ход решения и выявить внутренние связи в задаче, которые при нагромождении чисел не очевидны. Раньше исследователи большинство своих вычислений проводили в символьном виде и только в конце выполняли подстановку чисел. После распространения компьютеров оказалось, что наиболее просто можно использовать численные методы, нежели символьные вычисления. Использование символьных вычислений требует от исследователей более глубоких знаний математики [8]. Молодые исследователи целиком положились на численные расчёты, а символьные вычисления просто исчезли из списка инструментов. На самом деле авторы данной работы считают, что надо комбинировать оба подхода.

Распространено заблуждение о том, что РС не поддаются аналитическому анализу. В работах по этой теме сразу используются численные методы [3-7]. Аналитическое исследование простых репликаторных моделей, точные и асимптотические решения, приведённые ниже, позволяют выявить общие важные подробности и свойства моделей, а именно: эта возможность связана с введением малого параметра при старшей производной и, следовательно, с «жёсткими» системами.

Одна молекула РНК выжить не может. Ей нужна энергия и обмен веществом с внешней средой. После взаимодействия с другими молекулами у неё возникает новое качество на макроскопическом уровне [1]. Возникает синергетическое самозарождение нового смысла, рождение новых качеств на макроскопическом уровне. Когда «исчерпывается общий ресурс» для одной комбинации взаимодействия с партнерами, может выжить другая комбинация взаимодействия. Как следствие, в природе наблюдается большое разнообразие различных РНК и множество биологических видов в макромире.

2. Репликаторные модели (РС)

Общие постановки задачи для РС даны, например, в [4−7]. Для наших целей, чтобы попутно объяснить метод, в данной работе рассмотрим сначала наиболее простую систему, состоящую из трех молекул. Соответствующий ориентированный граф приведен на рис.2. Направление стрелок на дуге означает знак слагаемого в правой части динамической системы. Знак «плюс» соответствует «источнику», а знак «минус» соответствует «диссипации» («стоку»). Везде ниже предположим, что все функции являются непрерывно дифференцируемыми необходимое число раз в своих областях определения.



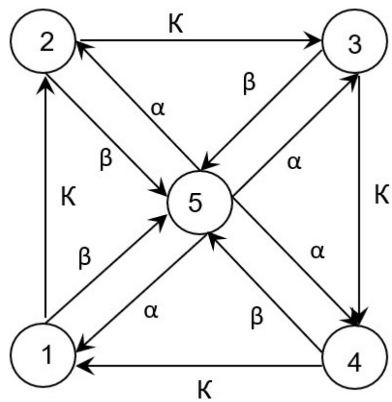


Рис.2. Графы для задачи «муравейник 3» и «муравейник 5».

***Замечание* 2.** Совершенно очевидно, что подход в нашей работе не вполне удовлетворителен. Но и без учёта фактора случайности простые модели позволяют выявить важные свойства модели, см. [1].

С нарастанием числа переменных связи и взаимодействие вершин в графе становятся всё сложнее, и тогда ничего не остается кроме использования асимптотических и численных методов. В данной работе найдены ответы на ряд вопросов, освещенных ниже.

В РС все зависит от распределения истоков и стоков (диссипации) в правой части динамической системы. В [3-6] и в цитируемых там работах по этой теме рассматривались разнообразные варианты. Мы коснемся только двух типов таких моделей.

В этом разделе основное внимание уделим модели, называемой "муравейник". Молекулы номер 1 и номер 2 (обмениваются между собой) катализируют друг друга и взаимодействуют с молекулой номер 3 (левая схема на рис.2). В цитируемых работах константы $a_i > 0$, $i = 1, 2$, и $\alpha_i > 0$, $\beta > 0$, в правой части динамической системы с этими коэффициентами записываются источники. Функция $f = f(u_1, u_2) > 0$ называется в этой теории функцией фитнеса и описывает диссипацию в условиях неопределенностей, существовавших в далёком прошлом. Соотношения на симплексе являются результатом процедуры обезразмеривания задачи на суммарную максимальную концентрацию молекул в единице объема

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} u_i'(t) = 0, \\ u_i(t) > 0, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, N, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Для модели «муравейник 3» $N = 3$, а для модели «муравейник 5» $N = 5$.

Уточним, что функция фитнеса $f(u_1, u_2)$ имеет смысл средней приспособляемости и именно в ней собрана вся диссипация (сток) в системе. Она определяется из второго соотношения в (1), которое является следствием первого равенства в (1). Такой выбор этой функции в значительной мере определяет и свойства всей РС. Роль молекулы номер N в такой модели подобна роли матки в муравейнике или пчелином улье в макромире. Структура муравейника, например, повторяет на следующей, более высокой, стадии развития с новым смыслом (информацией) модель РС. Молекула, концентрация которой обозначена через u_3, ведет себя «взвешено», получает от источника и отдает энергию и вещество, что моделируется с помощью диссипации (стока) f. Молекулы номер 1 и 2 в цитируемых работах называют «альтруистами». Их «жизнь и смерть» полностью зависит от соотношения источников и стоков. Начальные условия для РС также удовлетворяют условиям (1):

$$u_i(0) = u_{l0} > 0, \quad l = 1, \dots, N, \quad \sum_{l=1}^{N} u_{l0} = 1.$$

Первое обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ, N=3) РС имеет вид

$$u_1'(t) = u_1(t)\,(a_1 u_2(t) + \alpha u_3(t) - f(u_1(t),\, u_2(t))). \tag{2}$$

В (2) подробно записаны все аргументы, однако далее, для краткости, будем их опускать. Объясним здесь более подробно, как строится первое уравнение. Для молекулы номер 1 и с точки зрения u_1 два первых слагаемых

$a_1 u_2(t) + \alpha u_3(t)$ в уравнении (2) являются для u_1 источниками (см. неравенства в (1)). Аналогично записываются второе ОДУ и третье ОД уравнение РС, они имеют вид

$$u_2'(t) = u_2\,(t)\,(a_2\,u_1\,(t) + \alpha u_3\,(t) - f\,(u_1, u_2))\,, \tag{3}$$

$$u_3'(t) = u_3\,(t)\big(\beta(u_1 + u_2) - f\,(u_1, u_2\,)\big)\,. \tag{4}$$

***Замечание* 3.** Вторым, распространенным в цитируемой литературе, предельным случаем является модель, которую называют кратко – «паразит». Для демонстрации этой модели можно использовать тот же граф на рис.2, если положить вес дуг $\alpha = 0$. Здесь молекулу номер 3 в литературе принято называть «эгоистом» (сверхпотребитель) потому, что она ничего не отдает другими и забирает все ресурсы себе. В этой модели «альтруисты» гибнут через некоторое время.

Вычислим функцию фитнеса f >0. Подставляем во второе равенство (1) выражения производных функций $u_i', i = 1,2,3$, из уравнений (2)–(4) и получим

$$f\,(u_1\,, u_2\,) = (\alpha + \beta)u_2\,u_3 + u_1\big((a_1 + a_2)u_2 + (\alpha + \beta)u_3\ \big)\Big|_{u_3 = 1 - u_1 - u_2}\,. \tag{5}$$

Такой самосогласованный выбор функции диссипации со всеми уравнениями РС является важным и определяет её свойства и существование точных и асимптотических решений.

Проведем анализ задачи (1)–(5) с точки зрения, отличающейся от изложенной в [3-8].

Вычислим неподвижную точку. Положим равными нулю производные $u_l' = 0, l = 1,2,3$, в уравнениях (2)–(4). Решение этой системы и следующие из него неравенства (ограничения на параметры) обозначим

$$\begin{gathered} s_1 = a_1\,\alpha\,/\,Dn_1\,,\ s_2 = a_2\,\alpha\,/\,Dn_1\,,\quad s_3 = \Big(a_2\,\beta + a_1\,(\beta - a_2)\Big)\alpha\,/\,Dn_1, \\ Dn_1 = a_2\,(\alpha + \beta) + a_1\,(\alpha + \beta - a_2)\,, \\ \beta > a_1\,a_2\,/\,(a_1 + a_2),\quad 0 < \alpha < a_1\,a_2\,/\,(a_1 + a_2) < \beta\,, \end{gathered} \tag{6}$$

или

$$\beta < a_1\,a_2\,/\,(a_1 + a_2) - \alpha\,,\quad 0 < \alpha < a_1\,a_2\,/\,(a_1 + a_2)\,.$$

Неравенства в (6) следуют из требования $u_i > 0$ в (1). Если $\beta = a_1 a_2/(a_1 + a_2)$, то $\lim\limits_{t -> \infty} u_3(t) = 0$, и в данной задаче $u_3 = 0$ ($s_3 = 0$) называем «apriori» вымирающим клоном.

***Замечание* 4**. Предполагаем, что и в далёком прошлом происходила смена сезонов, были приливы и отливы, шторма, извержения вулканов и т.п. То есть благоприятные условия существовали конечный период времени T. Когда общий ресурс исчерпан, происходит мутация, эволюция делает следующий шаг. Существует возможность введения в модели малого параметра $0<\varepsilon<1, \varepsilon=1/\alpha$, если $\alpha>1$. Отметим, что для изучения нелинейного случая используются методы [9]. Асимптотические решения уравнений с малым параметром при старшей производной изучались в [10, 11].

Рассмотренная задача типа «муравейник» (1)–(5) имеет следующее свойство РС, а именно она имеет точное решение, но которое описывает главный член асимптотического решения. Главный член не зависит от параметров задачи α, β. Докажем это в следующих ниже теоремах.

Для краткости текста, чтобы не писать фактически одни и те же формулы два раза, в теореме 1 попутно объясним алгоритм построения точных и далее асимптотических решений.

Теорема 1. *Пусть дана задача Коши для РС* (1)-(5). *Тогда задача* (1)-(5) *имеет точное решение, которое не зависит от параметров задачи* α, β. *Эта функция в то же время описывает главный член асимптотического решения задачи* (1)-(5) *по параметру* $0<\varepsilon<1, \varepsilon=1/\alpha$.

Точное решение задачи (1)-(5) ищем в виде

$$\begin{aligned} &u_1(t)=Y'(t)/Y(t), \quad u_2(t)=a_2\, Y^{a_2-1}\, Y'(t)/(a_2\, C_1+a_1\, Y^{a_2}), \\ &u_3(t)=1-u_1(t)-u_2(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Константа C_1 определяется начальными условиями и параметрами задачи.

Функция $Y(t)$ является решением нелинейного ОДУ (нелинейное обобщение уравнения Абеля первого рода) второго порядка:

$$\begin{aligned} &Y''(t)/\alpha^2-Y'(t)/\alpha+H_2\big(Y(t)\big)\big(Y'(t)\big)^2+H_1\big(Y(t)\big)\big(Y'(t)\big)^3=0, \\ &H_1\big(Y(t)\big)=(-(a_2C_1)^2(\alpha+\beta)+\big(a_2(a_1+a_2)C_1(a_2-2(\alpha+\beta))\big)Y^{a_2}+ \\ &\qquad +(a_1+a_2)\big(a_1(a_2-\alpha-\beta)-a_2(\alpha+\beta)\big)Y^{2a_2})/(Dn_2)^2, \\ &H_2\big(Y(t)\big)=\Big(a_2C_1(2\alpha-1+\beta)+\big(a_2(2\alpha+\beta)+a_1(\beta-1-a_2+2\alpha)\big)Y^{a_2}\Big)/(\alpha Dn_2), \\ &Dn_2=\alpha Y(a_2C_1+a_1Y^{a_2}). \end{aligned} \tag{8}$$

Замена $Y'(t)=P\big(Y(t)\big)$, $Y(t)=q$ даёт нелинейное ОДУ Риккати с коэффициентами, которые зависят от q

$$
\begin{aligned}
&P'(q)+F_1(q)P^2(q)+F_2(q)P(q)+F_0=0,\\
&F_1(q)=(-(a_2C_1)^2(\alpha+\beta)+\left(a_2(a_1+a_2)C_1(a_2-2(\alpha+\beta))\right)q^{a_2}+\\
&(a_1+a_2)\left(a_1(a_2-\alpha-\beta)-a_2(\alpha+\beta)\right)q^{2a_2})/(z_1)^2,\\
&F_2(q)=\left(a_2C_1(2\alpha-1+\beta)+\left(a_2(2\alpha+\beta)+a_1(\beta-1-a_2+2\alpha)\right)q^{a_2}\right)/z_1,\\
&z_1=q\,(a_2C_1+a_1q^{a_2}),\quad F_0=-\alpha.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Асимптотическое решение уравнения (9) имеет вид

$$P(q)=Y_0(q)+\varepsilon\,\Omega(q)+O(1/\alpha^2),\quad \alpha=1/\varepsilon>1. \tag{10}$$

При $\Omega(q)=0$ точное решение уравнения (9), не зависящее от параметров α,β, имеет вид

$$P(q)=q\,(a_2C_1+a_1q^{a_2})/\left(a_2(C_1+q^{a_2})+a_1q^{a_2}\right). \tag{11}$$

Главный член асимптотического решения уравнения (8) в исходных переменных $Y_0(t)$ при $\alpha=1/\varepsilon>1$ следует из (10) и определяется из неявного уравнения

$$\left(Y_0(t)\right)^{\alpha_1}(a_2C_1+a_1\left(Y_0(t)\right)^{a_2})=\exp\left(a_1(t+C_2)\right). \tag{12}$$

В частности, при $a_1=a_2$ явный вид главного члена асимптотического решения вычисляется и функция $u_1(t)$ в (7) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u_1(t)=2\exp\left(a_2(t+C_2)\right)/Dn_2,\quad Dn_2=M_1(-\sqrt{a_2}\,C_1+M_1),\\
&M_1=\sqrt{\left(a_2C_1^2+4\exp(a_2(t+C_2))\right)}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

При $a_1=a_2/2$ явный вид главного члена асимптотического решения (10) выражаются через функции

$$
\begin{aligned}
&Y_0(t)=\left(-2a_2C_1/\left(3^{1/3}(M_3)^{1/3}\right)+\left((M_3)^{1/3}/(3^{2/3}a_2)\right)\right)^{2/a_2},\\
&M_3=9a_2^2\exp\left(a_2(t+C_2)/2\right)+\sqrt{3}\,a_2^2M_2,\\
&M_2=\sqrt{8a_2^2C_1^3+27\exp(a_2(t+C_2))}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Функция для поправки в (10) $\Omega(q)=1/W(q)$ приводит к линейному ОДУ первого порядка

$$W'(q) - G(q)W(q) + G_1(q) = 0,$$

$$G_1(q) = -(a_2 C_1 + (a_1 + a_2)\, q^{a_2})^2 / z_1^2\ ,$$

$$G(q) = \Big(\Big(-(a_2 C_1)^2 (1+\beta) + (a_1 + a_2)(a_1(a_2 - 1 - \beta) - a_2\beta) q^{2a_2}\Big) + \qquad (15)$$

$$+ a_2 C_1 q^{a_2}\left(a_2(2a_2 - 1 - 2\beta) + a_1(a_2 - 2(1+\beta))\right)\Big)\Big/\Big(z_1(a_2 C_1 + (a_1 + a_2) q^{a_2})\Big),$$

$$z_1 = q\,(a_2\, C_1 + a_1\, q^{a_2}).$$

Решение уравнения первого порядка (15) и интеграл $I_1(q) = \exp(-\int G(q)\, dq)$, как известно, имеют вид

$$W(q) = C_u \exp\Big(-\int G(q) dq\Big) - I_1(q) \int I_1(q) G_1(q) dq,$$

$$I_1(q) = \exp(-(3a_1 + \beta)/a_1) \mathrm{Arcth}\Big((C_1 a_2 (a_2 + 2a_1) + 2q^{a_2} a_1 (a_1 + a_2))/(a_2^2 C_1)\Big) \times \qquad (16)$$

$$\times q^{-1-\beta} (a_2^2 C_1^2 + a_2(2a_1 + a_2) C_1 q^{a_2} + a_1(a_1 + a_2) q^{2a_2})^{(a_1 - \beta)/(2a_1)}.$$

Доказательство. В [12] введен термин «скрытая ключевая» переменная, который мы можем употребить и в данном случае. А именно, можно все функции выразить через одну. Но есть выбор. Можно получить одно уравнение на одну из функций $u_1(t)$ или $u_2(t)$. Выберем в качестве «ключевой» переменной функцию $u_1(t)$.

Поделив уравнение (3) на функцию $u_2(t)$, а уравнение (2) – на функцию $u_1(t)$ и вычитая полученные соотношения, получим

$$a_2\, u_1(t) - a_1\, u_2(t) + u_1'(t) / u_1(t) - u_2'(t) / u_2(t) = 0, \qquad (17)$$

$$u_1(t) = Y'(t) / Y(t). \qquad (18)$$

Интегрируя это соотношение, получим выражение функции $u_2(t)$ через $u_1(t)$, см. (7). Анализ случая $C_1 = 0$ приводит к равенству $u_2(t) = u_1(t)$ и к противоречию. Поэтому на этом случае останавливаться не будем.

Подставив (7) и (5) в (4) и в (3), исключив $u_3(t) = 1 - u_2(t) - u_1(t)$, получим не два, а одно и то же «жёсткое» нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) относительно функции $u_1(t)$ с малым параметром при старшей производной. Оно громоздкое, и его привести в статье нет возможности.

Однако после замены $u_1(t) = Y'(t) / Y(t)$ ИДУ упрощается и получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка (8). Далее сделаем замену переменных $Y'(t) = P(Y(t)),\ Y(t) = q$ и получим нелинейное ОДУ Риккати с коэффициентами, которые зависят от функции $Y(t) = q$ [13]. Точное решение уравнения (9) имеет вид (12).

Далее делаем обратные замены, следующие из (9), (18). Из (11) получим нелинейное ОДУ первого порядка

$$Y'(t) - Y\,(t)\Big(a_2\,C_1 + a_1\,(Y(t))^{a_2}\Big) / \Big(a_2\,C_1 + (a_2 + a_1)(Y(t))^{a_2}\Big) = 0. \qquad (19)$$

Это уравнение интегрируется точно. Функция $Y(t)$ определяется из неявного уравнения

$$\ln(Y(t)) + (1/a_1)\ln\Big(a_2\,C_1 + a_1\,(Y(t))^{a_2}\Big) = t + C_2. \qquad (20)$$

Отсюда следует (12). Заметим, что при некоторых очевидных соотношениях между a_i из неявного вида решения (12) следуют явные решения. Приведены конкретные примеры (13), (14). Если точное решение не удается вычислить из-за нелинейности и большого числа переменных в модели, то проще построить асимптотическое решение.

После вычисления главного члена асимптотического решения, не зависящего от параметров α, β, построим уравнение на поправку $\Omega(q)$ (10). По этой поправке вычисляется функция (10) и, следовательно, сначала функцию u_1 в (7) с поправкой, а потом и остальные функции в (7). Решение линейного уравнения (15) полностью здесь не приводим в силу его очевидности – по формулам (16).

Отметим, что аналогично изложенному, можно построить асимптотическое решение по параметру $\beta = 1/\varepsilon$, если $\beta > 1$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что числитель в (6) для концентрации третьего вида обращается в нуль при некотором соотношении параметров. То есть этот вид может исчезнуть, выродиться.

***Замечание* 5.** Таким образом, выявлены эффекты: главный член асимптотического разложения вычисляется точно; при введении малого параметра $\alpha = 1/\varepsilon > 1$ или $\beta = 1/\varepsilon > 1$ при малых значениях t формируется пограничный слой; описан эффект в РС моделях, который назовём «apriori» вырождающимся элементом.

Кратко опишем модель «муравейник 5», следуя цитируемой литературе. На правой фигуре 5 показан граф, соответствующий РС этой модели.

Задача рассматривается на симплексе (1), где *N*=5. В этой модели сделано некоторое упрощение по сравнению с моделью «муравейник 3», а именно предположена равной интенсивность источников $a_i = k,\ i = 1,...,4$, см. веса на дугах графа на правом рис.2.

Исходная РС уравнений имеет вид

$$u_1'(t) = u_1(t)(k\,u_4(t) + \alpha u_5(t) - f), \tag{21}$$

$$u_2'(t) = u_2(t)(k\,u_1(t) + \alpha u_5(t) - f), \tag{22}$$

$$u_3'(t) = u_3(t)(k\,u_2(t) + \alpha u_5(t) - f), \tag{23}$$

$$u_4'(t) = u_4(t)(k\,u_3(t) + \alpha u_5(t) - f), \tag{24}$$

$$u_5'(t) = u_1(t)(\beta \sum_{i=1}^{4} u_i(t) - f). \tag{25}$$

Функция фитнеса следует после подстановки производных (21)-(25) во второе соотношение (1)

$$f = k\left(u_1 u_4 + \sum_{i=2}^{4}(u_i u_{i-1})\right) + (\alpha+\beta)\,u_5(t)\ \sum_{i=1}^{4} u_i(t). \tag{26}$$

Начальные условия также удовлетворяют условиям (1). Справедлива

Теорема 2. *Пусть дана РС* (1), (21)-(26). *Тогда неподвижная точка описывается соотношениями*

$$\begin{aligned} &u_i'(t) = 0, \quad u_i = \alpha/(4(\alpha+\beta)-k), \quad i = 1,\dots,4, \\ &u_5 = (4\beta - k)/(4(\alpha+\beta)-k), \end{aligned} \tag{27}$$

и справедливы соотношения

$$u_1(t) = S'(t)/S(t), \quad u_2(t) = H'(t)/H(t), \tag{28}$$

$$u_3(t) = u_2\, C_3 \exp(k\int u_2(t)\,dt)\exp(-k\int u_1(t)\,dt), \tag{29}$$

$$u_4(t) = u_1 + u_1'(t)/(k u_1) - u_2'(t)/(k u_2), \quad u_5(t) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{4} u_i\right). \tag{30}$$

Комментарии к доказательству

Соотношения в неподвижной точке (27) получены тривиально. В данной задаче u_5 называем «apriori» вымирающим клоном. Делим уравнение (21) на функцию u_1, а уравнение (22) – на функцию u_2 и вычитаем полученные соотношения. Отсюда следует (30). Делим уравнение (23) на функцию u_3, а уравнение (22) – на функцию u_2 и вычитаем полученные соотношения

$$u_3'(t)/u_3(t) = k\,u_2(t) - k\,u_1(t) + u_2'/u_2.$$

После интегрирования следует (29). Подставляем (26), (29), (30) в уравнения (21) – (25) и получим пять ИДУ, четыре из которых одинаковые в силу выбора вида функции (26). Их не приводим из-за громоздкости. Все выражено через «скрытые ключевые» переменные u_1, u_2. Выбираем вид этих функций в виде (27). В итоге получим два нелинейных «жестких» ОДУ для функций $S(t), H(t)$. Можно построить асимптотическое решение по параметру $0<\varepsilon<1$, если $\alpha = 1/\varepsilon > 1$. Здесь не приводим эти формулы, так как они не дают ничего нового для понимания проблемы.

Эти результаты подтверждаются численными расчетами. На рис.3 показано формирование пограничного слоя при $\alpha=1/\varepsilon>1$. Аналогично асимптотическое решение РС может быть получено при $4\beta - k = 1/\mu > 1$ по малому параметру $0<\mu<1$.

Аналогичные результаты изложенным методом вычислены авторами для модели «муравейник 4». С увеличением размерности РС идет усложнение формул, в которые входят специальные функции, но остаётся возможность построения асимптотического решения.

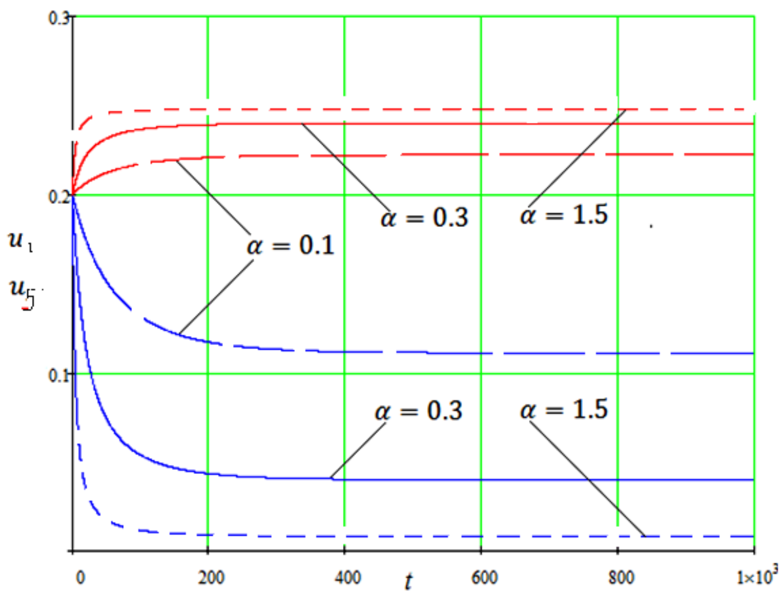


Рис.3. Формирование пограничного слоя в задаче «муравейник 5».

3. Комментарии к статье [14]

В работах, перечисленных в [14], рассмотрены разные модели популяций, элементы в которых обобщенно называют клонами. Будем также использовать этот обобщающий термин. В [14] рассмотрена модель ресурс-потребитель Кракауэра. В этой работе дан обзор и приведены результаты статей других авторов, которые рассматривают ряд примеров «исчерпания общего ресурса». Приведем кратко список некоторых ситуаций в разных областях деятельности человека: например, классический, давно известный случай истощения скотом пастбищ на общинных землях (15 век, Англия, политика «огораживания»), загрязнение окружающей среды свалками мусора, проблемы питьевой воды, истребление животных, рыбы и т.д. (экоцит), эволюция миксомицету (Distiostelium discoideum) [1], перенаселение территорий людьми, проблема «трёх вокзалов» в Москве в контексте РЖД, глобальное потепление, явления ядерной зимы и ядерной ночи [15], финансовые пирамиды, подпольные банкиры и многое другое. В ряде работ, цитируемых в [14], их авторы приходят к выводу, что «трагедии исчерпания общего ресурса» избежать не удастся. В качестве выхода из этой ситуации предлагается создать такие системы самоуправления, которые не допускают чрезмерного использования общих ресурсов. Предлагается регламентировать способы использования ресурса и установить наказание в случае нарушения установленных правил. Авторы [14] регулируют в правой части динамической системы соотношения между источниками и стоками (диссипацию), чтобы избежать коллапса системы, и они ввели понятия «альтруистов» и «сверхпотребителей». Динамические системы исследуются, в частности, методами [9].

***Замечание* 6**. В выводах автор [14] делает приятные, оптимистичные для читателя и своих работодателей выводы, что государство будет осуществлять поощрение «альтруистов» и наказывать «сверхпотребителей» нелинейно. То есть с ростом потребления ресурса должно расти и наказание «сверхпотребителей». С точки зрения авторов данной работы, такие выводы являются наивными, если иметь в виду, что в государстве именно «сверхпотребители» принимают законы и именно они осуществляют надзорные и контролирующие функции в государстве (см., например, статьи в [16]). Существует термин «эгоизм элит».

Мы не будем давать каких-либо оценок, чтобы не выходить из плоскости «математического моделирования», но изложим описание модели реально существующих экономических структур в упрощённом виде дополнительных предположений, а выводы делать читателю. Описанная выше модель РС наводит на аналогии со структурой связки фирм (клонов), занимающихся торгово-закупочной деятельностью как самой простой для анализа дискретной модели. В экономических математических моделях среди факторов не учитывают, с точки зрения авторов данной работы и [16, 17], один из главных, а именно: алчность и жадность, заложенные в генотип людей. Как ответить на вопрос: «возможно ли их обуздать и как учесть их в математической модели»? Не понятны причины отсутствия попыток анализа таких моделей, хотя описанный ниже объект существует и известен специалистам в мире десятки лет. Отсутствие анализа таких моделей приводит к возможности искажения статистических данных в разных целях, что и происходит в действительности. Одна из точек зрения на «алчную экономику» изложена в [16, разд.2.4] и с другой позиции описана в данной работе. В.П. Маслов в [16, с.20] приводит цитату Д.И. Менделеева, сказанную более ста лет назад: «Мне говорят, ведь вы химик, а не экономист, зачем же вы входите не в своё дело? На это необходимо ответить тем, что истинного, правильного решения экономических вопросов можно ждать впереди только от приложения опытных приемов естествознания».

4. Клоны в экономике

Один из возможных вариантов локальных схем реализации алгоритма для решения обратной задачи –это решение на графе в условиях неопределённости. Наблюдение и сбор данных о реально существующих структурах дает возможность провести беспристрастный математический анализ их упрощённой математической модели на графе. «Хорошая теория сложных систем должна представлять собой лишь хорошую «карикатуру» на эти системы, утрирующую те свойства их, которые являются наиболее типичными, и умышленно игнорирующую все остальные – несущественные свойства» [2, с.71]. Будем называть составляющие их структуры, фирмы и объединение физических лиц клонами, следуя [14]. Эти структуры обладают свойствами, похожими на биологические объекты. Они размножаются и усложняются, но более изощренно, чем в природе, так как строятся человеком. Одиночный клон не может существовать в реальной экономической «рыночной среде» из-за большой реальной финансовой нагрузки и человеческого фактора, о котором указывалось выше. В данном случае не природа и эволюция, а разум человека позволяет создать более эффективную структуру клонов.

Рассмотрим только один цикл возможной деятельности структуры, показанной в виде ориентированного графа на рис.4. (просьба сравнить с рис.1). Цель функционирования описываемой структуры – уменьшение издержек и увеличение прибыли для u_1.

В теории поля в физике известна теория «хромодинамика» и определение «цветового заряда». Аналогично, давно известно, что деньги характеризуются двумя цветами. На рис.4 веса на графе заданы векторами, которые имеют две компоненты: «белую» и «черную» с соответствующим хорошо известным, не только специалистам, смыслом.

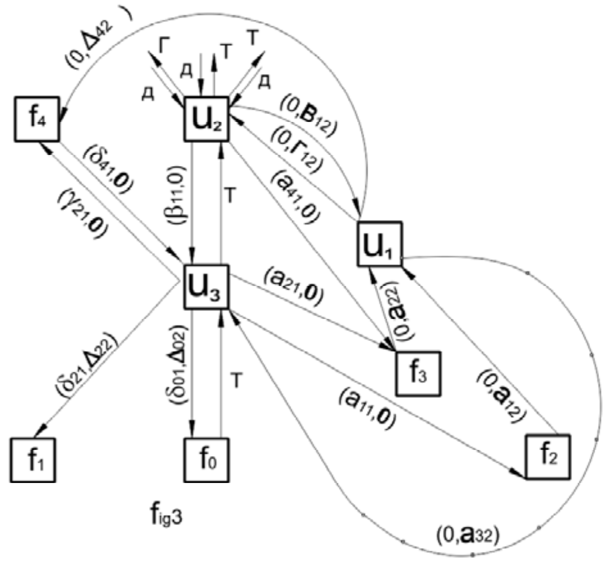


Рис.4. Граф для задачи раздела 4.

«Сверхпотребитель» (одно или несколько физических лиц, объединённых общими интересами, обозначим его через клон u_1), оставаясь в тени организует структуру, в простейшем случае две фирмы-клона u_2, u_3, используя экономические и другие методы. Клон u_1 осуществляет фактическое руководство u_2, u_3 через назначенных директоров – ответственных лиц.

Клон u_2 вообще представлен только одним директором. Таких клонов в реальных условиях может быть несколько и они занимаются параллельными проектами, но для простоты анализа взаимоотношений объектов в модели рассмотрим только один клон. Ответственное перед u_1 лицо действует по доверенности от учредителя (который даже, иногда, может не знать в деталях, что происходит). Клон u_2 выполняет необходимые экономические действия, но не выполняет и не собирается выполнять никаких требований законодательства. Опишем функционирование структуры в один цикл деятельности, который занимает время T.

Аналог пограничного слоя здесь тоже существует. Все участники структуры заинтересованы материально в минимизации времени T. Директор u_2 и сотрудники u_3 получает «разноцветные» премии из источников $(0,\mathbf{\Gamma}_{12})$, $(0,\mathbf{a}_{32})$, а u_1 получает маржу. Через веса на дугах графа обозначены потоки $(0, \mathbf{Г}_{12})$, $(0, \mathbf{a}_{32})$ – затраты на регистрацию, создание и функционирование u_2, u_3.

Директор u_2 заинтересован также в скорейшем прекращении деятельности клона и уничтожении всех материальных фактов деятельности. После окончания цикла ответственное лицо u_2 просто прекращает все связи с учредителем клона, меняет телефоны и адреса. Клон u_2 после окончания цикла превращается брошенную «фирму–однодневку».

Это поможет ему после окончания цикла затеряться среди других аналогичных клонов. По аналогии с введением в «макромире экономики» наблюдается большое количество брошенных клонов u_2, телефоны которых не отвечают, а по зарегистрированному адресу никого нет, в том случае, если существует сам адрес регистрации. Представители разных социальных групп в своих интересах трактуют статистические данные о «фирмах–однодневках». При переходе к следующими циклу при необходимости легко будет создан другой аналогичный клон.

Клон u_3 представлен директором, бухгалтерами и рядом сотрудников. В целом клон u_3 выполняет все требования законодательства и осуществляет все необходимые платежи во все инстанции государства и фонды и может существовать достаточно долго. Для внешнего наблюдателя и структур контроля наблюдаются только не зависимые друг от друга клоны u_2, u_3, которые относятся к малому и среднему бизнесу.

Таким образом «сверхпотребитель» маскируется под «альтруиста», но он ведёт себя взвешено, что похоже на модель «муравейник», оставаясь ненаблюдаемым со стороны. Это подробней описано в разделе 1.

Оборотные средства $(\delta_{41}, \mathbf{0})$ и некоторая часть расходов f_0 на создание и функционирование u_3 и закупку товара оформляется как кредит от коммерческого банка f_4. Специалистам хорошо известно, что банки легко меняют цвет денег (0, Δ_{42}) на противоположный за некоторый процент в данный конкретный момент времени в зависимости от экономической ситуации, по достигнутому соглашению на соответствующем уровне. Выполнено очевидное неравенство $\delta_{41} < \Delta_{42}$.

Сотрудники u_3 находят на восточных рынках оптового продавца f_0 пользующегося спросом товара (т) и покупают его $(\delta_{01}, \Delta_{02})$. При этом перечисляют все необходимые платежи. Заранее планируется логистика, и u_3 заключает договоры на подготовку договоров с f_3 и f_2 о покупке товара у f_0, продаже всей партии на реализацию u_2 с небольшой наценкой, и договоры об аренде складов, охране, ж.д. и автотранспорта, погрузке и разгрузке и т.д.

Для простоты модели в f_2 объединены все обслуживающие услуги, такие как услуги аренды складов, уборка территорий и офисов, подготовка помещений для проведения встреч и переговоров, обучение персонала. В f_2 также объединим услуги по перевозке с помощью РЖД и перевозке автотранспортом и легковым транспортом с водителем и т.д.

Услуги по составлению документов, договоров, актов, нотариальные услуги и т.д. для простоты модели сосредоточены в f_3.

Все отчисления разнообразных налогов, таможенных пошлин, отчисления во все фонды из u_3 обозначены $(\delta_{21}, \Delta_{22})$ и для простоты модели сосредоточены в f_1.

Клон u_2 продает товар по максимально возможным, договорным ценам и рассчитываются с u_3 по договору купли-продажи товара. На рис.4 товар обозначен через «т», а деньги, поступающие в u_2 от сторонних покупателей, обозначен через «D». Наценка заранее вычисляется такой, чтобы были покрыты издержки u_3 и осталась небольшая прибыль. Обратный поток расчета за товар разбивается на две части $(\beta_{11}, 0)$ в u_3 и $(0, \mathbf{B}_{12})$ в u_1. Специалисты утверждают, что часто для уменьшения времени T расчет за товар в потоке $(\beta_{11}, 0)$ проводится за счёт средств из $(0, \mathbf{\Gamma}_{12})$. Как только весь товар развезён по складам сторонних фирм, клон u_2 бросают. Деньги за товар у сторонних фирм можно собирать и потом (в моменты времени $t>T$) и вернуть потом в u_1 в потоке $(0, \mathbf{B}_{12})$.

В свою очередь от f_3 и f_2 идет обратный поток $(0, \mathbf{a}_{12})$, $(0, \mathbf{a}_{22})$ в u_1. Это осуществляется в связи с договорённостями о разделе финансового потока при заключении договоров.

Можно провести аналогию и с процессом перехода к модели «паразит», описанной в разд.1. При завершении цикла клон u_2 ликвидируется (см. комментарии в начале разд.4).

***Замечание* 7.** Коротко опишем алгоритм решения. По известным данным составляется недоопределённая СЛАУ. Восстанавливаем предполагаемый граф, делая предположения, соответствующие экономическому смыслу задачи. Дописываем необходимые уравнения с неизвестными параметрами. Восстанавливаем неизвестные предполагаемые значения потоков. Подбираем их так, чтобы получить решение, не противоречащее экономическому смыслу задачи и известным данным. Проблема обсуждалась на конференциях [18, 19].

Выводы

Чтобы не повторяться, сошлёмся на замечание 6, где приведены важные аргументы. При описанном механизме цены на товары никогда не будут снижаться. Никакой конкуренции в описанной схеме нет. Есть только жажда получить максимальную прибыль и платить минимальные налоги.

Клон u_1 остается невидимым для стороннего наблюдателя, а u_3 маскируется под фирму, ведущую «честный малый бизнес». ТИОР избежать не получится, можно лишь попытаться отодвинуть её по времени. Фактически на графе решена спекулятивная задача оптимального управления с минимизацией затрат и максимальной прибылью.

Выражаем благодарность В.Г. Данилову, А.С. Братусю, О.С. Розановой, В.П. Маслову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Г. Хакен.* Синергетика от прошлого к будущему. – М.: Мир, 2005, 248 с.
   H. Haken. Information and self-organization. A macroscopic approach to complex systems // Theoretical, Mathem.&Comp. Physics, Springer-Vertag. – Berlin: 2005.
2. *И.В. Андрианов, Р.Г. Баранцев, Л.И. Маневич.* Асимптотическая математика и синергетика. – М.: Едиториал УРСС, 2004, 308 с.;
   I.V. Andrianov, R.G. Barantsev, L.I. Manevich. Asimptoticheskaia matematika i sinergetika. – M.: Editorial URSS, 2004, 308 s.
3. *М. Эйген, П. Шустер.* Гиперцикл. Принципы самоорганизации. – М.: Мир, 1982, 270 с.;
   M. Eigen, P. Schuster. The hypercycle. A principle of natural self-organization. Part: Emergence of the hypercycle // Naturwissenschaften, 1977, 64 (11), p.541-565.
4. *N. Lehman, N. Vaidya, M.L. Manapat.* Spontaneous network formation among cooperative RNA replications // Nature, 2012.
5. *А.С. Братусь, АС. Новожилов, А.П. Платонов.* Динамические системы и модели в биологии. – М.: Физматлит, 2010, 230 с.
   A.S. Bratus, A.S. Novozhilov. A note on the replicator equation with explicit space and global regulation // Mathematical Biosciences and Engineering, 2011, v.8, №3.
6. *J. Hofbauer, K. Sigmund.* Evolutionary Games and Population dynamics. Cambridge University Press, 1998.
7. *W. Jansen.* A permanence theorem for replicator and Lotka-Volterra systems. Mathematical biology, 1987, v.25, p.411-427.
8. *А.К. Волосова.* Математическое моделирование нелинейной динамики открытой системы гиперцикла. – М.: МИИТ, 2011, автореферат диссерт…. канд.физ.-мат.наук http://www.dissercat.com
   A.K. Volosova. Matematicheskoe modelirovanie nelineinoi dinamiki otkrytoi sistemy gipertsikla. – M.: MIIT, 2011, avtoreferat dissert…. kand.fiz.-mat.nauk http://www. dissercat.com
9. *Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтонович*. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003, 296 с.
   N.N. Bautin, E.A. Leontonovich. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniia dinamicheskikh sistem na ploskosti. 2-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003, 296 s.
10. *К.А. Волосов.* Методика анализа эволюционных систем с распределенными парамет-

рами. – М.: МИЭМ, 2007, автореф. диссерт. …. докт. физ.-мат.наук. http://eq world. ipmnet.ru dis volosov Doc2007.pdf
K.A. Volosov. Metodika analiza evoliutsionnykh sistem s raspredelennymi parametrami. – M.: MIEM, 2007, avtoref. dissert. …. dokt. fiz.-mat. nauk. http://eq world.ipmnet.ru dis volosov Doc2007.pdf

11. *В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур) с добавлением Н.А. Колобова. – М.: Наука,1987, 352 с.;
V.G. Danilov, V.P. Maslov, K.A. Volosov. Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluver Academic publishers. Dordrecht /Boston/London 1995.
12. *G.P. Karev.* The HKV method of solving of replications and models of biological populations and communities. National Center for Biotechnology Information, National Institute of Health, Bidg. 38 A, Rm. N 511N, 8600 Rockville Pike, Bethesda, MD 20894, USA.
13. *В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин.* Справочник. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2001, 576 с.;
A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Chapman&Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2004.
14. *F.K. Berezovskaya, L.G. Kareva, G.P. Karev.* Is it possible to prevent the "Tragedy of Common Resource"? // Math. Biolog. Bioinform., 2012, v.7, Issue 1, p.30-44.
15. *Н.Н. Моисеев*. Быть или не быть человечеству? – М.: Ульяновский Дом печати, 1999, 288 с.;
N.N. Moiseev. Byt ili ne byt chelovechestvu? – M.: Ulianovskii Dom pechati, 1999, 288 s.
16. *В.П. Маслов.* Квантовая экономика. – М.: Наука 2006, 92 с.;
V.P. Maslov. Kvantovaia ekonomika. – M.: Nauka 2006, 92 s.
17. *А.В. Щербаков.* Экономика Чернавского // Компьютерные исследования и моделирование, 2017, т.9, № 3, с.397-417;
A.V. Shcherbakov. Ekonomika Chernavskogo // Kompiuternye issledovaniia i modelirovanie, 2017, t.9, № 3, s.397-417.
18. *Н.К. Волосова, А.К. Волосова, К.А. Волосов, С.П. Вакуленко.* К вопросу о «трагедии исчерпания общего ресурса». LXXI Межд. конф. «Герценовские чтения». Российский госуд. педагогический университет им. А.И. Герцена. – С.-П.: 2018, с.60-74;
N.K. Volosova, A.K. Volosova, K.A. Volosov, S.P. Vakulenko. To the question of "the tragedy of exhaustion of the common resource". LXXI international conf. "Herzen readings"/ Herzen Russian state pedagogical University. – St.-Petersburg: 2018, 9-13.04, p.60-74.
19. *Н.К. Волосова, А.К. Волосова, К.А. Волосов, С.П. Вакуленко.* К вопросу о «трагедии исчерпания общего ресурса» / Тезисы докладов. Межд. конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. г. Суздаль, 2018, 6-11 июля, с.63;
N.K. Volosova, A.K. Volosova, K.A. Volosov, S.P. Vakulenko. To the question of "the tragedy of exhaustion of the common resource" / Thesis of reports. International conference on differential equations and dynamical systems. Suzdal, 2018, 6-11 July, p.63.

Поступила в редакцию 12.03.2018
После доработки 01.04.2019
Принята к публикации 08.04.2019