

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ В СИЛЬНОМ ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ© 2019 г. *С.В. Богомолов, Н.Б. Есикова*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
bogomo@cs.msu.su, esikova.nata@yandex.ru

DOI: 10.1134/S0234087919080070

На основании стохастической микроскопической столкновительной модели движения заряженных частиц в сильном внешнем магнитном поле строится иерархия уравнений магнитной гидродинамики. Переход к всё более грубым приближениям происходит в соответствии с уменьшением параметра обезразмеривания, аналогичного числу Кнудсена в газовой динамике. В результате получаются стохастические и неслучайные макроскопические уравнения, отличающиеся от магнитного аналога системы уравнений Навье–Стокса, а также от систем магнитной квазигидродинамики. Главной особенностью этого вывода является более точное осреднение по скорости благодаря аналитическому решению стохастических дифференциальных уравнений по винеровской мере, в виде которых представлена промежуточная мезо–модель в фазовом пространстве. Такой подход существенно отличается от традиционного, использующего не сам случайный процесс, а его функцию распределения. Акцент ставится на ясности допущений при переходе от одного уровня детализации к другому, а не на численных экспериментах, в которых содержатся дополнительные погрешности аппроксимации.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, уравнение Навье–Стокса, сила Лоренца, уравнения магнитной гидродинамики и квазигазодинамики; случайные процессы, стохастические дифференциальные уравнения по пуассоновской и винеровской мерам, метод частиц.

STOCHASTIC MAGNETIC HYDRODYNAMIC HIERARCHY IN A STRONG EXTERNAL MAGNETIC FIELD*S.V. Bogomolov, N.B. Esikova*

Lomonosov Moscow State University

Based on a stochastic microscopic collisional model of the motion of charged particles in a strong external magnetic field, a hierarchy of equations of magnetic hydrodynamics is constructed. The transition to increasingly rough approximations occurs in accordance with a decrease in the dimensioning parameter, similar to the Knudsen number in gas dynamics. The result is stochastic and nonrandom macroscopic equations that differ from the magnetic analog of the Navier–Stokes system of equations as well as from the

systems of magnetic quasi-hydrodynamics. The main feature of this derivation is a more accurate velocity averaging due to the analytical solution of stochastic differential equations with respect to the Wiener measure, in the form of which the intermediate meso model is presented in the phase space. This approach differs significantly from the traditional one, which uses not the random process itself, but its distribution function. Emphasis is placed on clarity of assumptions when moving from one level of detail to another, and not on numerical experiments that contain additional approximation errors.

Key words: Boltzmann equation, Kolmogorov–Fokker–Planck equation, Navier–Stokes equation, Lorentz force, magnetohydrodynamic and quasi – gasdynamic equations; random processes, stochastic differential equations with respect to Poisson and Wiener measures, particle method.

1. Введение

Побудительным мотивом настоящей работы явились статьи [1–4]. Нашей целью является получение магнитогидродинамических (МГД) уравнений, исходя из достаточно прозрачного представления о движении заряженных частиц под действием силы Лоренца с учётом их столкновений, которые и отвечают за диффузионные члены в макроскопической задаче. Мы сосредоточимся на газодинамической части полной системы МГД уравнений, считая внешнее магнитное поле заданным, тем самым пренебрегая самосогласованным полем, создаваемым самими движущимися зарядами, так же как и электрическим полем. Последнее является стандартным предположением, основанным на электронейтральности плазмы. В дальнейшем газ заряженных частиц будем называть просто газом.

Описание газодинамических явлений на основе различных иерархий микро – макро моделей давно уже стало классическим разделом теоретической физики и базой для суперкомпьютерных промышленных приложений [5]. Более того, микро–макро иерархия имеет огромное значение для перехода к эксафлопным вычислениям и интеллектуальной обработке больших данных, потому что огромные вычислительные мощности предъявляют новые требования как к вычислительным алгоритмам, так и к уравнениям математической физики. В последнее время всё большее внимание уделяется «мезо» моделям в фазовом пространстве, называемых чаще всего уравнениями Колмогорова–Фоккера–Планка. Такие модели используются и теоретиками (например, [6, 7]), и вычислителями [8–10], правда, для максвелловских молекул (не имеющих физической интерпретации), а не для газа из твёрдых сфер. Вычислительные эксперименты [11] показывают, что эти две модели существенно отличаются друг от друга. Подчеркнём, наши рассуждения относятся к взаимодействиям типа упругих шаров, лежащим в основе кинетической теории столкновительных явлений.

Цепочка сквозных, многомасштабных микро-, мезо-, макромоделей, справедливых в различных подобластях, в которых решается рассматриваемая задача, возникает в соответствии с разными значениями малого параметра, роль которого выполняет число Кнудсена.

2. Схема микро – макро перехода

Предварительно опишем последовательность наших рассуждений на простейшем примере получения уравнения переноса, уравнения в частных производных, из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение (положения в пространстве с течением времени $x_i(t)$) большого числа частиц, движущихся с заданными скоростями $v_i(x, t)$:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Назовём эту систему микро–моделью. N велико, поэтому обычно переходят к макроскопическому описанию, вводя меру с плотностью $u(x, t)$, которая порождается совокупностью траекторий $x_i(t)$ по формуле ($\varphi(x)$ – достаточно гладкая финитная функция):

$$\forall \varphi(x) : \int \varphi(x) u(x, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i(t)). \quad (1)$$

Для того чтобы написать уравнение, которому удовлетворяет $u(x, t)$, продифференцируем её определение (1) по t :

$$\int \varphi \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} v_i.$$

Последнее выражение в соответствии с (1), если читать его справа налево и в качестве φ взять $v \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, превратится в $\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} (vu) dx$.

Мы приходим к обобщённому уравнению переноса:

$$\int \varphi \frac{\partial u}{\partial t} dx - \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} (vu) dx = 0.$$

Проинтегрировав по частям его второй член

$$\int \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (vu)}{\partial x} \right) dx = 0, \quad \forall \varphi$$

и учитывая произвольность φ , получим макро-уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} = 0.$$

3. Микро

Прежде всего, следуя [13, 14], положения и скорости частиц будем считать случайными величинами, что совершенно оправдано по физическим соображениям.

Начнём с формализации **Столкновений** частиц, которые порождают процессы диффузии, вязкости и теплопроводности. Изменение скорости сталкивающихся частиц называется функцией скачка, которая легко получается из решения задачи о столкновении двух твёрдых сфер диаметра D , в качестве которого возьмём диаметр эффективного сечения рассеяния (рис.1 слева): $\mathbf{f}(v_i, v_j, \omega) = \omega(\omega, v_i - v_j)$.

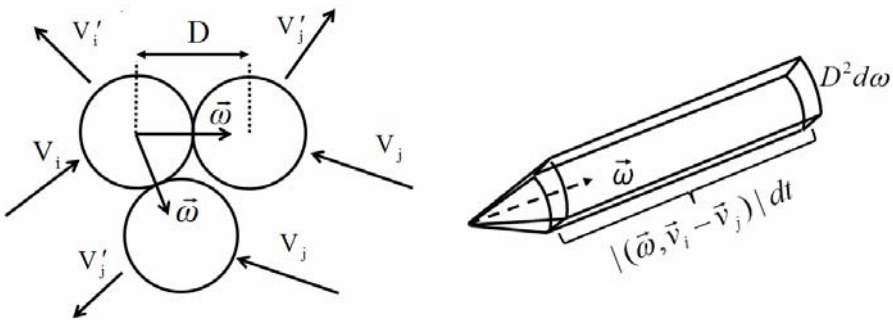


Рис.1. Геометрия столкновений двух частиц с двумя вариантами вектора ω (слева) и цилиндр для подсчёта $N_{ij}^{reached}$ (справа).

Стохастическая молекулярная динамика

$$dx_i(t) = v_i(t)dt,$$

$$dv_i(t) = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} f(v_i, v_j, \omega) p_{ij}(d\omega \times dt) + \frac{q_i}{m_i C} [v_i(t), B] dt, \quad (2)$$

$$\lambda_{ij} = N_{ij}^{collisions} / N, \quad N_{ij}^{collisions} = N_{ij}^{reached}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где положения $x_i(t)$ и скорости частиц $v_i(t)$ являются 3D случайными процессами, $f(\cdot)$ – функция скачка, или приращение скорости v_i из-за столкновения с частицей скорости v_j , p_{ij} – считающие независимые пуассонов-

ские меры (с интенсивностями λ_{ij}), которые указывают на факт столкновения или его отсутствие. Цилиндр справа на рис.1 для подсчёта числа столкновений за время dt – совершенно такой же, как и при выводе уравнения Больцмана. Здесь же отражена идея о том, что число ударивших по i – частице j – частиц равно их числу $N_{ij}^{reached}$, успевших до неё долететь за dt , а оно равно числу частиц, содержащихся в указанном цилиндре. Действие магнитного поля отражено присутствием силы Лоренца: B – магнитная индукция, $[\cdot, \cdot]$ – векторное произведение, q_i , m_i – заряды и массы частиц, C – скорость света.

Таким образом, мы построили исходную ступень нашей иерархии. С вычислительной точки зрения, определение $N_{ij}^{reached}$ на каждом шаге по времени – сложная алгоритмическая задача.

Как и в кинетической теории, она преодолевается переходом к сплошной среде в фазовом пространстве. Но только для вычисления λ_{ij} . Система стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) по скачкообразной мере остаётся прежней. Возникает новая ступенька в иерархии.

Микроскопическая модель получится, если для вычисления $N_{ij}^{reached}$ ввести для каждого из сортов частиц, определяемых их зарядами и массами, "функцию распределения" $F(\cdot)$, как её принято называть в физической литературе, или плотность распределения, по терминологии теории вероятности, которая определяется как обобщённая случайная функция:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{\text{Kn}} \frac{1}{2} F(x_i, v_j, t) \Delta x_i \Delta v_j,$$

$$\forall \varphi(x, v): \int \varphi(x, v) F(x, v, t) dx dv = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i(t), v_i(t)) q_i. \quad (3)$$

$F(\cdot)$ – плотность меры, порождённой процессом $(x(t), v(t))$, $\Delta x_i = = |(\omega, v_i - v_j)| dt D^2 d\omega$ – объём цилиндра для вычисления λ_{ij} . Здесь мы перешли к безразмерным величинам. $\text{Kn}(x, t) = 1/D^2 n_* x_*$ – число Кнудсена, D – эффективный диаметр сечения рассеяния, разный для разного сорта частиц. Kn – параметр обезразмеривания, зависящий от пространственной подобласти. Его физический смысл – отношение средней длины свободного пробега к характерному размеру подзадачи x_* , n_* – характерная плотность. $\text{Mn}(x, t) = q_i B^* t^* / m_i C$ – параметр обезразмеривания силы Лоренца, определяющий величину воздействия магнитного поля.

В областях с большими Kn наша модель может быть записана (здесь мы делать этого не будем) в виде уравнения Больцмана (с учётом флуктуаций) для F , которая случайна так же, как и λ_{ij} . Это – главное отличие от традиционной кинетической теории.

4. Мезо

Для перехода к макроскопическому описанию движения совокупности микроскопических частиц будем уменьшать число Кнудсена [12, 24, 25], и при умеренных числах Кнудсена получим следующую ступень нашей иерархии между молекулярным описанием и представлением о газе как о сплошной среде. Она основана на системе СДУ по винеровской мере $dw(t)$, описывающей движение частицы ($x(t)$ – её координата, $v(t)$ – скорость) в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} dx(t) &= v(t)dt, \\ dv(t) &= -\frac{1}{Kn} a(c)(v(t) - V)dt + \frac{1}{\sqrt{Kn}} \sigma(c)dw(t) + Mn[v(t), B]dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где c – модуль безразмерной тепловой скорости $c \equiv v(t) - V$, $V(x, t)$ – макроскопическая скорость, которая, как и коэффициенты во втором уравнении, вектор $a(c) = a(c)c$ и матрица $\sigma(c)$, будут определены ниже.

Она получена благодаря замене нашего скачкообразного процесса диффузионным, определяемым первыми двумя моментами процесса исходного [12, 15–17]. Её можно интерпретировать как движение частицы каждого из сортов в среднем самосогласованном поле.

Отметим сразу, что вектор $V(x, t)$ можно разложить, как это принято в МГД, на две составляющие – вдоль V_{par} и поперёк V_{perp} направления магнитного поля (направления B):

$$V(x, t) = V_{par} + V_{perp}, \quad (5)$$

Реализации этого процесса (набор траекторий) порождают меру, плотность $F(x, v, t)$ (3) которой удовлетворяет уравнению типа уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i F}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Mn[v, B]_i F}{\partial v_i} = \\ = \frac{1}{Kn} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i(F)(v_i - V_i)F}{\partial v_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^2(F)F}{\partial v_i \partial v_j} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Это уравнение давно известно как эвристическое модельное уравнение Больцмана с интегралом столкновений в форме Фоккера – Планка [18–20]. Однако ранее не конкретизировались его коэффициенты \mathbf{a} , σ^2 и пределы применимости такого приближения.

При малых числах Кнудсена для газа из твёрдых сфер (в приближении, когда при вычислении вектора «сноса» \mathbf{a} и матрицы "диффузии" σ^2 в пространстве скоростей делается упрощение, аналогично процедуре Чепмена–Энскога, в виде локальной максвелловости и изотропности по тепловой скорости \mathbf{c} функции распределения F внутри соответствующих интегралов), эти коэффициенты в уравнениях (4), (6) получаются [15, 22] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{c}) &= \frac{\mathbf{c}}{c} T^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(c) \left(2c^2 + 2 - \frac{1}{2c^2} \right) + \exp(-c^2) \left(2c + \frac{1}{c} \right) \right], \\ \sigma_{ij}^2(c) &= T^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} [\delta_{ij} P(c) + c_i c_j S(c)], \\ P(c) &= \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(c) \left(\frac{c^3}{3} + \frac{3}{2}c + \frac{3}{4c} - \frac{1}{8c^3} \right) + \exp(-c^2) \left(\frac{c^2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{4c^2} \right), \\ S(c) &= \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(c) \left(c + \frac{3}{2c} - \frac{3}{4c^3} + \frac{3}{8c^5} \right) + \exp(-c^2) \left(1 + \frac{1}{c^2} - \frac{3}{4c^4} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

T – безразмерная температура, δ_{ij} – символ Кронекера.

Квадратный корень σ из матрицы σ^2 находится стандартным образом с использованием ортонормированного базиса из собственных векторов:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(c) &= T^{3/4} \pi^{1/4} / 2 \left[\delta_{ij} \sqrt{\lambda_2} + c_i c_j / c^2 \left(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \right) \right], \\ \lambda_1 &= c^2 S(c) + P(c), \quad \lambda_2 = \lambda_3 = P(c). \end{aligned}$$

В [23] с помощью численных расчётов показано, что такие коэффициенты вполне годятся для представления газа при умеренных числах Кнудсена.

5. Макро

В настоящей работе мы постараемся получить более точные, чем выведенные в [16] и чем система уравнений Навье–Стокса, макроскопические уравнения магнитной газовой динамики. Более высокая точность основана на аналитическом решении системы (4), вернее, её упрощенного до уровня возможности рукописных выкладок варианта.

Отметим также, что наш подход с применением аппарата СДУ, отличается от других подходов получения уравнений квазигазодинамики, связанных с использованием детерминированных уравнений для функции распределения в фазовом пространстве [26–29], а также от других иерархических моделей [30].

5.1. Система стохастических дифференциальных уравнений

В этом разделе мы преобразуем систему (4) таким образом, чтобы получить из неё макроскопические уравнения, сохраняя при этом как можно больше микроскопической информации. Система (4) является системой уравнений для неизвестных функций $x(t)$ и $v(t)$. Выразим $v(t)$ через $x(t)$ из второго уравнения и подставим в первое, получив тем самым уравнение только относительно $x(t)$, из которого и последуют макроскопические уравнения. Для этого нам предстоит сделать ряд упрощений.

Аналитическое решение СДУ является более сложным делом, чем решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нам известно лишь несколько успешных примеров. Приведём наше уравнение к одному из них.

Коэффициенты (7) при больших c ведут себя как $\mathbf{a}(c) \sim a_1 c c$ ($a_1 \equiv \pi/2$) и $\sigma \sim \sigma_1 c^{3/2}$ ($\sigma_1 \equiv (2\sqrt{\pi} / (3\sqrt{3}))T^{1/4}$). Для приведения к форме, позволяющей получить точное решение, положим $\sigma = k\sigma_1 c$, вводя параметр k , который можно взять, например, таким, чтобы один из членов в нашей макро–модели совпадал с термодинамическим уравнением состояния газа. Сделаем это позднее. Подчеркнём, что введение параметра k вызвано желанием получить аналитические выражения, а уравнение состояния нам не требуется, все коэффициенты в наших уравнениях получаются как следствие модели твёрдых сфер. Кроме того, ограничимся матрицей σ в диагональной форме, пренебрегая внедиагональными элементами, которые в нашем предположении изотропности функции распределения в пространстве скоростей, скорее всего, дадут незначительный вклад при дальнейшем усреднении. Тогда система (4) примет вид:

$$\begin{cases} dx_i = v_i dt, \\ dv_i = -\frac{1}{\text{Kn}} a_{1i} c (v_i - V_i) dt + \frac{1}{\sqrt{\text{Kn}}} \sigma_{1ii} c dw_i + \text{Mn}[v, B]_i dt, \\ x_i|_{t=0} = x_{i0}, \quad v_i|_{t=0} = v_{i0}, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Здесь B – магнитная индукция, $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ – модуль безразмерной те-

пловой скорости. Из-за его присутствия второе уравнение, по-прежнему, не поддаётся точному решению, поэтому продолжим наши упрощения.

Предположим, что $c_1 = c_2 = c_3 \equiv c_i$, тогда $c = \sqrt{3} c_i \text{sign}(c_i)$,

$$[\mathbf{c}, \mathbf{B}] = c_i \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \right\| \equiv c_i \mathbf{b}^c,$$

то есть $b_1^c \equiv B_3 - B_2$, $b_2^c \equiv B_1 - B_3$, $b_3^c \equiv B_2 - B_1$.

Пусть $c_i > 0$, тогда

$$\begin{cases} dc_i = -\frac{1}{\text{Kn}} a_0 c_i^2 dt + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\text{Kn}}} c_i dw(t) + c_i \text{Mn } b_i^c dt + \text{Mn}[V, B]_i dt, \\ c_i|_{t=0} = c_{i0}, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

где мы заменили: $c = \sqrt{3} c_i$, $a_0 = \sqrt{3} a_{1i}$, $\sigma_0 = \sqrt{3} \sigma_{1ij}$. Обозначим $b_i^V \equiv \text{Mn}[V, B]_i$ и переобозначим $b_i^c \equiv \text{Mn } b_i^c$.

Для сокращения выкладок предположим, что $dc_i \equiv dv_i$ в силу того, что V меняется во времени гораздо медленнее, чем c .

Точное решение этого уравнения (см. Приложения 1,2) имеет вид:

$$c_i = \exp(y(t)) \left(\left(c_{0i}^{-1} + \frac{a_0}{\text{Kn}} \int_0^t \exp(y(s)) ds \right)^{-1} + b_i^V \int_0^t \exp(-y(s)) ds \right),$$

где $y(s) \equiv \frac{\sigma_0}{\sqrt{\text{Kn}}} w_s + \left(b_i^c - \frac{\sigma_0^2}{2\text{Kn}} \right) s$, тогда

$$v_i = V_i +$$

$$+ \exp(y(t)) \left((v_{0i} - V_{0i}) \left(1 + \frac{a_0(v_{0i} - V_{0i})}{\text{Kn}} \int_0^t \exp(y(s)) ds \right)^{-1} + b_i^V \int_0^t \exp(-y(s)) ds \right),$$

Преобразуем полученное выражение для v_i , для этого экспоненту разложим в ряд Тейлора–Ито вблизи $t = 0$:

$$\exp(y) = 1 + y + \frac{1}{2} y^2 + \dots; \quad y^2 = \frac{\sigma_0^2}{\text{Kn}} w_t^2 + 2b_i^c \frac{\sigma_0}{\sqrt{\text{Kn}}} w_t t + \dots;$$

$$\exp(y(t)) = \exp \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{\text{Kn}}} w_t + \left(b_i^c - \frac{\sigma_0^2}{2\text{Kn}} \right) t \right) = 1 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\text{Kn}}} w_t + b_i^c t + \frac{1}{2!} \frac{\sigma_0^2}{\text{Kn}} (w_t^2 - t) +$$

$$+ b_i^c \frac{\sigma_0}{\sqrt{\text{Kn}}} w_t t + \dots = 1 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\text{Kn}}} w_t + b_i^c t + b_i^c \frac{\sigma_0}{\sqrt{\text{Kn}}} w_t t + \dots \equiv 1 + z(t).$$

Здесь мы учли, что при малых t можно считать $w_t^2 \sim t$. Далее

$$v_i = V_i + (1 + z(t))(v_{0i} - V_{0i}) \left(1 + \frac{a_0(v_{0i} - V_{0i})}{\text{Kn}} \int_0^t \exp(1 + z(s)) ds \right)^{-1} +$$

$$+ (1 + z(t)) b_i^V \int_0^t \exp(1 - z(s)) ds,$$

$$v_i = V_i + (v_{0i} - V_{0i}) \text{Kn} (1 + z(t)) \left(\text{Kn} + a_0(v_{0i} - V_{0i}) \int_0^t (1 + z(s)) ds \right)^{-1}$$

$$+ (1 + z(t)) b_i^V \int_0^t \exp(1 - z(s)) ds.$$

Отбросим члены порядка Kn , сохранив члены с $\text{Kn} b_i^V$, потому что мы работаем в сильном внешнем магнитном поле. Учтём также, что

$$\int_0^t (1 \pm z(s)) ds = t + \sigma_0 \text{Kn}^{-1/2} \eta t^{3/2} 3^{-1/2} + \dots,$$

$\eta \sim N(0, 1)$ – стандартная нормально распределенная случайная величина. Тогда

$$v_i = V_i + \text{Kn} z(t) (a_0 (t + \sigma_0 \text{Kn}^{-1/2} \eta t^{3/2} 3^{-1/2} + \dots))^{-1} +$$

$$+ (1 + z(t)) b_i^V (t - \sigma_0 \text{Kn}^{-1/2} \eta t^{3/2} 3^{-1/2} + \dots),$$

$$\begin{cases} v_i = V_i + \frac{\sigma_0 \sqrt{\text{Kn}}}{a_0} \frac{w_t}{t} + \frac{b_i^V \text{Kn}}{a_0}, \\ dx_i = v_i dt. \end{cases}$$

Аналогично для случая $c_i < 0$:

$$\begin{cases} v_i = V_i + \frac{\sigma_0 \sqrt{\text{Kn}}}{a_0} \frac{w_t}{t} - \frac{b_i^V \text{Kn}}{a_0}, \\ dx_i = v_i dt. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} v_i = V_i + \frac{\sigma_0 \sqrt{Kn}}{a_0} \frac{w_t}{t} + \text{sign}(c_i) \frac{b_i^V Kn}{a_0} \equiv v_i^x, \\ dx_i = v_i dt. \end{cases} \quad (8)$$

$$x_i = \int v_i dt = x_0 + \left(V_i + \text{sign}(c_i) \frac{b_i^V Kn}{a_0} \right) t + \frac{\sigma \sqrt{Kn}}{a_0} \int_0^t \frac{w_s}{s} ds.$$

Вычисление интеграла $\int_0^t (w_s/s) ds$ приводится в [24, 25]:

$$\int_0^t (w_s/s) ds = \sqrt{t}(\varepsilon + \tilde{\varepsilon}),$$

где $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \sim N(0,1)$ – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией.

$$x_i = x_0 + \left(V_i + \text{sign}(c_i) \frac{b_i^V Kn}{a_0} \right) t + \frac{\sigma \sqrt{Kn}}{a_0} (\varepsilon + \tilde{\varepsilon}) \sqrt{t},$$

$$dx_i = \left(V_i + \text{sign}(c_i) \frac{b_i^V Kn}{a_0} \right) dt + \frac{\sigma \sqrt{Kn}}{a_0} dw_t + \frac{\sigma_0 \sqrt{Kn}}{a_0} d\tilde{w}_t,$$

$$dw_t dw_t = dt, \quad d\tilde{w}_t d\tilde{w}_t = dt, \quad dw_t d\tilde{w}_t = 0.$$

Мы приходим к системе:

$$\begin{cases} dx(t) = \left(V + \xi \frac{b_i^V Kn}{a_0} \right) dt + \sqrt{Kn} \tilde{\sigma} (dw + d\tilde{w}), \\ dv(t) = -\frac{1}{Kn} a(c)(v(t) - V) dt + \frac{1}{\sqrt{Kn}} \sigma(c) dw + Mn[v(t), B] dt, \end{cases} \quad (9)$$

где v понимается как v^x из (8), ξ – равномерно распределённая случайная величина с нулевым средним и

$$\tilde{\sigma}_{ij} \equiv \sigma_{0ij} / a_{0i} = 0.43kT^{1/4} = 3 / (2\sqrt{3}) T^{1/4}, \quad (10)$$

а V – вектор с координатами V_i . Обозначим также $\tilde{V}_i = V_i + \text{sign}(c_i)(b_i^V Kn/a_0)$.

Во втором уравнении вместо $a(c)$ и $\sigma(c)$ из (7) возьмём их, усреднённые по локальному максвеллиану в пространстве скоростей, значения, полученные численно:

$$a \approx 3 T^{1/2}, \quad \sigma \approx \sqrt{3} T^{3/4}. \quad (11)$$

Такое усреднение – один из возможных способов упрощения наших рассуждений. Другой подход, основанный на представлении (8), мы напомним исследовать в дальнейшем. Выбор коэффициентов, зависящих только от x и t , часто используется, например, в контексте модельного интеграла столкновений в форме Фоккера–Планка [20]. Отметим, из (11) следует, что в рассматриваемых нами упрощениях выполняется флуктуационно – диссипационное соотношение Эйнштейна (в размерном виде для удобства сравнения): $\sigma^2 / a = 2RT$.

Нетривиальным, на наш взгляд, является наличие приращения стохастического члена в первом уравнении в виде суммы двух независимых процессов, которое возникло при вычислении $\int_0^t w_s / s ds$.

Выведем уравнения стохастической магнитной газодинамики для этого набора коэффициентов. Это означает, что нам надо построить уравнение для мер в трехмерном пространстве, которые порождаются случайными процессами $x(t)$ и $v(t)$, протекающими в шестимерном фазовом пространстве. Физический смысл этих мер – эволюция распределений массы, импульса и энергии.

5.2. Уравнение неразрывности с самодиффузией

Величина массы газа, находящегося в области D , есть, с одной стороны, совокупная масса молекул, а с другой, интеграл по мере: $\sum_{l: x_l \in D} m_l = \int_D \mu_t(dx)$, или, если все частицы обладают одинаковой массой $1/N$:

$$\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \chi(x_l(t) \in D) = \int_D \mu_t(dx),$$

где χ – характеристическая функция. N можно рассматривать как число реализаций случайного процесса $x(t)$, представляющего собой решение системы (9). Поэтому определим стохастическую эмпирическую меру $\mu_t(dx)$ соотношением: для любой функции $\psi \in C_b^{(2)}(\mathbf{R}^3)$ (пространство дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций)

$$\int \psi(x) \mu_t(dx) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \psi(x_l(t)), \tag{12}$$

точнее:

$$\forall \psi \in C_b^{(2)}(\mathbf{R}^3), \forall D \in \mathbf{R}^3 : \int_D \psi(x) \mu_t(dx) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \psi(x_l(t)) \chi(x_l(t) \in D).$$

Это выражение, связывающее распределение меры с реализациями положений частиц в момент времени t , является квадратурной формулой Чебышёва (веса известны, узлы — параметры), если читать ее слева направо.

Чтобы получить уравнение для меры $\mu_t(dx)$, возьмем стохастический дифференциал от обеих частей (12). Для этого воспользуемся формулой Ито дифференцирования сложной функции

$$d\psi(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\psi}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

где стохастические дифференциалы dx_i берутся из системы (9):

$$dx_i = \tilde{V}_i dt + \sqrt{\text{Kn}} \sum_{j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij} (dw_j + d\tilde{w}_j),$$

а в силу определения приращения стандартного трехмерного винеровского процесса, малость которого есть \sqrt{dt} [31]:

$$dw_i dw_j = \delta_{ij} dt, \quad dw_i dt = 0, \quad dt^2 = 0, \quad (13)$$

что приводит к

$$dx_i dx_j = 2\text{Kn} \sum_{m,n=1}^3 (\tilde{\sigma}_{im} \tilde{\sigma}_{jn}) \delta_{mn} dt = 2\text{Kn} \sum_{m=1}^3 (\tilde{\sigma}_{im} \tilde{\sigma}_{jm}) dt \equiv 2\text{Kn} \tilde{\sigma}_{ij}^2 dt,$$

а значит, формула Ито в нашем случае получается в виде

$$d\psi(x) = \left(\sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \text{Kn} \sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij}^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \sqrt{\text{Kn}} \sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} (dw_j + d\tilde{w}_j). \quad (14)$$

Тогда получим стохастический дифференциал от обеих частей (12):

$$d \int \psi(x) \mu_t(dx) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left[\left(\sum_{i=1}^3 \tilde{V}_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \text{Kn} \sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij}^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x_l(t)) \right] dt + \\ + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left\{ \sqrt{\text{Kn}} \left[\sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right] (x_l(t)) (dw_j + d\tilde{w}_j) \right\},$$

или, используя формулу (12) справа налево для правой части последнего выражения,

$$d \int \Psi(x) \mu_t(dx) = \int \left[\left(\sum_{i=1}^3 V_i(x,t) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) + \text{Kn}(x,t) \sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij}^2(x,t) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) dt \right] \mu_t(dx) + \int \left\{ \sqrt{\text{Kn}(x,t)} \left[\sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij}(x,t) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) \right] (dw_j + d\tilde{w}_j) \right\} \mu_t(dx).$$

Предположив наличие плотности $\rho(x,t)$ у стохастической эмпирической меры $\mu_t(dx)$, рассуждая стандартным образом при выводе из уравнения обобщенного уравнения в частных производных, проинтегрировав один и два раза по частям в соответствующих местах, получим стохастическое уравнение неразрывности в виде:

$$d\rho = \left[-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i \rho) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\text{Kn} \tilde{\sigma}_{ij}^2 \rho) \right] dt - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\text{Kn}} \tilde{\sigma}_{ij} \rho) (dw_j + d\tilde{w}_j),$$

а усреднив по времени (взяв математическое ожидание и учитывая обращение в нуль математических ожиданий членов, содержащих $dw_j, d\tilde{w}_j$ ([20], теорема 3.2.1) – детерминированное уравнение неразрывности для усредненной по времени детерминированной плотности $\bar{\rho}(x,t)$:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{V_i \rho}) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\text{Kn} \overline{\tilde{\sigma}_{ij}^2 \rho}),$$

справедливое для малых чисел Кнудсена. Присутствие правой части отражает «след», оставляемый тепловым движением молекул, или самодиффузию, и не нарушает консервативности, потому что описывает диффузию и имеет дивергентный вид. Поэтому сомнения по поводу отсутствия закона сохранения в нашей макро-модели, высказанные в [32], нам представляются неуместными.

Естественно считать случайные величины ρ, V_i и $\tilde{\sigma}_{ij}^2$ (которая зависит от тепловой скорости c) независимыми, что при усреднении произведения даёт произведение средних. Если предполагать, что усреднение по времени приводит к величинам, используемым в традиционной газовой динамике, то мы приходим к следующему уравнению неразрывности с учетом самодиффузии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i \rho) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\text{Kn} \overline{\sigma_{ij}^2} \rho \right).$$

Если провести наши выкладки для модели газа из максвелловских молекул, «самодиффузионная» поправка в правой части получится исчезающе малой.

5.3. Эволюция импульса

Получим уравнения для импульса и его плотности. Количество движения газа, находящегося в области D , свяжем с векторной мерой $v_t(dx)$ соотношением $\sum_{l: x_l \in D} v_l m_l = \int_D v_t(dx)$, или, в обобщенном виде: $\forall \psi \in C_b^{(2)}(\mathbf{R}^3)$

$$\int \psi(x) v_{t,i}(dx) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N v_i^x(x_l(t)) \psi(x_l(t)) \quad (i=1, 2, 3), \quad (15)$$

рассматривая процесс $v^x(t)$, являющийся решением системы (9), как функцию от $x(t)$.

Возьмем стохастический дифференциал от обеих частей этого равенства. Нам потребуется стохастическая формула дифференцирования произведения ([31])

$$d(v_i \psi) = \psi dv_i + v_i d\psi + dv_i d\psi.$$

Стохастические дифференциалы dv_i представляют собой уравнения системы (9):

$$dv_i = -\frac{a_i}{\text{Kn}} (v_i - V_i) dt + \text{Mn}[v, B]_i dt + \frac{1}{\sqrt{\text{Kn}}} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} dw_j.$$

Опуская преобразования, подробно сделанные в [24, 25] без магнитной составляющей, и вводя меру $\beta_{t,i}(dx)$ (с учётом обозначения v^x из (8)):

$$\forall \psi(x) : \int \psi \beta_{t,i}(dx) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N [v^x, B]_i(x_l(t)), \quad (15)$$

получим уравнение для меры $v_{t,i}(dx)$:

$$d \int \psi(x) v_{t,i}(dx) = \left[\text{Kn} \int \psi \beta_{t,i}(dx) - \int \frac{a_i}{\text{Kn}} \psi v_{t,i}(dx) + \int \frac{a_i}{\text{Kn}} \psi V_i(x, t) \mu_t(dx) \right] dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\sum_{m=1}^3 \int \tilde{V}_m \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} \nu_{t,i}(dx) + \sum_{m=1}^3 \int \sigma_{im} \tilde{\sigma}_{im} \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} \mu_t(dx) \right] dt + \\
 & + \sum_{m,n=1}^3 \int \text{Kn} \tilde{\sigma}_{m,n}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_m \partial x_n} \nu_{t,i}(dx) dt + \\
 & + \sum_{n=1}^3 \int \frac{1}{\sqrt{\text{Kn}}} \sigma_{in} \Psi \mu_t(dx) dw_n + \sum_{m,n=1}^3 \int \sqrt{\text{Kn}} \tilde{\sigma}_{mn} \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} \nu_{t,i}(dx) (dw_n + d\tilde{w}_n).
 \end{aligned}$$

Обозначив через $\rho V_i(x, t)$, $[\rho V^x, B]_i$ плотность мер $\nu_{t,i}(dx)$, $\beta_{t,i}(dx)$ и проинтегрировав один и два раза по частям, придем к стохастическому дифференциальному уравнению, стохастическому аналогу уравнения Навье–Стокса:

$$\begin{aligned}
 d(\rho V_i) & = \text{Mn}[\rho V^x, B]_i dt - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (\tilde{V}_m \rho V_i) dt - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (\sigma_{im} \tilde{\sigma}_{im} \rho) dt + \\
 & + \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} (\text{Kn} \tilde{\sigma}_{mn}^2 \rho V_i) dt + \sum_{n=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\text{Kn}}} \sigma_{in} \rho dw_n + \\
 & + \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (\sqrt{\text{Kn}} \tilde{\sigma}_{mn} \rho V)_i (dw_n + d\tilde{w}_n).
 \end{aligned}$$

Взяв математическое ожидание, на основании тех же соображений, что и при выводе детерминированного уравнения неразрывности с самодиффузией, получим детерминированное уравнение для плотности импульса (черту над газодинамическими величинами, означающую усреднение по времени, опустим):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (V_m \rho V_i) & = \text{Mn}[\rho V, B]_i - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (\overline{\sigma_{im} \tilde{\sigma}_{im} \rho}) + \\
 & + \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} (\text{Kn} \overline{\tilde{\sigma}_{mn}^2} \rho V_i), \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

5.4. Распределение энергии

Получим уравнение для плотности энергии. Определим меру $\varepsilon_t(dx)$:

$$\forall \Psi \in C_b^{(2)}(\mathbf{R}^3): \int \Psi(x) \varepsilon_t(dx) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \Psi(x_l(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{v_i^2}{2}(x_l(t)). \quad (16)$$

Воспользуемся стохастической формулой дифференцирования произведения

$$d\left(\frac{v_i^2}{2}\psi\right) = \psi d\left(\frac{v_i^2}{2}\right) + \frac{v_i^2}{2}d\psi + d\left(\frac{v_i^2}{2}\right)d\psi, \quad d\left(\frac{v_i^2}{2}\right) = v_i dv_i + \frac{1}{2}(dv_i)^2,$$

системой (9), техникой [24, 25] и введём меру:

$$\forall \psi \in C_b^{(2)}(\mathbf{R}^3): \int \psi(x) \gamma_t(dx) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \psi(x_l(t)) \sum_{i=1}^3 v_i^x [v, B]_i(x_l(t)).$$

Стохастическое дифференцирование формулы (16) с учетом только что полученных соотношений приводит к уравнению для эволюции меры $\varepsilon_t(dx)$ из которого, предполагая наличие плотностей $\rho V_i(x, t)$, $\rho E(x, t)$ и $(V^x, [\rho V^x, B])$ у мер $\nu_{t,i}(dx)$, $\varepsilon_t(dx)$ и $\gamma_t(dx)$ получим стохастическое дифференциальное уравнение для плотности энергии:

$$\begin{aligned} d(\rho E) = & \sum_{j=1}^3 \text{Mn} V_j^x [\rho V^x, B]_j dt + \left[- \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{V}_j \rho E) - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} \rho V_i) \right] dt + \\ & + \left[\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\text{Kn} \tilde{\sigma}_{ij}^2 \rho E) \right] dt + \frac{1}{\sqrt{\text{Kn}}} \sum_{i,m=1}^3 \sigma_{im} \rho dw_m + \\ & + \sqrt{\text{Kn}} \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (\tilde{\sigma}_{mn} \rho E) (dw_n + d\tilde{w}_n), \end{aligned}$$

а его детерминированная часть (знак усреднения над макропараметрами опустим) как

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j \rho E) = \\ = \sum_{j=1}^3 \text{Mn} V_j [\rho V, B]_j dt - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} \rho V_i}) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\text{Kn} \overline{\tilde{\sigma}_{ij}^2 \rho E}). \end{aligned}$$

5.5. Система уравнений стохастической магнитной газодинамики

Выпишем полученную стохастическую систему в декартовых координатах в развернутом виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\text{Kn} \overline{\tilde{\sigma}_{ij}^2} \rho), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j \rho V_i) &= \\ &= \text{Mn}[\rho V, B]_i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} \rho}) + \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} (\text{Kn} \overline{\tilde{\sigma}_{kj}^2} \rho V_i), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j \rho E) &= \\ &= \sum_{j=1}^3 \text{Mn} V_j [\rho V, B]_j - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} \rho V_j}) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\text{Kn} \overline{\tilde{\sigma}_{ij}^2} \rho E). \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Обозначим и вычислим с учётом (10), (11) $A \equiv \overline{\tilde{\sigma}_{ij}^2} = (3/4)T^{1/2}$, $G \equiv \overline{\sigma_{ij} \tilde{\sigma}_{ij}} = T$. Последнее означает наш выбор параметра k таким, чтобы комбинацию $G\rho$, которая появится во втором уравнении последующей системы, мы могли бы обозначить через p , назвав его «давлением», а равенство $p = G\rho$, или $p = \rho RT$ (в размерном виде), – уравнением состояния. Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\text{Kn} A \rho), \\ \frac{\partial (\rho V_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j (\rho V_i)) &= \text{Mn}[\rho V, B]_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (G\rho) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\text{Kn} A (\rho V_i)), \quad i=1,2,3, \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j (\rho E)) &= \\ &= \sum_{j=1}^3 \text{Mn} V_j [\rho V, B]_j - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (G(\rho V_j)) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\text{Kn} A (\rho E)). \end{aligned} \right.$$

Введя обозначения $p + B^2/8\pi \equiv \text{Mn} G\rho$, $\nu \equiv \text{Kn} A$ и называя $p + B^2/8\pi$ магнитным давлением, а ν коэффициентом кинематической вязкости, получим систему макроскопических уравнений в традиционном виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (v\rho) \\ \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j(\rho V_i)) &= \\ &= \text{Mn}[\rho V, B]_i - \frac{\partial(p + B^2 / 8\pi)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (v(\rho V_i)), \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j(\rho E)) &= \\ &= \sum_{j=1}^3 \text{Mn} V_j [\rho V, B]_j - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial((p + B^2 / 8\pi)V_j)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (v(\rho E)). \end{aligned} \right.$$

Здесь (5): $V(x, t) = V_{par} + V_{perp}$.

Приложение 1. $dx_t = (\phi x_t + \beta x_t^2)dt + \alpha x_t dw_t$.

$$dx_t = (\phi x_t + \beta x_t^2)dt + \alpha x_t dw_t, \quad \alpha, \beta, \phi - \text{const.} \quad (18)$$

Введем интегрирующий множитель ([31], гл. 5)

$$F_t = \exp(-\alpha w_t + (\alpha^2 / 2)t - \phi t).$$

Умножим на него обе части уравнения

$$F_t dx_t = (\phi x_t + \beta x_t^2)F_t dt + \alpha x_t F_t dw_t, \quad F_t dx_t - \alpha x_t F_t dw_t - \phi x_t F_t dt = \beta x_t^2 F_t dt$$

и покажем, что левая часть последнего уравнения равна $d(F_t x_t)$. По формуле стохастического дифференцирования произведения

$$d(F_t x_t) = F_t dx_t + x_t dF_t + dx_t dF_t.$$

Найдём dF_t , используя формулу Ито для функции

$$g(t, x) = \exp(-\alpha x + (\alpha^2 / 2)t - \phi t): \quad dF_t = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dw_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dw_t)^2,$$

$$dt dt = 0, \quad dt dw_t = 0, \quad dw_t dt = 0, \quad (dw_t)^2 = dt,$$

$$\partial g / \partial t = F_t (\alpha^2 / 2 - \phi), \quad \partial g / \partial x = (-\alpha) F_t, \quad \partial^2 g / \partial x^2 = \alpha^2 F_t,$$

$$dF_t = (\alpha^2 / 2 - \phi) F_t dt + (-\alpha) F_t dw_t + (\alpha^2 / 2) F_t dt = (\alpha^2 - \phi) F_t dt + (-\alpha) F_t dw_t.$$

Подставим dx_t из уравнения (18):

$$dx_t dF_t = -\alpha^2 F_t x_t dt,$$

$$d(F_t x_t) = F_t dx_t + \alpha^2 F_t x_t dt - \phi F_t x_t dt - \alpha F_t x_t dw_t - \alpha^2 F_t x_t dt = F_t dx_t - \alpha F_t x_t dw_t.$$

Таким образом, уравнение (18) равносильно уравнению:

$$d(F_t x_t) = \beta x_t^2 F_t dt. \tag{19}$$

Обозначим $F_t(\xi)x_t(\xi) = y_t(\xi)$, считая ξ параметром, тогда $x_t = F_t^{-1}y_t$, а уравнение (19) можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $t \rightarrow y_t(\xi)$ для каждого ξ [31]:

$$\begin{cases} dy_t(\xi)/dt = F_t(\xi)h(t, F_t^{-1}(\xi)y_t(\xi)), \\ y|_{t=0} = x_0(\xi), \quad h(t, x_t) = \beta x_t^\gamma. \end{cases} \tag{20}$$

Решим уравнение (20) относительно $y_t(\xi)$.

$$x_t = F_t^{-1}y_t = \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t + \phi t)y_t,$$

$$dy_t/dt = \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t + \phi t)\beta y_t^2, \quad dy_t/y_t^2 = \beta(\exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t + \phi t))dt,$$

$$y_t = \left(y_0^{-1} - \beta \int_0^t \exp(\alpha w_s - (\alpha^2/2)s + \phi s) ds \right)^{-1}.$$

Окончательно для x_t получаем

$$x_t = \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t + \phi t) \left(x_0^{-1} - \beta \int_0^t \exp(-\alpha w_s + (\alpha^2/2)s + \phi s) ds \right)^{-1}.$$

Приложение 2. $dx_t = (\delta + \beta x_t^2)dt + \alpha x_t dw_t$.

$$dx_t = (\delta + \beta x_t^2)dt + \alpha x_t dw_t, \quad \alpha, \beta, \delta - \text{const}. \tag{21}$$

Введем интегрирующий множитель ([31], гл. 5)

Действуя так же, как и в Приложении 1, получим, что уравнение (21) равносильно уравнению:

$$d(F_t x_t) = \beta x_t^2 F_t dt + \delta F_t dt, \tag{22}$$

а вместо (20)

$$\begin{cases} dy_t(\xi)/dt = F_t(\xi)h(t, F_t^{-1}(\xi)y_t(\xi)), \\ y|_{t=0} = x_0(\xi), \quad h(t, x_t) = \beta x_t^\gamma + \delta. \end{cases} \tag{23}$$

Решим уравнение (23) относительно $y_t(\xi)$.

$$x_t = F_t^{-1} y_t = \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t) y_t,$$

$$dy_t / dt = \beta \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t + \phi t) y_t^2 + \delta \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t + \phi t).$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$dy_t / dt = \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t) \beta y_t^2, \quad dy_t / y_t^2 = \beta \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t) dt,$$

$$1/y_t = -\beta \int_0^t \exp(\alpha w_s - (\alpha^2/2)s) ds + C, \quad y_t = \left(y_0^{-1} - \beta \int_0^t \exp(\alpha w_s - (\alpha^2/2)s) ds \right)^{-1}.$$

Подобрав частное решение $\delta \int_0^t \exp(-\alpha w_s + (\alpha^2/2)s) ds$, получим

$$y_t = \left(y_0^{-1} - \beta \int_0^t \exp(\alpha w_s - (\alpha^2/2)s) ds \right)^{-1} + \delta \int_0^t \exp(-\alpha w_s + (\alpha^2/2)s) ds,$$

$$x_t = \exp(\alpha w_t - (\alpha^2/2)t) \times$$

$$\times \left(\left(x_0^{-1} - \beta \int_0^t \exp(-\alpha w_s + (\alpha^2/2)s) ds \right)^{-1} + \delta \int_0^t \exp(-\alpha w_s + (\alpha^2/2)s) ds \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Б.Н. Четверушкин, Н.Д'Асчензо, А.В. Савельев, В.И. Савельев.* Кинетическая модель для магнитной газовой динамики // Матем. моделирование, 2017, т.29, №3, с.3–15; англ. пер.: *B.N. Chetverushkin, N.D'Ascenzo, A.V. Saveliev, V.I. Saveliev.* A kinetic model for magnetogas dynamics // Math. Models & Comput. Simul., 2017, v.9, №1, p.544–553.
2. *Б.Н. Четверушкин, Н.Д'Асчензо, А.В. Савельев, В.И. Савельев.* Кинетическая модель и уравнения магнитной газовой динамики // ЖВМ и МФ, 2018, т.58, №5, с.691–699; англ. пер.: *B.N. Chetverushkin, N.D'Ascenzo, A.V. Saveliev, V.I. Saveliev.* Kinetic Model and Magnetogas dynamics Equations // Comp. Math. Math. Phys., 2018, v.58, №5, p.691–699.
3. *Б.Н. Четверушкин, А.В. Савельев, В.И. Савельев.* Квазигазодинамическая модель для описания магнитогазодинамических явлений // ЖВМ и МФ, 2018, т.58, №8, с.189–199; англ. пер.: *B. N. Chetverushkin, A V. Saveliev, V.I. Saveliev.* A Quasi-Gasdynamic Model for the Description of Magnetogasdynamic Phenomena // Comput. Math. Math. Phys., 2018, v.58, №8, p.1384–1394.
4. *А.А. Самарский, А.В. Захаров, А.Г. Свешников.* Расчёт движения заряженного пучка больших частиц с учётом собственного пространственного заряда пучка // ДАН СССР, 1971, т.197, №3, с.554–557; *A.A. Samarskii, A.V. Zaharov, A.G. Sveshnikov.* Raschet dvizheniia zariazhennogo puchka bolshikh chastits s uchetom sobstvennogo prostranstvennogo zariada puchka // Doklady akademii nauk, 1971, v.197, №3, p.554–557.

5. *V.I. Kolobov, R.R. Arslanbekov, V.V. Aristov, A.A. Frolova, S.A. Zabelok.* Unified solver for rarefied and continuum flows with adaptive mesh and algorithm refinement // *Journal of Computational Physics*, 2007, v.223, № 2, p.589–608.
6. *В.И. Богачёв, Н.В. Крылов, М. Рёкнер, С.В. Шапошников.* Уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. – М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2013, 592 с.
V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Rekner, S.V. Shaposhnikov. Uravnenia Fokkera–Planka–Kolmogorova. – ИКИ, 2013, 576 p.
7. *Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов.* Перемежаемость в случайной среде // *УФН*, 1987, т.152, № 1, с.3–32;
англ. пер.: *Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokolov.* Intermittency in random media // *Sov. Phys. Uspekhi*, 1987, v.30, № 5, p.353–369.
8. *M.H. Gorji, P. Jenny.* Fokker–Planck–DSMC algorithm for simulations of rarefied gas flows // *Journal of Computational Physics*, 2015, v.287, p.110–129.
9. *J. Zhang, D. Zeng, J. Fan.* Analysis of transport properties determined by Langevin dynamics using Green-Kubo formulae // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2014, v.411, p.104–112.
10. *М.Ф. Иванов, В.А. Гальбурт.* Стохастический подход к численному решению уравнения Фоккера-Планка // *Математическое моделирование*, 2008, т.20, № 11, с.3–27;
M.F. Ivanov, V.A. Galburt. Stokhasticheskii podkhod k chislennomu resheniiu uravneniia Fokkera – Planka // *Matem. modelirovanie*, 2008, v.20, №11, p.3–27.
11. *V.K. Gupta, M. Torrilhon.* Comparison of relaxation phenomena in binary gas-mixtures of Maxwell molecules and hard spheres // *Computers & Mathematics with Applications*, 2015, v.70, № 1, p.73–88.
12. *С.В. Богомолов.* Об одном подходе к получению стохастических моделей газодинамики // *ДАН*, 2008, т.423, № 4, с.458–461;
англ. пер.: *S.V. Bogomolov.* An approach to deriving stochastic gas dynamics models // *Doklady Mathematics*, 2008, v.78, p.929–931.
13. *А.В. Скороход.* Стохастические уравнения для сложных систем. – М.: Наука, 1983;
англ. пер.: *A.V. Skorokhod.* Stochastic Equations for Complex Systems. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1987.
14. *А.А. Арсеньев.* О приближении решения уравнения Больцмана решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито // *ЖВМиМФ*, 1987, т.27, № 3, с.400–410;
англ. пер.: *A.A. Arsen'yev.* On the approximation of the solution of the Boltzmann equation by solutions of the Ito stochastic differential equations // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1987, v.27, № 2, p.400–410.
15. *С.В. Богомолов.* О модели Фоккера – Планка для интеграла столкновений Больцмана при умеренных числах Кнудсена // *Матем. моделиров.*, 2009, т.21, №1, с.111–117;
англ. пер.: *S.V. Bogomolov.* On Fokker-Planck model for the Boltzmann collision integral at the moderate Knudsen numbers // *Math. Mod. & Comp. Simul.*, 2009, v.1, №6, p.739–744.
16. *С.В. Богомолов, Л.В. Дородницын.* Уравнения стохастической квазигазодинамики. Случай вязкого газа // *Математическое моделирование*, 2010, т.22, № 12, с.49–64;
англ. пер.: *S.V. Bogomolov, L.V. Dorodnitsyn.* Equations of stochastic quasi-gas dynamics: Viscous gas case // *Math. Models & Comp. Simulations*, 2011, v.3, № 4, p.457–467.
17. *S.V. Bogomolov.* Stochastic quasi gas dynamics equations as a base for particle methods // *Proc. V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010*, Lisbon, Portugal, 2010.

18. *S. Chandrasekhar*. Stochastic problems in physics and astronomy // *Rev. Modern. Phys.*, 1943, v.15, № 1, p.1–89.
19. *J.G. Kirkwood*. The statistical mechanical theory of transport processes // *J. Chem. Phys.*, 1946, v.14, № 3, p.180–201.
20. *C. Cercignani*. Rarefied Gas Dynamics: From Basic Concepts to Actual Calculations. – Cambridge University Press, 2000.
21. *А.В. Скороход*. Стохастические уравнения для сложных систем. – М.: Наука, 1983; англ. пер.: *A.V. Skorokhod*. Stochastic Equations for Complex Systems. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1987.
22. *С.В. Богомолов, И.Г. Гудич*. О диффузионной модели газа в фазовом пространстве при умеренных числах Кнудсена // *Матем. моделирование*, 2012, т.24, №8, с.45–64; англ. пер.: *S.V. Bogomolov, I.G. Gudich*. Diffusion model of gas in a phase space for moderate Knudsen numbers // *Math. Models & Comp. Simul.*, 2013, v.5, № 2, p.130–144.
23. *С.В. Богомолов, И.Г. Гудич*. К верификации стохастической диффузионной модели газа // *Математическое моделирование*, 2013, т.25, № 11, с.17–35; англ. пер.: *S.V. Bogomolov, I.G. Gudich*. Verification of a stochastic diffusion gas model // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, v.6, № 3, p.305–316.
24. *С.В. Богомолов, Н.Б. Есикова, А.Е. Кувшинников*. Микро-макро модели Фоккера–Планка–Колмогорова для газа из твёрдых сфер // *Матем. модел.*, 2016, т.28, №2, с.65–85; англ. пер.: *S.V. Bogomolov, N.B. Esikova, A.E. Kuvshinnikov*. Micro-macro Kolmogorov–Fokker–Planck models for a hard-sphere gas // *MM&CS*, 2016, v.8, №5, p.533–547.
25. *S.V. Bogomolov, N.B. Esikova, A.E. Kuvshinnikov*. Meso - macro models for a hard sphere gas // *Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2016)*, European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS) Crete Island, Greece, 2016. v.2, p.3121–3138.
26. *Б.Н. Четверушкин*. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // *Математическое моделирование*, 2012, т.24, № 11, с.33–52; англ. пер.: *B.N. Chetverushkin*. Resolution limits of continuous media mode and their mathematical formulations // *Math. Mod. & Comp. Simul.*, 2013, v.5, № 3, p.266–279.
27. *Т.Г. Елизарова*. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир, 2007, 351 с.; англ. пер.: *T.G. Elizarova*. Quasi-Gas Dynamic Equations // Springer, 2009, 283 p.
28. *H. Brenner*. Bi-velocity hydrodynamics // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2009, v.388, p.3391–3398.
29. *J. Mathiaud, L. Mieussens*. A Fokker–Planck model of the Boltzmann equation with correct Prandtl number // 2015, arXiv : math.AP/1503.01246.
30. *K. Morinishi*. A continuum/kinetic hybrid approach for multi-scale flow // *Proc. ECCOMAS CFD 2006*, Egmond an Zee, Netherlands, 2006.
31. *B. Oksendal*. Stochastic Differential Equations. 6th edition. – Berlin : Springer, 2000, 390 p.
32. *S.K. Dadzie, J.M. Reese*. A Fokker–Planck model of the Boltzmann equation with correct Prandtl number // 2011, arXiv: mathph/1202.3169.
33. *С.С. Степанов*. Стохастический мир: электрон. версия, 2011, URL:<http://synset.com/pdf/ito.pdf>; англ. пер.: *S.S. Stepanov*. Stochastic world // Springer International Publishing, 2013.

Поступила в редакцию 11.03.2019

После доработки 11.03.2019

Принята к публикации 08.04.2019