

ОСНОВНЫЕ МОМЕНТЫ ЗАДАЧИ АКТИВНОЙ ЗАЩИТЫ ОТ ВНЕШНЕГО ШУМА

© 2019 г. *В.И. Турчанинов*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
vturchaninov@yandex.ru

Работа выполнена при непосредственном участии и поддержке Виктора Соломоновича Рябенского.

DOI: 10.1134/S0234087919090053

Рассматривается задача защиты разговора в комнате с открытым окном от уличного шума в качестве примера более общей задачи защиты в реальном времени заданной области от наружного шума. Речь идёт об активной защите, то есть она осуществляется с помощью дополнительных источников звука, располагаемых на границе области. Эти источники дополняются окружающей их измерительной аппаратурой, следящей в интерактивном режиме за состоянием акустической среды, совокупность которых будем называть прибором защиты.

Для решения задачи защиты В.С. Рябенским построена математическая модель процесса защиты, основанная на методе разностных потенциалов (МРП) и текущей акустической разведки (ТАР). В этой модели управление динамиками прибора ослабляет шум в заданное число раз. Однако конструктивная реализация математической модели затруднена, потому что в ней аппаратура прибора плотным кольцом окружает защищаемую область. Для того чтобы преодолеть указанную трудность, будет построена приближённая модель прибора защиты с крупной сеткой динамиков путём специальной аппроксимации математической модели.

На простом примере излагается математическая модель процесса защиты. Изложение ведётся таким образом, чтобы обеспечить широкие возможности в выборе конкретных вариантов шумоподавления. Далее предлагается методика получения экономной аппроксимации математической модели и на численных примерах демонстрируется её эффективность и, при условии аккуратного исполнения, её устойчивость.

Ключевые слова: активная защита от шума в реальном времени, активное экранирование, метод разностных потенциалов (МРП), текущая акустическая разведка (ТАР), активное подавление шума.

BASIC ISSUES OF ACTIVE NOISE SHIELDING PROBLEM

V.I. Turchaninov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

Keywords: real-time active noise shielding, active sound control, difference potential method (DPM), real-time acoustic exploration (RAE), active noise control (ANC).

We consider a problem of active noise shielding from street noise inside a room with open window. The problem is considered as an example of more complex problem of real time active shielding of the prescribed domain from an external noise. We consider an active shielding which means that it is performed using additional sound sources (“speakers”) which are situated at the domain boundary. These sound sources are complemented by measurement facilities which follow the acoustic state of the environment. The sound sources accompanied by measurement facilities are called “shielding device”. For solution of this problem in the works of V.S. Riabenskiy it was developed the mathematical model of the acoustic shielding process based on the difference potentials method and real-time acoustic exploration. In this model an external noise can be reduced by the predefined ratio by controlling the output of the “speakers”. However, a practical implementation of the proposed approach is hindered because “shielding device” components are supposed to enclose the shielding domain by a dense ring of measurement facilities and “speakers”. To avoid these difficulties in this paper an approximate model of the shielding device is developed which uses a coarse mesh of “speakers” using special approximation of the original mathematical model.

We describe a mathematical model of the shielding process using simple example. The presentation is carried out in a way that provides wide possibilities in a choice of concrete variants of shielding. Further an approach is presented to derive an efficient numerical approximation of the mathematical model. A number of numerical examples are described which demonstrate its efficiency and, in the case of an accurate implementation, stability.

1. Введение

Рассматривается задача защиты в реальном времени акустического поля в заданной области от внешнего шума. В ней защищаемым является поле от источников внутри области, а поле от остальных, внешних источников, считается шумом. Защита предполагается активной, т.е. она осуществляется с помощью дополнительных источников звука (дополнительных динамиков), располагаемых по границе защищаемой подобласти. Наглядным примером может служить задача защиты разговора в комнате с открытым окном от уличного шума с помощью прибора защиты, вставленного в окно, где прибор защиты состоит из динамиков и окружающей их измерительной аппаратуры вместе с ограниченным ею пространством. Разностная математическая модель процесса защиты, основанная на методе разностных потенциалов (МРП) и текущей акустической разведки (ТАР), построена В.С. Рябенским в части 6 монографии [1] (см. также [2]). В этой модели текущее управление динамиками прибора, обеспечивающими ослабление шума в заданное число раз, основано на обработке только практически доступной те-

кущей информации, собираемой прибором. Используется только знание суммарного акустического давления в области прибора всех источников звука (в том числе осуществляющих экранирование), а также знание в той же области коэффициентов линейного дифференциального уравнения акустики. Более того, собираемая информация не только достаточна, но и является минимально возможной, потому что её сокращение привело бы к образованию неконтролируемых “дыр” на границе.

Однако конструктивная реализация изложенного подхода затруднена. Дело в том, что интерпретация разностной схемы в качестве математической модели реального процесса имеет основание только при достаточно мелкой сетке. Поэтому воспроизводство этой разностной модели реального процесса в виде физической конструкции потребовало бы такого же количества микрофонов и управляющих микродинамиков, каково число приграничных точек мелкой сетки. Но тогда для конструктивной реализации прибора защиты придется приближённо заменить первоначальный алгоритм МРП и ГАР каким-либо алгоритмом, который использует лишь небольшое число микрофонов и небольшое число дополнительных управляющих источников звука.

Содержание настоящей публикации состоит в обсуждении общих подходов к экономной аппроксимации и общих способов численного обоснования и изучения свойств подлежащих созданию физических приборов защиты. Для обзримости и прозрачности это делается с помощью рассмотрения удобного характерного примера, на котором излагается теория В.С. Рябенского, и описывается её применение к задаче о взаимной защите. Далее предлагается методика получения экономной аппроксимации математической модели и на численных примерах демонстрируется её эффективность и при условии аккуратного исполнения – устойчивость.

2. Математическая модель защиты от шума

2.1. Схема защиты от шума. Вернёмся к задаче защиты от уличного шума, проникающего в комнату через открытое окно. Различают два способа её решения: пассивный – с помощью звуконепроницаемой перегородки, например, стеклопакета, и активный – с помощью расположенных в окне динамиков. При активном способе управлению подлежит источник звука, исходящий от динамиков. Целью управления является противодействие уличному шуму, причём такое, что разговор в комнате, по возможности, не искажается. Для подходящего управления было бы желательно знать в окне как проходящий звук с улицы, так и проходящий комнатный звук. На прак-

тике можно вполне обойтись измерением звукового поля на некотором расстоянии от окна: как снаружи него, так и с его внутренней стороны. Характерная схема защиты от шума изображена на рис. 1.

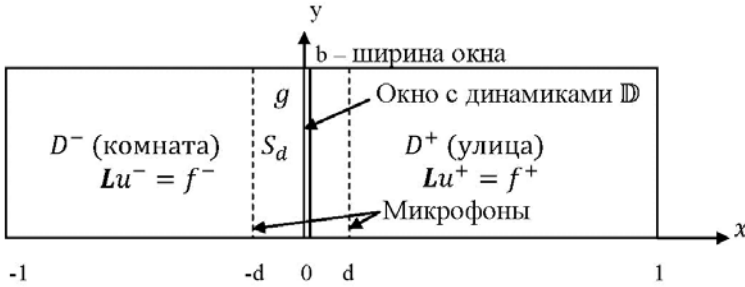


Рис.1. Схема защиты от шума.

На рис.1 обозначены: речь в комнате D^- – звуковое поле $u^-(x, y, t)$, возбуждаемое источником $f^-(x, y, t)$, и шум на улице D^+ – поле $u^+(x, y, t)$, создаваемое источником $f^+(x, y, t)$, $t \geq 0$ – время. Уравнения акустики запишем в виде $Lu^- = f^-$ и $Lu^+ = f^+$.

На рис.1 также изображён прибор защиты от шума. Он состоит из микрофонов и динамиков. Микрофоны выбраны на таком расстоянии d от окна, чтобы прибор защиты, занимающий полосу $S_d: -d \leq x \leq d$, не пересекался ни с комнатными, ни с уличными источниками звука. Динамики располагаются вдоль оси y в два ряда (двойная линия на рис.1). Символом \mathbb{D} обозначим множество динамиков; $g(x, y, t)$ – функция-источник, генерируемая динамиками прибора.

Разумеется, источники f^- , f^+ и g разделены по пространству. Каждая из этих функций отлична от нуля при $x < -d$, при $d < x$ и при $-d < x < d$ соответственно.

2.2. Модель распространения звука. Численные эксперименты будем проводить для разностных задач, связанных с дифференциальной краевой задачей в области $D = D^\pm = D^- \cup D^+$ с границей ∂D :

$$Lu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = f(x, y, t), \quad (1)$$

$$lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial n} \right) u \Big|_{(x,y) \in \partial D} = 0, \quad n - \text{внутренняя нормаль к } \partial D, \quad (2)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

относительно функции $u(x, y, t)$. Решение $u(x, y, t)$ этой задачи можно интерпретировать как звуковое давление в точке (x, y, t) . Отметим, что условие (2) – это локальное условие прозрачности, способствующее поглощению сигнала, падающего на границу области, и позволяющее избежать эффекта многократного эха.

Вычислительную модель реального физического процесса распространения звука зададим с помощью разностной схемы (4)–(6). Эта схема – классическая явная схема типа «крест» для волнового уравнения на равномерной сетке с шагом h по пространственным переменным x и y и с шагом τ по времени t

$$L_h u_h = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)_\tau - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)_h - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)_h \right) u_h = f_h, \quad (4)$$

где

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)_h u_{h,ijk} = \frac{u_{h,i-1jk} - 2u_{h,ijk} + u_{h,i+1jk}}{h^2} \quad \text{и т.п.,}$$

$$l_h u_h = \frac{u_{h,ijk+1}}{\tau} - \frac{(h-\tau)u_{h,ijk} + \tau u_{h,i-1jk}}{\tau h} \Big|_{ih=+1} = 0 \quad \text{и т.п.,} \quad (5)$$

$$u_{h,ijk} \Big|_{k=0;1} = 0, \quad (6)$$

где i, j, k – целочисленные индексы; $u_{h,ijk}$ соответствуют значению $u(ih, jh, k\tau)$. При чтении формул (4)–(6) полезно иметь ввиду соответствие

$$ijk \leftrightarrow (x, y, t) = (x_i, y_j, t_k) = (ih, jh, k\tau).$$

Индексы ijk служат также для нумерации уравнений (4)–(6) в соответствии со своими «центрными» слагаемыми. При решении уравнений (4)–(6) ijk -е уравнение используется для того, чтобы в момент времени $t = t_{k+1}$ найти неизвестное $u_{h,ijk+1}$ по известным к моменту времени $t \leq t_k$ значениям u_h .

2.3. Управление и цель управления. Источник f_h в задаче защиты от шума состоит из трех слагаемых:

$$f_h = f_h^- + f_h^+ + g_h \quad (7)$$

– разговора в комнате f_h^- , шума на улице f_h^+ и функции g_h , создаваемой

динамиками. Сначала не будем налагать на функцию g_h никаких ограничений.

Определение 1. Пусть задано звуковое поле z_h , порождённое источником вида (7): $f_h = f_h^- + f_h^+ + g_h$. Назовём поле z_h целью (управления), а функцию g_h – управлением.

Целевое поле $u_h = z_h$ и управление g_h взаимно однозначно связаны между собой уравнениями (4)–(7), поэтому задать z_h – это всё равно, что задать g_h .

При определении управления на функцию g_h никаких ограничений не налагалось. Но такие ограничения есть, и они связаны с расстановкой динамик. С одной стороны, можно поставить динамики в окне между линиями микрофонов. Расположим динамики в два ряда с шагом h на множестве точек $\mathbb{D} = \mathbb{D}_h = \{(x, y) | x = 0, h; y = 0, h, 2h, \dots, Jh\}$, $J = b/h$, т.е. на двойной линии рис.1. (Такой набор динамик не случаен – это типичный набор, необходимый для организации полноценного управления). С другой стороны, для того, чтобы воспроизвести функцию g_h , динамики нужны там, где g_h когда-нибудь отличается от нуля. Обозначим эти места через $\mathfrak{D}(g_h)$. По определению

$$\mathfrak{D}(g_h) = \{(x, y) = (ih, jh) | \exists k g_{h,ijk} \neq 0\}.$$

Для воспроизведения динамиками прибора функции g_h необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathfrak{D}(g_h) \subseteq \mathbb{D}. \quad (8)$$

Определение 2. Назовём цель управления z_h допустимой, если соответствующее ей управление g_h можно воспроизвести динамиками прибора, т.е. если выполняется соотношение (8).

Всякие звуковые поля могут служить целью, но только допустимые поля можно получать из внешнего поля, по-разному управляя динамиками прибора. Обратное, по допустимому целевому полю z_h можно вычислить соответствующее ему управление g_h :

$$g_{h,ijk} = \begin{cases} L_h z_h, & (ih, jh) \in \mathbb{D}, \\ 0, & (ih, jh) \notin \mathbb{D}. \end{cases} \quad (9)$$

Действительно, согласно (4) $f_h = L_h z_h$. А также $f_{h,ijk} = f_{h,ijk}^- + f_{h,ijk}^+ + g_{h,ijk} =$

$= g_{h,ijk}$ при $(ih, jh) \in \mathbb{D}$, так как на множестве динамиков $f_{h,ijk}^- = f_{h,ijk}^+ = 0$. Отсюда следует справедливость первой строки равенства (9). Вторая строка (9) справедлива в силу того, что функция z_h – допустимая, так что соответствующая ей функция g_h обращается вне динамиков в нуль.

Выясним, чего не хватает для построения алгоритма управления.

2.4. Анализ. Поднятие цели (на шаг по времени). Введём обозначения

$Z_{d,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{z_{h,ijk} \mid -d \leq ih \leq d, j - \text{любое}\}$ – часть k -го (текущего) слоя поля z_h , находящаяся между линиями приёмников – в полосе S_d ;

$Z_{d,[0,k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k' \leq k} Z_{d,k'}$ – таблица значений поля z_h в полосе S_d вплоть до k -го момента времени $t = t_k = k\tau$ включительно.

В общем случае целью управления является получение звукового поля с определенными желательными свойствами путем воздействия динамиками на внешнее звуковое поле. Само воздействие на поле от внешних источников заключается в добавлении к нему поля от динамиков. Выбор воздействия осуществляется на основе информации, накопленной к текущему моменту времени. И к этому моменту, чтобы вовремя просигнализировать, воздействие должно быть уже определено. Что касается накопленной информации, то она собирается микрофонами и на текущий момент состоит из значений суммарного звукового поля на линиях приёмников во все предыдущие времена и в настоящее время. Этих значений в совокупности с уже определённым в прошлом управлением достаточно, чтобы вычислить (решая внутри прибора краевую задачу вида (4)–(6) с известными данными на линиях приёма) суммарное звуковое поле, заключенное между линиями приёмников, вплоть до текущего момента времени, т.е. таблицу $Z_{d,[0,k]}$.

Мы уже отмечали, что к текущему моменту $t = t_k$ величина воздействия $g_{h,ijk}$ при $(ih, jh) \in \mathbb{D}$ уже определена по данным $Z_{d,[0,k]}$. Тогда из уравнений (9) можно найти поле $z_{h,ijk+1}$ при $(ih, jh) \in \mathbb{D}$ по тем же данным, т.е. имеется зависимость $z_{h,ijk+1} = z_{h,ijk+1}(Z_{d,[0,k]})$. Запишем её в виде системы уравнений:

$$P_{h,ijk}(z_{h,ijk+1}, Z_{d,[0,k]}) = 0, \quad (ih, jh) \in \mathbb{D}. \tag{10}$$

Более гибко зависимость $z_{h,ijk+1}$ от $Z_{d,[0,k]}$ можно выразить в параметрической форме:

$$\Phi_{h,ijk}(z_{h,ijk+1}, Z_{d,[0,k]}, A_{[0,k]}) = 0, \quad (ih, jh) \in \mathbb{D}, \quad (11)$$

$$\Psi_k(A_{k+1}, Z_{d,[0,k]}, A_{[0,k]}) = 0, \quad (12)$$

где A_k – какой-нибудь подходящий набор параметров, $A_{[0,k]} = \bigcup_{k' \leq k} A_{k'}$. От системы (11), (12) требуется однозначная разрешимость относительно неизвестных $\{z_{h,ijk+1} | (ih, jh) \in \mathbb{D}\}$ и A_{k+1} .

Уравнения вида (11), (12) назовём уравнениями **поднятия**, если искомые $\{z_{h,ijk+1} | (ih, jh) \in \mathbb{D}\}$ и A_{k+1} им удовлетворяют.

Подведём итог. Если наш прибор можно построить (что не всегда возможно), то существуют **уравнения поднятия**.

2.5. Алгоритм управления. Обратное, для рассматриваемой разностной модели распространения звука имеет место теорема 1.

***Теорема 1.** Предположим, что нам известны уравнения поднятия. Тогда существует алгоритм управления нашим прибором, следуя которому мы получим допустимое целевое поле во всём пространстве.*

Для доказательства теоремы приведём алгоритм управления с течением времени. Назовём его базовым.

Базовый алгоритм. Алгоритм представляет собой цикл по номеру k временного слоя $t = t_k = k\tau$.

Будем следить в полосе S_d за сеточными функциями $z_{h,ijk}$, т.е. перед переходом от k -го слоя к $(k+1)$ -му слою таблица $Z_{d,[0,k]}$ известна. А также известен набор параметров $A_{[1,k]}$.

Сначала при $k \leq 1$ таблица $Z_{d,[0,k]}$ обнуляется: $Z_{d,k}|_{k=0,1} = 0$ – согласно начальным условиям (6). А также задаются параметры $A_{[0,k]}|_{k=1}$ согласно своим первоначальным значениям. Переход от k -го слоя к $(k+1)$ -му слою при $k > 1$ состоит из четырёх шагов:

Шаг 1. Вычисление $z_{h,ijk+1}$ во всех внутренних точках полосы S_d , исключая точки, занятые динамиками, по уравнениям (5) и (4) с нулевой (т.к. внутри прибора $f_h^- = f_h^+ = 0$) правой частью.

Шаг 2. Вычисление $z_{h,ijk+1}$ во всех точках, занятых динамиками, а также параметров A_k по уравнениям поднятия.

Шаг 3. Вычисление управления $g_{h,ijk}$ по (9). Соответственно сигналим

динамиками в момент времени $t = t_k$, тем самым поддерживая внешний процесс распространения поля z_h вплоть до момента $t = t_{k+1}$.

Шаг 4. Измерение поля $z_{h,ijk+1}$ на линиях микрофонов в момент времени $t = t_{k+1} = (k + 1)\tau$.

Индукцией по k проверяется, что на k -м временном слое $t = t_k = k\tau$ наблюдается именно поле $\{z_{h,ijk}\}$, и его часть в полосе S_d правильно вычисляется базовым алгоритмом.

Шаг 2 приводит к вычислению правильного поля $z_{h,ijk+1}$ во всех точках, занятых динамиками, по предположению теоремы. Поэтому на шаге 3 по формуле (9) вычисляется управление $g_{h,ijk}$, соответствующее полю $\{z_{h,ijk}\}$. Остальные шаги приводят к вычислению правильного поля $z_{h,ijk+1}$ в силу уравнений (4)–(7). Что и требовалось доказать.

Базовый алгоритм дословно применим к управлению реальным физическим прибором, а не только к управлению его математической моделью (4)–(7). При этом всё, что нужно для вычисления управления, это уметь измерять звуковое поле на линиях микрофонов и уметь вычислять звуковое поле в области прибора S_d . Вне прибора поле вычислять не надо – его вычислит сама природа по известным только ей уравнениям. Базовый алгоритм с привлечением природы останется точным, потому что он точен для широкого класса разностных схем, как это показано в [1] (см. также [2]), в частности, для любой разностной схемы, как угодно близкой к “уравнениям природы”.

2.6. Примеры алгоритмов управления. Подход В.С. Рябенского

Опишем характерные алгоритмы защиты от шума.

Пример 1. Мечта о полной очистке. Индивидуальный алгоритм.

Идеально было бы полностью очистить комнату и улицу от посторонних звуков. Этому идеалу удовлетворяет задание следующего целевого поля:

$$z_h = \begin{cases} u_h^-, & i \leq 0, \\ u_h^+, & i \geq 1, \end{cases} \quad (13)$$

где u_h^- и u_h^+ – поля, порождённые источниками f_h^- и f_h^+ соответственно.

Поле z_h в (13) – допустимое, т.е. поле $u_h = z_h$ удовлетворяет уравнениям (4)–(6) со специальной правой частью вида (7) с условием $\mathfrak{D}(g_h) \subseteq \mathbb{D}$, что проверяется подстановкой $u_h = z_h$ в левую часть уравнений (4)–(6).

Трудность состоит в том, что для целевого поля (13) *не существует* универсального, т.е. независимого от обстановки, алгоритма вычисления управления. Обусловлено это тем, что в полосе $0 < x < d$ поле z_h полностью заполнено шумом – полем u_h^+ – и потому блокируются все волны поля u_h^- , выходящие через окно на улицу, в том числе та часть поля u_h^- , которая затем вернулась бы назад в комнату. Как следствие, эта часть поля u_h^- не может быть восстановлена лишь по приоконным данным.

Но если известно всё об окружающей среде: геометрия, уравнения звукового поля, краевые условия – то индивидуальный алгоритм существует.

Это базовый алгоритм с параметрами $A_k = A_k^- \cup A_k^+$, где $A_k^- = (u_{h,ijk}^-)_{i>0}$ и $A_k^+ = (u_{h,ijk}^+)_{i<1}$. Параметры A_k выбраны с таким расчётом, чтобы вместе с $Z_{d,k}$ они составляли при $t = t_k$ два поля: u_h^- в области $-d \leq ih \leq 1$ и u_h^+ в области $-1 \leq ih \leq d$, т.е. $Z_{d,k} \cup A_k = (u_{h,ijk+1}^-)_{i \geq -d/h} \cup (u_{h,ijk+1}^+)_{i \leq d/h}$.

Уравнения поднятия в данном случае – те уравнения разностной схемы (4)–(6) с $f_h = 0$, по которым вычисляются $(u_{h,ijk+1}^-)_{i > -d/h}$ и $(u_{h,ijk+1}^+)_{i < d/h}$.

Приведенный алгоритм имеет скорее теоретическую, чем практическую ценность, потому что он основан на полной информации об окружающей среде, получить которую кажется маловероятным. Возможно, полная информация избыточна, и тогда остаётся открытым вопрос о предварительном получении информации, достаточной для построения индивидуального алгоритма, путём физических экспериментов.

Впрочем, в стационарном случае, когда коэффициенты “уравнений природы” не зависят от времени, нужную информацию можно добыть посредством самого прибора защиты. Для этого на линиях микрофонов для каждого динамика надо заранее измерить отклики на исходящий от динамика единичный импульс. Результаты измерений оформим в виде таблицы (это фрагмент фундаментального решения). Зная эту таблицу и, несомненно, помня всю историю управления, можно по линейности вычислить при $t = t_{k+1}$ на линиях микрофонов $ih = \pm d$ поле u_h^g , излученное прибором защиты.

Тогда можно поддерживать знание полей u_h^- и u_h^+ в области прибора $-d \leq ih \leq d$. Докажем это индукцией по k .

Пусть при данном k поля u_h^- и u_h^+ при $-d \leq ih \leq d$ известны, и целевое поле z_h (13) достигнуто. Тогда вычисление полей u_h^- и u_h^+ строго внутри

прибора $-d < ih < d$ при $t = t_{k+1}$ и по ним вычисление управления при $t = t_k$ трудностей не вызывает.

Осталось найти поля u_h^- и u_h^+ на границе $ih = \pm d$ прибора при $t = t_{k+1}$. Из (13) и предположения индукции следует, что процедура измерения при $t = t_{k+1}$ даёт поле $z_h = u_h^-$ при $ih = -d$ и поле $z_h = u_h^+$ при $ih = d$. Но поле z_h является суммой трёх полей: $z_h = u_h^- + u_h^+ + u_h^g$. Отсюда на $(k+1)$ -м шаге получаем $u_h^+ = -u_h^g$ при $ih = -d$ и $u_h^- = -u_h^g$ при $ih = d$. Это завершает шаг индукции (и шаг алгоритма защиты).

В примерах 2 и 4 приведены алгоритмы, достигающие заданной цели независимо от окружения. Такие алгоритмы (и снабжённые ими приборы защиты) будем называть *универсальными*. Достаточно вставить *универсальный* прибор в любое окно, разделяющее любые два помещения, и он будет очищать от шума так, как заявлено.

Пример 2: ε -защита. В общем случае полная защита от шума не удаётся. А уменьшить его в ε^{-1} раз (ε – заданное малое число) возможно, если поискать ответ среди линейных комбинаций функций u_h^- и u_h^+ из примера 1. Такое, впервые найденное в [1], однопараметрическое семейство искомым комбинаций существует

$$z_h = \begin{cases} u_h^- + \varepsilon u_h^+, & i \leq 0, \\ \varepsilon^{-1} u_h^- + u_h^+, & i \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Подстановкой $u_h = z_h$ в (4)–(6) доказываем, что поле z_h в (14) – допустимое. Строки определения (14) – функции $z_h^- \stackrel{\text{def}}{=} u_h^- + \varepsilon u_h^+$ и $z_h^+ \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1} u_h^- + u_h^+$ – линейно зависимы: $z_h^+ = \varepsilon^{-1} z_h^-$. Это позволяет выразить z_h^- через z_h^+ :

$$z_h^- = z_h^-(z_h^+) = \begin{cases} z_h^+, & i \leq 0, \\ \varepsilon z_h^+, & i \geq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Функция z_h^- по линейности удовлетворяет уравнениям (4) с нулевой правой частью в полосе S_d (так как источники для её слагаемых расположены вне прибора). В частности, на множестве динамиком имеем уравнения

$$(L_h z_h^-(z_h^+))_{ijk} = 0, \quad (ih, jh) \in \mathbb{D}, \quad (16)$$

которые являются искомыми уравнениями поднятия с $A_k = \emptyset$.

Ввиду особого значения примера 2 отметим, что для непрерывного поля z (аналога поля z_h) следующие уравнения являются непрерывным аналогом равенства (15) и уравнений поднятия (16):

$$z(-0, y, t) = \varepsilon z(+0, y, t), \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} z(-0, y, t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} z(+0, y, t), \quad (18)$$

$$L((1 + (\varepsilon^{-1} - 1)\chi(x))^{-1} z(x, y, t)) \Big|_{x=0} = 0, \quad (19)$$

где $\chi(x)$ – функция Хевисайда, а в (17), (18) подразумевается взятие односторонних производных и односторонних предельных значений на поверхности $x = 0$.

Открытый В.С. Рябеньким метод примера 2 является универсальным методом уменьшения шума в комнате в произвольное, какое захотим, число раз. Наличие большого множителя ε^{-1} в (14) предъявляет повышенные требования к вопросам аппроксимации и устойчивости. Выяснить возможности устойчивой аппроксимации, которая нужна при создании физических приборов защиты, является основным назначением настоящей работы.

Пример 3. Обобщение примеров (1), (2). Уже в самой постановке задачи защиты от шума участвуют два поля: разговор в комнате и шум на улице. Естественно желание выразить целевое поле через них. Ввиду линейности рассматриваемых задач разумно ограничиться линейным случаем, т.е. рассмотреть следующее целевое поле:

$$z_h = \begin{cases} a_{11}u_h^- + a_{12}u_h^+, & i \leq 0, \\ a_{21}u_h^- + a_{22}u_h^+, & i \geq 1, \end{cases} \quad (20)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} – постоянные коэффициенты. Но можно доказать [10], что *универсальный* алгоритм достижения цели вида (20) существует лишь для целевого поля (14) (теорема В.С. Рябенького).

2.7. Примеры алгоритмов управления. Моделирование перегородки

Пример 4. Моделирование глухой стенки. Наряду с примерами 2, 3, имеются варианты шумоподавления, имитирующие какую-нибудь (какую захотим) глухую стенку, расположенную в окне. Рассмотрим простейший вариант моделирования пассивной защиты от шума, задавая в окне локальные условия прозрачности. В этом варианте динамики образуют множество $\mathbb{D} = \mathbb{D}_h$.

Пусть функции $u_h = z_h^-$ и $u_h = z_h^+$ – решения разностной краевой задачи (4)–(6) в замкнутых областях D^- и D^+ , заданных неравенствами $x = ih \leq 0$ и $x = ih \geq 0$, и правыми частями $f_h = f_h^-$ и $f_h = f_h^+$ соответственно. Подчеркнём, что в окне $x = ih = 0$ задаются локальные условия прозрачности (такие же, как в (5))

$$l_h u_h \Big|_{ih=-0} = 0 \quad \text{в } D^- \quad \text{для } u_h = z_h^-, \quad (21)$$

$$l_h u_h \Big|_{ih=+0} = 0 \quad \text{в } D^+ \quad \text{для } u_h = z_h^+. \quad (22)$$

Зададим поле

$$z_h = \begin{cases} z_h^-, & i \leq 0, \\ z_h^+, & i \geq 1. \end{cases} \quad (23)$$

Как обычно, проверяется, что поле z_h – допустимое. Введём в базовый алгоритм параметры $A_k = (z_{h,ijk}^+)_{i=0}$, которые вместе с $Z_{d,k}$ составляют в полосе S_d поля z_h^- и z_h^+ при $t = t_k$. Зная же поля z_h^- и z_h^+ при $t \leq t_k$, можно вычислить величины $(z_{h,ijk+1}^-)_{i=0}$, $A_{k+1} = (z_{h,ijk+1}^+)_{i=0}$ и $(z_{h,ijk+1}^+)_{i=1}$, решая соответствующие им уравнения (21), (22) и (4) с $f_h = 0$. Следовательно, по определению, они являются уравнениями поднятия.

3. Реальная модель защиты от шума

Мы начнём с описания строения реального прибора защиты, а затем перейдём к описанию его устройства управления.

3.1. Конструкция реального прибора защиты. На практике желательно обойтись небольшим числом динамиков и небольшим числом микрофонов. В наших экспериментах они предполагаются точечными. Все вместе они относятся к реальному прибору защиты.

Расположим динамики в два ряда с шагом H на множестве точек $\mathbb{D} = \mathbb{D}_H = \{(x, y) \mid x = 0, h; y = 0, H, 2H, \dots, J_b H\}$. Расстояние между двумя рядами динамиков положим равным h . Параметры h , H и b подобраны таким образом, чтобы $J_H = H/h$ и $J_b = b/H$ были целыми. По замыслу шаг h мал настолько, чтобы обеспечить близость решения разностной задачи к дифференциальной. Величина H отвечает техническим возможностям нашего прибора. Представляется, что для реального прибора $H \gg h$, хотя в теории допускается их равенство.

Из информационных соображений – сколько чисел на входе, столько чисел на выходе – расставим микрофоны на отрезках $x = \pm d$ с шагом H , так чтобы на каждый динамик приходился один микрофон.

В наших экспериментах равенство двух количеств: микрофонов и динамиков – оказалось оправданным. В общем случае их равенство необязательно, например, можно увеличить количество микрофонов и использовать «лишние» микрофоны для многих целей: увеличение надёжности, контроль устойчивости, анализ и построение оптимальных аппроксимаций входных полей и т.д.

Динамики, расположенные с шагом H , назовем реальными, а динамики с шагом h – идеальными. Соответственно, можно говорить о реальном поле и идеальном поле, о реальном управлении и идеальном управлении, о реальных микрофонах и идеальных микрофонах.

Модель распространения звука оставим прежней, на мелкой сетке. Будем считать, что в процессе работы реального прибора защиты реальные микрофоны измеряют наблюдаемое физическое реальное поле z_H , которое, в свою очередь, возбуждается всеми источниками: f_h^- , f_h^+ и g_H – комнатными, уличными, и также реальным управлением g_H . Тогда в рамках реальной модели распространения звука поле z_H удовлетворяет уравнениям (4)–(6) с правой частью $f_h = f_h^- + f_h^+ + g_H$.

Ранее мы рассматривали исключительно идеальный случай. Реальный случай управления получим как результат аппроксимации идеального. Точнее, руководящая идея состоит в том, чтобы техническими средствами реального прибора симитировать действия идеального.

3.2. Реальная модель как аппроксимация идеальной модели. Схема подавления шума с идеальным управлением даёт тождественно точный результат. Поэтому при аппроксимации будем исходить именно из неё, т.е. в области прибора будем всё время поддерживать приближение к идеальному полю. При этом реальное управление определяется по идеальному управлению. Что касается аппроксимации идеального поля z_h , то она основана на формуле перехода от реального поля к идеальному (25).

3.2.1. Построение реального управления. Для того чтобы построить реальное управление, зная идеальное управление, представим себе, что каждый реальный динамик слеплен из ближайших к нему идеальных динамиков. Исходя из этого представления, определим управление g_H реальным динамиком в точке $(x, y') = (ih, j'h) \in \mathbb{D}_H$ как сумму амплитуд ближайших к нему идеальных динамиков:

$$g_{H_{ij'k}} = \sum_j c_{j'j} g_{h_{ijk}}, \quad |j'h - jh| \leq H/2, \quad (24)$$

где $c_{jj} = 1$, если $|j'h - jh| < H/2$ и $c_{jj} = 1/2$, если $|j'h - jh| = H/2$. Естественно, в точках, где нет реальных динамиков, управление g_H равно нулю.

3.2.2. Вычисление идеального поля z_h на каждом временном слое начинается с того, что реальные микрофоны измеряют реальное поле z_H .

Далее требуется интерполяция измеренных величин на линии микрофонов. Непосредственная интерполяция нехороша из-за близости особенностей звукового поля, создаваемого динамиками. Выделим эти особенности. Для этого выразим поле z_h через реальное поле z_H и поля w_H и w_h , порождённые источниками g_H и g_h соответственно. Имеем формулу перехода от реального поля к идеальному в области D^\pm :

$$z_h = z_H - w_H + w_h, \tag{25}$$

являющуюся следствием равенства возбуждающих их источников:

$$f_h^- + f_h^+ + g_h = (f_h^- + f_h^+ + g_H) - g_H + g_h.$$

Способ определения z_h при $x = \pm d$ подсказывается правой частью тождества (25). После измерения реального поля z_H он состоит из выделения особенностей, интерполяции и пересчёта реального поля на идеальное. Остановимся на этом подробнее.

Поля w_H и w_h неизвестны, но в окрестности окна их можно заменить с достаточной точностью на вычисляемые поля \tilde{w}_H и \tilde{w}_h , являющиеся решениями краевой задачи (4)–(6) в какой-нибудь вспомогательной ограниченной окрестности окна, например в прямоугольнике $\tilde{D}: |x| \leq x_{\tilde{D}}$ ($x_{\tilde{D}}$ – параметр-ограничитель), и правыми частями g_H и g_h соответственно. В результате замены получим

$$z_h \approx \tilde{z}_h = z_H - \tilde{w}_H + \tilde{w}_h. \tag{26}$$

Ошибка приближения (26) имеет, во-первых, первый порядок малости по переменной $H - h$, потому что приближённое равенство (26) превращается в точное при $H = h$. Во-вторых, в приближении (26) учитываются все особенности, находящиеся вблизи окна, вследствие того, что вблизи окна поля в (26) удовлетворяют уравнениям исходной краевой задачи, а также того, что вблизи окна учитываются все источники звука (в наших экспериментах они были нулевыми). Подчеркнём, что на свободной границе области \tilde{D} , то есть на вертикалях $|x| = x_{\tilde{D}}$, поля \tilde{w}_H и \tilde{w}_h удовлетворяют краевому условию (5) – локальному условию прозрачности. Их влияние на результат см. в табл. 3, 4.

По существу, в наших экспериментах предполагается, что и коэффициенты уравнения звукового поля, и их правые части в окрестности окна \tilde{D} известны. Отметим, что без знания особенностей или хотя бы характера их поведения вблизи окна трудно рассчитывать на эффективность или даже работоспособность нашего прибора, например, когда через окно пролетает пчелиный рой, нарушая показания микрофонов случайным образом.

Насколько точно нужно знать уравнения звукового поля в \tilde{D} и насколько малой должна быть область \tilde{D} для качественной работы нашего прибора – вопрос открытый. Решать его лучше в условиях, более приближенных к физической реальности, то есть в трёхмерном случае, в котором имеется больше возможностей для рассеяния и затухания звуковых волн, в том числе из-за наличия лакун.

Отметим, что знать уравнения звукового поля вблизи окна необязательно. Достаточно уметь определять на линиях микрофонов звуковые поля, возбуждаемые динамиками как реальными, так и идеальными. Для этого нужно замерить фундаментальное решение и использовать его для перехода от реального поля к идеальному подобно тому, как это было сделано в примере 1 (см. также [10]).

В отличие от поля z_H , поле $z_H - \tilde{w}_H$ не имеет особенностей вблизи окна, поэтому на границе полосы приёма будем его интерполировать по y с крупной сетки на мелкую. К результату интерполяции достаточно прибавить \tilde{w}_h , чтобы из (26) получить на границе приёма искомую аппроксимацию поля z_h :

$$z_h|_{x=\pm d} \approx \tilde{z}_h|_{x=\pm d} = \mathcal{I}(z_H - \tilde{w}_H)|_{x=\pm d} + \tilde{w}_h|_{x=\pm d}, \quad (27)$$

где \mathcal{I} – оператор интерполяции.

3.2.3. Алгоритм построения реального управления получим из базового алгоритма, переходя от реального поля z_H к идеальному полю z_h по формуле (27). При этом **реальный алгоритм** получается из базового алгоритма путём его модификации на шагах 3 и 4 с добавлением воображаемых звуковых полей $\tilde{w}_h = \tilde{w}_{h_{ijk}}$ и $\tilde{w}_H = \tilde{w}_{H_{ijk}}$ в области $\tilde{D}: |x| \leq x_{\tilde{D}}$.

Шаг 3 состоит теперь из вычисления идеального управления $g_{h,ijk}$ по (9) и по нему реального управления g_H согласно (24), и затем пересчёта полей \tilde{w}_h и \tilde{w}_H на $(k+1)$ -й слой. Источником сигнала в момент времени $t = t_k$ являются реальные динамики.

Шаг 4 состоит из измерения поля $z_{H,ijk+1}$ реальными микрофонами в момент времени $t = t_{k+1} = (k + 1)\tau$ и последующего пересчёта измеренных величин на все точки линий приёма по формуле (27).

Отметим, что вычислительные затраты реального алгоритма относительно невелики [10].

4. Численный эксперимент

В ходе экспериментов рассмотрим вопросы сходимости и устойчивости и продемонстрируем возможности прибора по задержке звуковых частот.

4.1. Описание эксперимента (см. рис.1): обозначения, значения по умолчанию, комментарии. Эксперимент проводился для целевых полей примеров 2 и 4.

Пусть $\mathcal{D} = \{(x, y) : x \leq -0.75\}$ – область наблюдения, где сравниваются разговор и шум, выбранная вдали от источников звука;

$\|u_h\|_{\mathcal{D}} = \max_{(ih, jh) \in \mathcal{D}} |u_{h_{ijk}}|$ при фиксированном $t = k\tau$ – равномерная норма в \mathcal{D} ;

$E(t) = \|z_H - z_h^-\|_{\mathcal{D}} / \|z_h^-\|_{\mathcal{D}}$ – относительное отклонение наблюдаемого реального поля z_H от теоретически желательного (искомого) идеального поля z_h^- в области наблюдения \mathcal{D} ;

$b = 1/32$ – ширина окна; Ω – относительная частота – количество колебаний, приходящееся на ширину окна; $\Lambda = b/\Omega$ – длина волны;

$s_{\Omega}(t)$ – функция источника. В экспериментах будут использоваться источники звука, которые плавно переходят из состояния покоя в состояние гармонических колебаний $s_{\Omega}(t) = \text{const} \cdot \sin \pi((2\Omega/b)t - 1)$ с частотой Ω/b .

Переход реализован на отрезке $b/(2\Omega) \leq t \leq 3b/(4\Omega)$ (соответственно $0 \leq \xi \leq 1/2$) функцией $s_{\Omega}(t) = 4\xi^2[3 - 4\xi + (60/\pi - 15)(2\xi - 1)^2]$, где $\xi = (2\Omega/b)t - 1$.

Разговор в комнате возбуждается в точке $(x, y) = (-0.5, 0)$ источником $s_{\Omega}(t)$. Шум на улице создаётся в точке $(x, y) = (0.5, 0)$ источником $9.7s_{\Omega'}(t)$, где $\Omega' = \Omega/1.03$.

Амплитуды источников подобраны таким образом, чтобы в зоне наблюдения шум был сопоставим с полезным звуком.

$d = 1/128$ – расстояние от окна до линии микрофонов;

N – количество пар динамиков, N – количество микрофонов с каждой стороны окна, а также N – количество узлов интерполяции;

$H = b/(N-1)$ – шаг расстановки динамиков (и микрофонов), а также шаг

крупной сетки. Используется только на линиях микрофонов и динамиков;

$h = b/24$ – шаг мелкой сетки. Он выбран так, чтобы на каждую волну приходилось не менее 10 точек;

$\tau = h/1.5$ – шаг по времени. При $\tau \leq h/\sqrt{2}$ разностная схема (4) устойчива;

$x_{\tilde{D}} = 1/2$ – граница прямоугольника $\tilde{D}: |x| \leq x_{\tilde{D}}$, предназначенного для выделения особенностей, создаваемых динамиками. При вычислении полей \tilde{w}_H и \tilde{w}_h увеличение $x_{\tilde{D}}$ приводит к уменьшению доли отраженных от границы \tilde{D} волн, являющихся чисто паразитными;

$\varepsilon = 1/8$ – коэффициент шумоподавления. Существенно используется в варианте с линейной комбинацией (пример 2) и отсутствует в варианте с имитацией глухой стенки (пример 4);

\mathcal{I} – оператор интерполяции. Проверялись два способа интерполяции – кубическими сплайнами и интерполяционным многочленом. Применение последнего отмечено в табл.3,4 буквой *i* вслед за указанием количества N узлов интерполяции. Оба варианта интерполяции приводят к сопоставимым по точности результатам. Оба варианта имеют свои недостатки: кубические сплайны недостаточно гладкие, а применение интерполяционного многочлена большого порядка приводит к излишнему высокочастотному треску.

4.2. Результаты экспериментов и их обсуждение

В табл.1 дано отношение $\|u_h^+\|_{\mathcal{D}} / \|u_h^-\|_{\mathcal{D}}$ амплитуд уличного шума к разговору в области наблюдения \mathcal{D} при $t=10$ и $t=100$. Из неё видно, что в зоне наблюдения шум сопоставим с разговором, особенно при $t=100$, к чему мы стремились, подбирая амплитуды источников.

Таблица 1. Отношение шума к разговору в \mathcal{D} .

$t \backslash \Omega$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
10	0.3	0.2	0.2	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7
100	3.3	1.7	1.1	0.9	0.9	0.9	1.1	1.3

Табл.2 показывает, что при уменьшении частоты Ω точность очистки от шума стремительно улучшается.

Таблица 2. $E(t)$ в % в зависимости от Ω при $x_{\tilde{D}}=1/2$, $N=2$.

$\varepsilon \backslash t \backslash \Omega$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	
–	10	.12	.10	.64	3.0	9.7	22	42	66
–	100	.001	.005	.60	3.1	9.7	22	40	66
1/8	10	.10	.099	.56	2.6	8.4	19	35	54
1/8	100	.002	.045	.51	2.5	8.1	19	33	53

Таблица 3. $E(t)$ в % в зависимости от N при $x_{\tilde{D}}=1/2, \Omega=2.4$.

ε	$t \backslash N$	2	3	4	5	7	9	9	9i
-	10	66	8.4	3.3	1.9	.89	.69	$x_{\tilde{D}}=2/3$	$x_{\tilde{D}}=2/3$
-	100	66	8.6	3.3	1.8	.81	.38		
1/8	10	54	7.6	3.4	2.1	1.4	3.6	.93	1.9
1/8	100	53	14.	19.	24.	28.	3E11	.31	.31

Табл.3 показывает, что при увеличении количества динамиков глубина очистки от шума значительно улучшается, если не считать результаты, представленные в последней строке таблицы. В ней anomальное поведение $E(100)$ в зависимости от N связано с переизбытком паразитных отраженных от границы \tilde{D} волн полей \tilde{w}_H и \tilde{w}_h . Если их уменьшить, увеличивая $x_{\tilde{D}}$ с $1/2$ до $2/3$, то anomальное поведение не наблюдается (см. 2 последних столбца табл.3, а также пять последних столбцов табл.4). В трёхмерном случае от отражённых волн можно избавиться, например, благодаря наличию лакун [3].

Таблица 4. $E(t)$ в % в зависимости от различных параметров.

По умолчанию $\varepsilon=1/8, x_{\tilde{D}}=2/3, \Omega=2.4$.

	$x_{\tilde{D}}=1/2$	$x_{\tilde{D}}=1/2$	$x_{\tilde{D}}=1$	$h=h$	$h=2h$	$h=h/2$	$D=1/16$
$t \backslash N$	4	4i	4i	4i	4i	4i	4i
10	3.4	2.8	2.9	2.9	2.3	2.7	2.3
100	19.	21.	2.2	2.2	2.2	1.9	2.2

Табл.4 демонстрирует слабую зависимость $E(t)$ от параметров h, d и $x_{\tilde{D}}$ (лишь бы при изменении $x_{\tilde{D}}$ паразитные отраженные волны были достаточно малы). Слабая зависимость $E(t)$ от параметра d важна, потому что по техническим соображениям d должно быть невелико. Слабая зависимость $E(t)$ от h позволяет ограничиться экспериментами с шагом $h = b / 24$, заданным по умолчанию.

4.3. Обсуждение свойств аппроксимации

Обратим внимание на то, что в рассмотренных примерах расстояние H между динамиками и длины Λ задерживаемых ими волн близки по величине. При этом погашение шума весьма значительно. Например, согласно табл.2 при $\Omega = 1.4$ волна с длиной $\Lambda = H / 1.4$ уменьшается более чем в 100 раз. Нельзя пройти мимо того, что во многих важных для практики 3-D случаях сетка динамиков с шагом H может задерживать волны меньшей длины, например, длины $\Lambda = H / 5$. Это возможно, если волновое поле имеет фронт

и, следовательно, имеются две быстрые переменные – по времени и по нормали к фронту, и две медленные переменные – вдоль фронта. А качественная интерполяция по медленным переменным возможна на крупной сетке. На этом мы ограничимся, так как оптимизация, связанная с наличием быстрых и медленных переменных, заслуживает отдельного исследования.

Близость ошибок $E(t)$ при $t=10$ и $t=100$ свидетельствует об асимптотической устойчивости процесса защиты. В основном это связано с явлением рассеивания звуковых волн.

Был соблазн воспользоваться тем, что, по идее, z_h – гладкая функция на линиях $x = \pm d$ и поэтому можно интерполировать именно её, т.е. вместо (27) воспользоваться формулой $z_h|_{x=\pm d} \approx \mathcal{I}(z_H - \tilde{w}_H + \tilde{w}_h)_{x=\pm d}$. Выигрыш состоял бы в том, что тогда надо считать одно поле, а именно, разность $\tilde{w}_h - \tilde{w}_H$ вместо каждого поля этой разности. Но такой вариант расчёта неустойчив. Например, он приводит к тому, что $E(10) = 7E + 79$ при $\varepsilon=1/8$, $x_{\tilde{D}}=1$, $\Omega=1.0$, $N=4i$. Наше объяснение неустойчивости заключается в том, что по последней формуле организуется обратная связь между значениями интерполируемой функции z_h в близких по пространству и времени точках. Это приводит к явлению самовозбуждения. Наоборот, в формуле (27) близкая обратная связь отсутствует, потому что интерполируется внешнее поле, немного гладко возмущённое.

4.4. Два динамика

Таблица 5. $E(t)$ в % при $\Omega=1.4$, $x_{\tilde{D}}=1/2$, $N=1$.

ε	$t \setminus N$	1
-	10	1.1
-	100	2.5
1/8	10	1.0
1/8	100	3.4

Табл.5 показывает, что уже одной парой динамиком достигается очистка от довольно высокочастотного шума.

5. Обобщения

В теории, по существу, используется лишь линейность и конечность скорости распространения сигнала, в том числе разностного, а также то, что уравнения полей имеют вид явных многослойных разностных схем. Поэтому рассмотренная методика распространяется на линейные волновые процессы в сложных средах. При этом нужно внести небольшие изменения. Перечислим наиболее значимые из них.

«Комната» может быть любой областью. В частности, «комната» может состоять из попарно несвязных клеток. Любопытно, что тогда ε -защита (пример 2) позволит вести переговоры между клетками, практически не замечая шума вне клеток.

Динамики должны выбираться так, чтобы они разделяли «комнату» и «улицу». Иначе говоря, шаблон, приложенный в любом месте, не может одновременно пересекать и «комнату», и «улицу» в свободных от динамиков точках. При этом выборе динамиков остаются верными доказательства допустимости рассмотренных целевых полей.

Наконец, формула (26) пересчёта реального поля на идеальное и рекомендации по её применению имеют общий характер.

Идея построения реального управления состоит в сведении реальной задачи к идеальной (математически точной) модели. Для этого достаточно получить идеальные измерения из реальных путём интерполяции, разумеется, с учётом особенностей. Причём особенности вычисляются в той же модели, которая выбрана в качестве идеальной. Численные эксперименты показывают, что при этом можно добиться устойчивого эффективного управления.

При описании метода В.С. Рябенского (примеры 1-3) выяснилось, что предложенное изложение применимо для других (см., например, [7-9]) известных методик активного подавления шума, основанных на моделировании пассивной защиты (пример 4).

Предварительный вариант данной статьи изложен в [10].

Благодарности

Особую благодарность автор выражает В.С. Рябенскому, внесшему чрезвычайно большой вклад в данную работу. Математическая модель, впервые предложенная в [1], первоначальная рукопись по численному эксперименту, написанный им первый вариант введения, многократная деловая критика и предложения по улучшению статьи составляют неполный перечень его творческого участия в данной работе.

Автор благодарит Е.Б. Савенкова за ценные замечания и Е.С. Турчанинову за помощь в написании данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.С. Рябенский. Метод разностных потенциалов и его приложения. – М.: Физматлит, 3-е изд., 2010, 431 с.;
V.S. Ryaben'kii. Method raznostnyh potentsialov i ego prilozheniya. – М.: Fizmatlit, 3-e izd., 2010, 431 s.

2. В.С. Рябенский. Математическая модель устройств подавления внешнего шума в подобласти пространства // Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 8, с.3–31; англ. пер.: *V.S. Ryaben'kii. Mathematical model of devices used to suppress external noise in a subregion of space // Math. Models & Comp. Simul.*, 2013, v.5, No 2, p.103–121.
3. В.С. Рябенский, В.И. Турчанинов, С.В. Цынков. Использование лакун решений 3D–волнового уравнения для вычисления решения задачи Коши на больших временах // Математическое моделирование, 1999, т. 11, № 12, с.113–126; *V.S. Ryaben'kii, V.I. Turchaninov, S.V. Tsynkov. Ispol'zovanie lakun reshenij 3D–volnovogo uravneniya dlya vychisleniya resheniya zadachi Koshi na bol'shih vremenah // Matematicheskoe modelirovanie*, 1999, t.11, № 12, s.113–126.
4. Б.Д. Плющенко, В.И. Турчанинов. Пошаговая свёртка // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2009, № 24, 24 с.; *B.D. Plyushchenkov, V.I. Turchaninov. Poshagovaya svyortka // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2009, № 24, 24 s.
5. В.И. Турчанинов. Рекуррентное вычисление свёртки с заданным ядром и экспоненциальная аппроксимация // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2009, № 79, 18 с. *V.I. Turchaninov. Rekurrentnoe vychislenie svyortki s zadannym yadrom i eksponencial'naya approksimatsiya // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2009, № 79, 18 s.
6. В.С. Рябенский. Активная защита акустического поля желательных источников от внешнего шума в реальном времени // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2016, №27, 15с.; англ. пер.: *V.S. Ryaben'kii. Active protection of acoustic field of wanted sources from external noise in real time // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2016, No 27, 14 s.
7. М.В. Федорюк. Об активном гашении колебаний упругих сред // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 4, с.1065–1068; англ. пер.: *M.V. Fedoryuk. The active damping of the oscillations of elastic media // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1976, v. 16, No 4, p. 250-254.
8. А.Я. Зверев. Технологии снижения шума в салоне самолета // Сб. трудов 1-й Всероссийской акустической конференции, Москва, 2014; *A.YA. Zverev. Tekhnologii snizheniya shuma v salone samoleta // Sbornik trudov 1-j Vserossijskoj akusticheskoy konferentsii*, Moskva, 2014.
9. П.И. Коротин, О.А. Потанов, А.М. Соков, Г.Е. Фикс, И.Ш. Фикс, А.В. Циберев. Экспериментальные исследования активного гашения звукового поля на дискретных частотах. Сб. трудов 1-й Всероссийской акустической конференции, Москва, 2014; *P.I. Korotin, O.A. Potapov, A.M. Sokov, G.E. Fiks, I.SH. Fiks, A.V. Tsiberev. Eksperimental'nye issledovaniya aktivnogo gasheniya zvukovogo polya na diskretnyh chastotah // Sbornik trudov 1-j Vserossijskoj akusticheskoy konferentsii*, Moskva, 2014.
10. В.И. Турчанинов. Основные моменты задачи активной защиты от шума // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2017, № 29, 32 с.; *V.I. Turchaninov. Osnovnyye momenty zadachi aktivnoj zashchity ot shuma // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2017, № 29, 32 s.

Поступила в редакцию 22.11.18

После доработки 22.11.18

Принята к публикации 11.02.19