

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ ЗАДАЧИ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ С КОРНЯМИ НЕЦЕЛОЙ КРАТНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2019 г. *А.А. Быков, К.Е. Ермакова*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
abkov@yandex.ru, kristinaermakova1908@gmail.com

DOI: 10.1134/S0234087919090065

Дано описание контрастных структур, возникающих при моделировании процессов реакции–диффузии в неоднородной среде со степенной зависимостью плотности источников от концентрации в окрестности корней. Полученные ранее нами результаты для однородной среды обобщены на случай неоднородной среды, строго обоснованы достаточные условия существования решения типа контрастной структуры. Показатель степени корня функции правой части, в отличие от ранее известных результатов, предполагается нецелочисленным, в том числе иррациональным. Показано, что передний (относительно направления перемещения) участок фронта представляется экспоненциальной функцией, задний участок фронта представляется степенной функцией, и это принципиально новый, ранее неизвестный результат. Найдено семейство точных решений эволюционного уравнения. Построена формальная асимптотика решения начально–краевой задачи для уравнения реакции–диффузии. Дано обоснование корректности частичной суммы асимптотического ряда с использованием метода дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотические методы, контрастная структура, дифференциальные неравенства.

NONSTATIONARY CONTRAST STRUCTURES OF THE PROBLEM OF REACTION-DIFFUSION WITH ROOTS OF INTEGRAL SHEET IN A INHOMOGENEOUS MEDIUM

A.A. Bykov, K.E. Ermakova

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Mathematics

A description is given of contrasting structures arising from the simulation of reaction – diffusion processes in an inhomogeneous medium with a power dependence of the source density on the concentration in the vicinity of the roots. The results obtained earlier for a homogeneous medium are generalized to the case of an inhomogeneous medium, and sufficient conditions for the existence of a solution of the type of contrast structure are

strictly substantiated. The exponent of the root function of the right-hand side, in contrast to previously known results, is assumed to be non-integer, including irrational. It is shown that the front (relative to the direction of movement) part of the front is an exponential function, the rear part of the front is a power function, and this is a fundamentally new, previously unknown result. The family of exact solutions of the evolution equation is found. The formal asymptotics of the solution of the initial-boundary value problem for the reaction-diffusion equation is constructed. The substantiation of the correctness of the partial sum of an asymptotic series using the method of differential inequalities is given.

Key words: nonlinear differential equations, asymptotic methods, contrast structure, differential inequalities.

1. Введение

Эта статья развивает и обобщает результаты работы [1], в которой сформулированы и строго обоснованы методом дифференциальных неравенств достаточные условия существования решения типа контрастной структуры в однородной среде с нецелым показателем правой части.

Контрастными структурами (КС) называют решения квазилинейного уравнения реакции–диффузии (РД), для которых характерно наличие больших областей с малым градиентом, где решение близко к одному из корней плотности источников. Эти области разделяются узкими внутренними переходными слоями (ВПС) с большим градиентом решения [2, 3]. Контрастные структуры образуются в рамках моделей, основанных на уравнении РД с нелинейной зависимостью правой части, описывающей плотность источников, от неизвестной функции, при наличии нескольких корней правой части. В частности, КС возникают в задачах о распространении тепла в среде с источниками, плотность которых зависит от температуры, в том числе в реакциях горения и взрыва [4]. Одна из актуальных задач теории КС в настоящее время – исследование КС с вырожденными корнями функции плотности источников [5]. В этой и в последующих работах коллектива авторов под руководством В.Ф. Бутузова [6] показано, что наличие в уравнении РД малого параметра при старшей пространственной производной приводит к более сложной структуре ВПС, в котором появляются несколько зон с качественно различным поведением решения [7,8]. Для случая корня кратности 2 получены практически исчерпывающие результаты для задачи о пограничном слое [9]. Значительные результаты получены также для трехкратно вырожденного корня [10, 11] и для уравнений эллиптического типа [12]. Для уравнения РД с вырожденными корнями установлено наличие области притяжения решения типа КС, также как для задач с простыми (некратными) корнями [13].

В данной работе мы распространим результаты теории КС на случай корня с необязательно целочисленной кратностью, в частности, для дробных и даже иррациональных кратностей в неоднородной среде. Подход к эволюционной задаче основан на изучении стационарного решения параболического уравнения, и в этом случае метод дифференциальных неравенств [14] позволяет обосновать устойчивость решения [6].

Одна из проблем, возникающих при исследовании перемещающихся КС, состоит в том, что найти скорость дрейфа КС и одновременно профиль дрейфующего ВПС удастся только для специальных классов функции плотности источников, например, для симметрической кубической функции плотности, порождающей простые (однократные) корни. Вообще говоря, задача с функцией плотности, не обладающей сильными свойствами симметрии, приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, аналитическое решение которых получить не удастся. Мы поэтому сформулируем достаточно широкий класс функций плотности источников, порождающих корни с заданной (не обязательно целочисленной) степенью вырождения корней. Мы найдем три наиболее важные с практической точки зрения характеристики ВПС: профиль $u(x, t) = v(x - Wt)$, где $W = W_d + W_g$, скорость дрейфа дисбаланса $W_d(x^*)$, скорость градиентного дрейфа $W_g(x^*)$. Для функций этого класса величина $W_d(x^*)$ скорости дрейфа ВПС, обусловленной дисбалансом $B(x^*) \neq 0$ функции плотности источников, $B(x^*) = \int_{\check{\phi}(x^*)}^{\hat{\phi}(x^*)} f(u, x^*) du$, где $\check{\phi}(x)$ и $\hat{\phi}(x)$ – наименьший и наибольший корни функции $f(u, x)$ при заданном x , рассчитывается аналитически в виде явного выражения. Затем найдем скорость градиентного дрейфа ВПС, обусловленную явной зависимостью f от x . Методика решения задачи здесь существенно отличается от таковой для однородной среды, где градиентный дрейф в принципе отсутствует. Для этого мы построим несколько начальных членов асимптотического ряда для решения эволюционного уравнения. Скорость градиентного дрейфа будет найдена из условия существования решения уравнения, описывающего очередной член асимптотического ряда.

2. Функция плотности источников

Мы рассматриваем математическую модель, основанную на уравнении реакции–адвекции–диффузии [14]

$$u_t + Vu_x = \kappa u_{xx} - f(u, x), \quad x \in (a, b), \quad t > 0, \quad (1)$$

с граничными условиями $u_x(a,t) = \psi_1(t)$, $u_x(b,t) = \psi_2(t)$ и с начальным условием $u(x,0) = \psi_0(x)$. Здесь величина $u(x,t)$ определяет температуру среды (для моделей с выделением тепла) или концентрацию активного вещества (для реакции без выделения тепла). Перемещение вещества в данной работе не учитываем, рассматриваем только диффузионный перенос.

Мы определим точки равновесия $\phi_j(x)$ как значения $u(x)$, для которых $f(\phi_j(x), x) = 0$. В этой работе мы предполагаем, что плотность источников $f(u, x)$ в окрестности корней этой функции пропорциональна некоторой степени концентрации:

$$f(u, x) = f_0(u, x) \Pi_j (u - \phi_j(x))^{*\theta j}, \quad (2)$$

где гладкая функция $f_0(u, x)$ описывает плотность источников вне некоторых окрестностей упомянутых точек, $f_0(u, x) > 0$, значение $\phi_j(x)$ есть одно из пороговых значений инициализации реакции в точке x , функция

$$u^{*\theta} = \begin{cases} u^\theta & \text{при } u \geq 0, \\ -(-u)^\theta & \text{при } u < 0 \end{cases} \quad (3)$$

описывает плотность источников в окрестности корня этой функции. Мы рассматриваем, в отличие от предыдущих публикаций, упомянутых во введении, случай произвольного показателя $\theta > 1$, в том числе и нецелочисленного.

Для обоснования формальной асимптотики, которую построим далее, потребуем выполнения следующих условий на функцию f :

У1. $f(u, x)$ - гладкая функция в Π , где $\Pi = (-\infty, +\infty) \times [a, b]$.

У2. Уравнение $f(u, x) = 0$ имеет при любом $x \in [a, b]$ ровно три корня $\phi_{1;2;3}(x)$, причем $\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x)$, выполнены достаточные условия дифференцируемости неявных функций $\phi_{1;2;3}(x)$, определяемых уравнением $f(\phi_{1;2;3}, x) = 0$.

У3. Линии $u = \phi_{1;2;3}(x)$ являются точками перемены знака: $f(u, x) > 0$ при $\phi_1(x) < u < \phi_2(x)$ и при $u > \phi_3(x)$, $f(u, x) < 0$ при $\phi_2(x) < u < \phi_3(x)$ и при $u < \phi_1(x)$.

У4. В некоторой проколотой δ - окрестности $(\phi_j(x) - \delta, 0) \cup (0, \phi_j(x) + \delta)$ каждого из равновесных значений $\phi_j(x)$, $j \in \{1; 3\}$, и для любого $x \in [a, b]$ верны условия

$$(1 - \zeta_j(u)) < \frac{f(u, x)}{C_j(u - \phi_j(x))^{\theta_j}} < (1 + \zeta_j(u)), \quad (4)$$

$$(1 - \zeta_j(u)) < \frac{f_u(u, x)}{\theta_j C_j(u - \phi_j(x))^{\theta_j - 1}} < (1 + \zeta_j(u)), \quad (5)$$

где $\zeta_{1,3}(u) = o(1)$ при $u - \phi_j \rightarrow 0$, $\zeta_{1,3} > 0$, $C_{1,3} > 0$, $\theta_{1,3} > 1$.

Мы рассматриваем также более простой случай наличия двух особых значений температуры, каждая из которых характеризуется своими значениями показателя $\theta_1 > 1$ и $\theta_3 > 1$:

$$f(u, x) = f_0(u, x)(u - \phi_1(x))^{\theta_1}(u - \phi_2(x))(u - \phi_3(x))^{\theta_3}, \quad (6)$$

причем $f_0(u, x) > 0$, функция u^{θ} определена равенством (3).

Построим нижнее и верхнее решения уравнения (1) и предположим, что начальная функция $\phi_0(x)$ заключена между ними, тем самым обеспечив возможность существования решения типа перемещающейся контрастной структуры (КС) [15].

В соответствии с методикой, разработанной А.Н. Тихоновым [16], мы рассматриваем вместо (1) сингулярно возмущенную краевую задачу с малым параметром:

$$\begin{cases} \varepsilon u_t + V \varepsilon u_x = \kappa \varepsilon^2 u_{xx} - f(u, x), & x \in (a, b), t > 0, \\ u_x(a, t) = 0, & u_x(b, t) = 0, & u(x, 0) = \phi_0(x), \end{cases} \quad (7)$$

$u \in C_2(D) \cap C(\bar{D})$, $d\phi_0/dx|_{x=a,b} = 0$. При $\varepsilon = 0$ уравнение (7) становится алгебраическим уравнением $f(u, x) = 0$, и его решение можно найти в явном виде: $u(x, t) = \phi_j(x)$ при $x \in (x_{j-1}^*(t), x_j^*(t))$, $x_j^*(t)$ перемещающиеся точки разрыва, значение $u(x_j^*(t))$ несущественно. Из этих изолированных ветвей решения вырожденного уравнения с помощью функций переходного слоя сошьем гладкую функцию, обеспечивающую сопряжение разных равновесных уровней в окрестности фронта КС. Скорость перемещения фронта КС будет также найдена.

3. Сопутствующая задача с корнями дробного порядка в однородной среде

3.1. Краевая задача уравнения РД в однородной среде. Для построения частичной суммы асимптотического ряда решения уравнения (7) в однородной среде мы используем решение этого уравнения в однородной

среде, которое мы здесь построим. В (7) выполним замену $x = \varepsilon\xi$, получим уравнение

$$u_t + Vu_\xi = \kappa u_{\xi\xi} - f(u, \varepsilon\xi). \quad (8)$$

Пусть $x^*(t)$ есть текущее положение фронта, определяемое условием $u(x^*(t), t) = \phi_2(x^*(t))$ так, что $f(\phi_2(x^*(t)), x^*(t)) = 0$. Пусть t' есть некоторый фиксированный момент времени, и $\xi = \varepsilon^{-1}(x - x^*(t'))$. Назовем сопутствующей задачей для задачи (7) и для момента времени t' краевую задачу

$$\begin{cases} u_t + Vu_\xi = \kappa u_{\xi\xi} - f(u, x^*(t')), & -\infty < \xi < +\infty, \\ u(-\infty, t) = \phi_1(x^*(t')), & u(+\infty, t) = \phi_3(x^*(t')) \end{cases} \quad (9)$$

(в однородной среде, в которой $f = f(u, x^*(t'))$, эта функция не зависит от ξ). В этом разделе вместо $x^*(t')$ будем писать далее просто x^* . Будем искать решение уравнения (9) типа бегущей квазиволны:

$$u(\xi, t) = v(z), \quad (10)$$

где $z = \xi - Wt$.

Подставим (10) в (7) и получим уравнение, которое без ограничения общности, переобозначив $V + W \rightarrow W$, можно записать в виде

$$-Wv_z = \kappa v_{zz} - f(v, x^*). \quad (11)$$

Граничные условия теперь обеспечивают примыкание к равновесному уровню на бесконечности:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} v(z) = \phi_1(x^*) + 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} v(z) = \phi_3(x^*) - 0. \quad (12)$$

Операция понижения порядка $v_z = p(v)$, $v_{zz} = pp_v$ приводит к уравнению первого порядка

$$-Wp = \kappa pp_v - f(v, x^*). \quad (13)$$

Вместо условий (12) теперь следует использовать граничные условия для функции $p(v)$, обеспечивающие решение типа КС с одним ВПС, соединяющим равновесные уровни $\phi_1(x^*)$ и $\phi_3(x^*)$:

$$\lim_{v \rightarrow \phi_1(x^*) + 0} p(v) = +0, \quad \lim_{v \rightarrow \phi_3(x^*) - 0} p(v) = +0, \quad (14)$$

причем должно быть выполнено условие монотонности фронта $p(v) > 0$ при $\phi_1(x^*) < v < \phi_3(x^*)$. В переопределенной краевой задаче для уравнения первого порядка (13) с двумя граничными условиями (14) неизвестными величинами являются W и $v(z)$. Требуется найти значение W , при котором эта задача имеет решение.

3.2. Однозначная разрешимость сопутствующей задачи для уравнения с корнями дробной кратности. Однозначная разрешимость сопутствующей задачи была установлена в [14] для случая простых корней. Мы установим существование решения сопутствующей задачи для случая кратных корней $\phi_{1,3}$ дробного порядка, предполагая выполненными в дополнение к условиям У1–4 еще два условия, определяющие поведение производной функции плотности источников:

У5. Найдутся $\phi_{12}(x^*)$, $\phi_{23}(x^*)$ такие, что

$$\phi_1(x^*) < \phi_{12}(x^*) < \phi_2(x^*), \quad (15)$$

$$\phi_2(x^*) < \phi_{23}(x^*) < \phi_3(x^*), \quad (16)$$

$$f_v(\phi_{12}(x^*), x^*) = 0, \quad f_v(\phi_{23}(x^*), x^*) = 0, \quad (17)$$

$$f_v(v, x^*) > 0 \quad (18)$$

при $\phi_1(x^*) < v < \phi_{12}(x^*)$, $\phi_{23}(x^*) < v < \phi_3(x^*)$,

$$f_v(v, x^*) < 0 \quad (19)$$

при $\phi_{12}(x^*) < v < \phi_{23}(x^*)$.

У6.

$$J_{12}(x^*) < J_{23}(x^*) \quad (20)$$

при $x^* \in [a, b]$, где

$$J_{12}(x) = \int_{\phi_1}^{\phi_2(x)} f(v, x) dv, \quad J_{23}(x) = - \int_{\phi_2}^{\phi_3(x)} f(v, x) dv. \quad (21)$$

Теорема 1. Пусть при всех $x^* \in [a, b]$ выполнены условия У1–6. Тогда существует единственное значение $W(x^*)$ такое, что уравнение (11) с указанными условиями (12) примыкания к уровням $\phi_{1,3}(x^*)$ при $z \rightarrow \mp\infty$ имеет

решение. Выполнено неравенство $W(x^*) < 0$. Это решение $v(z)$ является возрастающей функцией на всей области определения.

Доказательство будет следовать из серии утверждений, каждое из которых вытекает из свойств полей направлений на плоскости, детально изложенных и обоснованных в [17].

(1) Пусть $W < 0$. Применим метод, являющийся развитием метода стрельбы [18]. Так как везде в этом разделе рассматривается заданное значение $x = x^*$, не будем упоминать $x = x^*$ в аргументах функций $v, \phi_{1;3}$. Условие **У1** гарантирует, что в области $\phi_1 \leq v \leq \phi_3$, $p > 0$ на плоскости (v, p) задано гладкое поле направлений P :

$$P(v, p, W) = \frac{dp}{dv} = \frac{-Wp + f(v)}{kp}, \quad (22)$$

которое определяет двухпараметрическое семейство $L(p_0, W)$ интегральных кривых уравнения первого порядка (22). Первый параметр задает начальные данные $p(\phi_1) = p_0$, второй параметр – W .

(2) Из условий (4) и (12) следует, что интегральная кривая уравнения (22), обеспечивающая решение типа контрастной структуры, удовлетворяет условиям $p(v) \rightarrow +0$ и $dp/dv \rightarrow -W/k$ при $v \rightarrow \phi_1 + 0$.

(3) Заметим, что поле направлений удовлетворяет условиям $P > 0$ при $p > \min(0; f(v)/W)$, $P = 0$ при $p = f(v)/W$ и $\phi_2 < v < \phi_3$, $P < 0$ при $0 < p < f(v)/W$ и $\phi_2 < v < \phi_3$. После выделения интегральных кривых, удовлетворяющих условию примыкания $v(-\infty) = 0$, получим однопараметрическое семейство $L(W)$ с параметром W .

(4) Из гладкости f , обеспечиваемой **У1**, и из условия (22) следует, что $L(W)$ есть гладкое (как функция от W) семейство гладких кривых.

(5) Имеет место равномерный предел $L(W) \rightarrow L_0$ при $W \rightarrow -0$, где L_0 определяется в явном виде: $p(v) = (\int_{\phi_1}^v f(v') dv')^{1/2}$, здесь $\phi_1 \leq v \leq \phi_4$, причем ϕ_4 определяется уравнением $\int_{\phi_1}^{\phi_4} f(v') dv' = 0$.

(6) Из условия **У6** дисбаланса $J_{12} < J_{23}$ следует, что $\phi_2 < \phi_4 < \phi_3$.

(7) Каждая кривая семейства $L(W)$ определена на промежутке $\phi_1 \leq v \leq \hat{v}(W)$, где $\phi_2 < \hat{v}(W) < \phi_3$, причем $p(v, W) > 0$ на $\phi_1 \leq v \leq \hat{v}(W)$.

(8) Из (22) следует, что при фиксированном $W < 0$ функция $p(v, W)$ на кривой $L(W)$ удовлетворяет условию $dp/dv \rightarrow -\infty$ при $v \rightarrow \hat{v}(W) - 0$.

(9) $L(W)$ есть монотонное (возрастающее) семейство кривых, так что $\hat{v}(-W')$ есть возрастающая функция от $W' = -W$, что равносильно условию $p(v, -W'_2) > p(v, -W'_1)$ при $W'_2 > W'_1 \geq 0$.

(10) Функция $\hat{v}(-W')$ является гладкой возрастающей функцией от $W' = -W > 0$. Это следует из монотонности семейства $L(W)$.

(11) Найдется такое достаточно большое по модулю отрицательное $W'' < 0$, что интегральная кривая $L(W'')$ не имеет других корней кроме ϕ_1 .

(12) Найдется единственное $W_0 < 0$ такое, что $\hat{v}(W) \rightarrow \phi_3 - 0$ при $W \rightarrow W_0 + 0$. Существование W_0 обоснуем применением процедуры деления пополам к отрезку $[W''; 0]$, единственность следует из монотонности семейства $L(W)$.

(13) Функция $p(v, W_0)$ из семейства $P(W)$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в определении фронта контрастной структуры, т.е. является гладкой, удовлетворяет уравнению (22) и условиям примыкания к стационарным уровням на $\phi_1 + 0$ и $\phi_3 - 0$. Единственность решения задачи (11) с условиями примыкания вытекает из монотонности семейства $L(W)$.

Если при всех $x^* \in [a, b]$ верно $J_{12}(x^*) > J_{23}(x^*)$, то же самое будет верно для $W > 0$.

Заметим, что асимметричное поведение сепаратрисы в окрестности корней $\phi_{1,3}$ не является очевидным. Для иллюстрации доказательства приведем рис.1, на котором показано семейство решений задачи Коши для уравнения (22) с начальным условием $p(\phi_1) = 0$ для серии значений W , образующих убывающую арифметическую прогрессию с завершающим значением $W = W^*$. Задача Коши решалась численно. Мы приняли $\theta_{1,3} = 3$, $\phi_1 = -1$, $\phi_3 = 1$, $f(v) = C_1(v - \phi_1)^{\theta_1}$ в окрестности $v \in [\phi_1 - d, \phi_1 + d]$, $f(v) = C_3(v - \phi_3)^{\theta_3}$ в окрестности $v \in [\phi_3 - d, \phi_3 + d]$, и $f(v)$ представляется многочленом пятой степени на $v \in [\phi_1 + d, \phi_3 - d]$, причем его коэффициенты найдены из условия непрерывности f , $f'(v)$ и $f''(v)$ в точках $\phi_1 + d$ и $\phi_3 - d$, $d = 0,5$. Видно, что семейство интегральных кривых $L(W)$ монотонно, имеет вертикальную касательную при $p \rightarrow +0$ для $W > W^*$, имеет горизонтальную касательную при $p \rightarrow +0$ $v \rightarrow \phi_3 - 0$ при $W = W^*$.

Далее мы рассмотрим отдельно три области: $D_{1,3}$, где выполнены (4) и (5) для соответственно $j \in \{1; 3\}$, и D_2 , расположенную между D_1 и D_3 . Без ограничения общности можно определить

$$D_1(t) = \{x : \phi_1(x) - \delta < u(x, t) < \phi_1(x) + \delta\},$$

$$D_2(t) = \{x : \phi_1(x) + \delta < u(x, t) \leq \phi_3(x) - \delta\},$$

$$D_3(t) = \{x : \phi_3(x) - \delta < u(x, t) \leq \phi_3(x) + \delta\}.$$

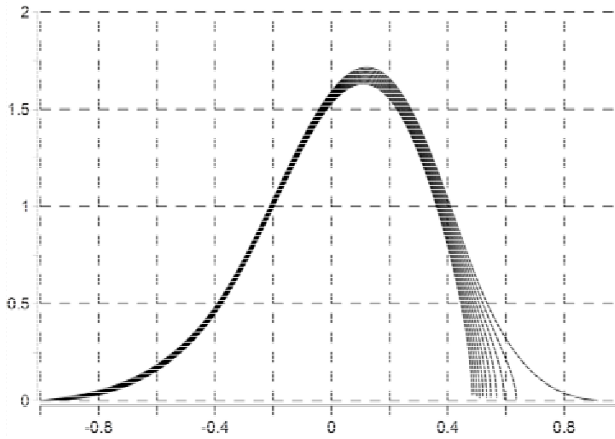


Рис.1. Семейство сепаратрис, построенных при различных значениях W .

4. Передний участок фронта в однородной среде

4.1. Степенной ряд, представляющий решение в области переднего участка фронта. Для построения верхнего и нижнего решений уравнения РД в неоднородной среде мы используем решение сопутствующей задачи (9), т.е. задачи в однородной среде, параметры которой такие же, как и в центральной точке фронта в данный момент времени. Полное исследование контрастной структуры в однородной среде для корней с произвольным (нецелочисленным, дробным и даже иррациональным) порядком вырождения дано в нашей работе [1]. Здесь мы укажем только результаты, которые нам потребуются для построения и обоснования решения в неоднородной среде.

Пусть ВПС перемещается справа налево, т.е. $W < 0$. Рассмотрим сначала профиль ВПС в области D_1 , т.е. в окрестности передней части фронта, прилегающей к уровню ϕ_1 в однородной среде, причем функция $v(z)$ из (10) есть возрастающая функция. Пусть $v(z) = \phi_1 + \omega(z)$, $\omega \rightarrow +0$ при $x \rightarrow -\infty$, и в некоторой окрестности значения $\omega = 0$ верно равенство

$$f(\phi_1 + \omega) = C_1 \omega^{*\theta_1}, \quad (23)$$

$C_1 > 0$, $\theta_1 > 1$. Тогда $\omega(z)$ есть решение уравнения

$$W\omega + \kappa\omega_{zz} - C_1\omega^{\theta_1} = 0, \quad (24)$$

удовлетворяющее условию $\omega(-\infty) = +0$. Все решения уравнения (24), удов-

летворяющие этому условию, можно представить в виде $\omega(z) = \tilde{\omega}(z - z_1)$, причем $\tilde{\omega}(z)$ есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} W\tilde{\omega} + \kappa\tilde{\omega}_{zz} - C_1(\tilde{\omega})^{\theta_1} = 0, \\ \tilde{\omega}(-\infty) = +0, \quad \tilde{\omega}(z_1) = \omega_1, \end{cases} \quad (25)$$

$\omega_1 > 0$ есть заданная константа.

Выполним операцию понижения порядка: $\omega_z = p$, $\omega_{zz} = pp_\omega$. Учитывая условие $\omega \rightarrow +0$ при $x \rightarrow -\infty$, которое равносильно $p \rightarrow +0$, получим для определения $p(\omega)$ задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\omega} = \frac{-W}{\kappa} + \frac{C_1\omega^{\theta_1}}{\kappa p}, \\ p(0) \neq 0. \end{cases} \quad (26)$$

Решение (26) будем строить в виде асимптотического ряда по той же схеме, которая разработана в [19] для уравнений с особыми точками. Запишем (26) в виде

$$\kappa p p_\omega = -Wp + C_1\omega^{\theta_1}. \quad (27)$$

В [1] показано, что $p(\omega) = P_1(\omega) + o(\omega^{\theta_1})$, где

$$P_1(\omega) = \frac{-W\omega}{\kappa} + \frac{C_1}{-W} \frac{\omega^{\theta_1}}{\theta_1}.$$

Будем искать решение (27) в виде

$$p(\omega) = \sum_{s=0}^{+\infty} g_s \omega^{s\theta_1 - s + 1}, \quad (28)$$

где

$$g_0 = -W/\kappa, g_1 = C_1/(-W\theta_1). \quad (29)$$

Последовательно собирая в (27) слагаемые с одинаковыми степенями ω , получим для расчета коэффициентов ряда (28) систему уравнений

$$\kappa \sum_{m=0}^s g_m g_{s-m} ((s-m)(\theta_1 - 1) + 1) = -Wg_s - 1, \quad (30)$$

явное рекуррентное решение которой для $s \geq 2$

$$g_s = \frac{-1}{-W} \frac{\kappa}{s(\theta_1 - 1) + 1} \sum_{m=1}^{s-1} g_m g_{s-m} ((s-m)(\theta_1 - 1) + 1). \quad (31)$$

Теперь найдем радиус сходимости ряда (28) (по степеням $\omega^{\theta_1 - 1}$). Ряд (28) сходится при

$$0 \leq \omega < \left(2\kappa C_1 / (W^2 \theta_1) \right)^{1/(\theta_1 - 1)}. \quad (32)$$

Поэтому ряд (28) с коэффициентами (29), (31) дает точное решение уравнения (26) в области (32). Найдем частичную сумму асимптотического ряда 4-го порядка для задачи (26):

$$P_4(\omega) = \frac{-W\omega}{k} + \frac{C_1}{-W} \frac{\omega^{\theta_1}}{\theta_1} - \frac{C_1^2 k}{-W^3} \frac{\omega^{2\theta_1 - 1}}{\theta_1(2\theta_1 - 1)} + \frac{C_1^3 k^2}{-W^5} \frac{3\theta_1 - 1}{\theta_1^2(2\theta_1 - 1)(3\theta_1 - 2)} \omega^{3\theta_1 - 2} - \frac{C_1^4 k^3}{-W^7} \frac{15\theta_1^2 - 12\theta_1 + 2}{\theta_1^3(2\theta_1 - 1)(3\theta_1 - 2)(4\theta_1 - 3)} \omega^{4\theta_1 - 3}. \quad (33)$$

Если взять $p(\omega) = P_1(\omega)$ (выражение для $P_1(\omega)$ было найдено ранее), то из уравнения (11) найдем $f(\omega) = Wp + kpp_0$:

$$f(\omega) = C_1 \omega^{\theta_1} \left(1 + \frac{C\kappa}{W^2 \theta} \omega^{\theta - 1} \right) = C_1 \omega^{\theta_1} (1 + o(1)) \quad (34)$$

при $\omega \rightarrow +0$. Далее можно построить произвольное число членов асимптотического ряда, но это выходит за рамки данной работы. Для обоснования используем метод дифференциальных неравенств, мы построим упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (11).

4.2. Нижнее решение в окрестности переднего участка ВПС. Пусть оператор L действует на дважды дифференцируемую функцию $\omega(z)$ по правилу

$$L\omega = \kappa \omega_{zz} + W\omega_z - C_1 \omega^\theta, \quad (35)$$

область определения состоит из всех функций $\omega(z)$ таких, что $\omega(-\infty) = +0$, $\omega(z_1) = \omega_1$, $\omega > 0$. Условие $\omega(z_1) = \omega_1$ определяет сдвиг решения автономного уравнения (36) вдоль оси z , z_1 – заданная константа, $\omega_1 > 0$. Тогда уравнение (24) движения контрастной структуры с заданной постоянной скоростью W можно записать в виде

$$L\omega = 0, \quad (36)$$

дополнительные условия задачи (25) подразумеваются областью определения оператора L . Мы построим упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (36) и покажем, что существуют верхнее и нижнее решения в виде экспоненциальных функций.

В [1] показано, что нижним решением задачи (36) является функция

$$\alpha_1(z) = \check{\omega}(z) - \check{d}_1, \quad (37)$$

где $\check{\omega}(z)$ есть решение краевой задачи для уравнения второго порядка

$$\begin{cases} \check{W}\check{\omega}_z + \kappa\check{\omega}_{zz} - \check{f}(\check{\omega}) = 0, & -\infty < z < \check{z}, \\ \check{\omega}(-\infty) = +0, & \check{\omega}(\check{z}) = \check{\omega}_1, \end{cases} \quad (38)$$

где $\check{f}(v) \geq 0$, $\check{W} \leq W$, $\check{d}_1 > 0$. На промежутке $-\infty < z < \check{z}$ будет верно условие знакоопределенности оператора $L\check{\omega} > 0$. В частности, можно взять $\check{f}(v) = 0$, $\check{W} = W$, причем $\check{C} > 0$. Тогда получим нижнее решение в виде экспоненциальной функции:

$$\check{\omega}(z) = \check{C}e^{-W(z - z_1)/\kappa}, \quad (39)$$

причем в этом случае разрешимость задачи (38) очевидна. В [1] сформулированы достаточные условия знакоопределенности оператора на решении задачи (38).

4.3. Верхнее решение в окрестности переднего участка ВПС. Верхним решением задачи (36) в окрестности переднего участка фронта является функция

$$\beta_1(z) = \hat{\omega}(z) + \hat{d}_1, \quad (40)$$

где $\hat{\omega}(z)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \hat{W}\hat{\omega}_z + \kappa\hat{\omega}_{zz} - \hat{f}(\hat{\omega}) = 0, & -\infty < z < \hat{z}_1, \\ \hat{\omega}(-\infty) = 0, & \hat{\omega}(\hat{z}_1) = \hat{\omega}_1, \end{cases} \quad (41)$$

$d \geq 0$, $\hat{W} \geq W$, $0 \leq \hat{f}(\hat{\omega}) < C_1\hat{\omega}^{\theta_1}$. При этих условиях на промежутке $-\infty < z < \hat{z}_1$ будет верно неравенство $L[\beta_1] < 0$. В частности, можно взять $\hat{W} = W$, $\hat{f}(v) = 0$, $d = 0$, $\hat{C}_1 > 0$. Тогда

$$\hat{\omega}(z) = \hat{C}_1 \exp(-W(x - z_1)/\kappa) \quad (42)$$

есть верхнее решение.

Теорема 2. Найдутся такие $0 < \check{C}_1 < 1$ и $\hat{C}_1 > 1$, что функции (37), (40) $\alpha_1(z)$ и $\beta_1(z)$, полученные из задач (38) и (41), на некотором промежутке $-\infty < z < z_1$ являются верхним и нижним решениями задачи (36), причем они удовлетворяют условию упорядоченности $\check{\omega}(z) < \omega(z) < \hat{\omega}(z)$ и тем самым образуют упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (36) на некотором промежутке $-\infty < z < z_1$.

Следовательно, точное решение задачи (36) заключено между двумя экспоненциальными функциями вида

$$\check{\omega}(\xi) = \check{C}_1 e^{-\kappa\xi/W}, \quad \hat{\omega}(\xi) = \hat{C}_2 e^{-\kappa\xi/W}. \quad (43)$$

Разумеется, этот вывод верен только в D_1 , т.е. в некоторой окрестности $-\infty < z < z_1$, или, что то же самое, в некоторой правой полуокрестности точки $\omega = 0$, чего нам вполне достаточно, так как мы изучаем пока только передний участок фронта контрастной структуры.

4.4. Построение нижнего решения в однородной среде из асимптотического ряда. Покажем, что нижнее решение $\check{\check{\omega}}$ задачи (36) можно построить исходя из модифицированной задачи первого порядка

$$\frac{d\check{\check{\omega}}}{dz} = P_1(\check{\check{\omega}}), \quad \check{\check{\omega}}(\check{z}_0) = \check{\check{\omega}}_0, \quad (44)$$

где $\check{\check{\omega}}_0 > 0$, и в (44) функция $P_1(v)$ найдена из (33). Решение в неявной форме задачи (44) имеет вид

$$\check{z}(\check{\check{\omega}}) = \check{z}_0 + \int_{\check{\check{\omega}}}^{\check{\check{\omega}}_0} \frac{d\omega'}{P_1(\omega')} = \check{z}_0 + \int_{\check{\check{\omega}}}^{\check{\check{\omega}}_0} \frac{d\omega'}{(-W\omega' / \kappa) + (C_1\omega'^{\theta}) / (-W\theta)}. \quad (45)$$

В самом деле, прямое вычисление $L\check{\check{\omega}}$ в применении к $\check{\check{\omega}}(\check{z})$, найденной из (45), дает

$$L\check{\check{\omega}} = \kappa \frac{C_1^2}{W^2} \frac{\check{\check{\omega}}^{2\theta_1-1}}{\theta_1} > 0, \quad (46)$$

так что $\check{\check{\omega}}(z)$ есть нижнее решение задачи (25) при любом $\check{\check{\omega}}_0 > 0$.

Так как из (45) следует, что $z(\check{\check{\omega}}) \rightarrow -\infty$ при $\check{\check{\omega}} \rightarrow +0$, то нижнее решение образует фронт бесконечной протяженности.

Теорема 3. Найдется такое \check{z}_1 , что нижнее решение задачи (36), полученное как решение задачи Коши (44), в котором положено $\check{\check{\omega}}_0 = \check{C}_1\omega(\check{z}_1)$, а $P_1(\check{\check{\omega}})$ найдено из (33), где $\omega(z)$ есть точное решение задачи (36), на проме-

жутке $-\infty < z < \check{z}_1$ удовлетворяет условию упорядоченности по отношению к точному решению:

$$\check{\omega}(z) < \omega(z). \tag{47}$$

Так как функцию (42) можно неявно представить в виде

$$z(\hat{\omega}) = \check{z}_0 + \int_{\hat{\omega}}^{\hat{\omega}_0} \frac{d\omega'}{(-W \omega')/\kappa}, \tag{48}$$

то для любого z из пересечения множеств значений функций $\check{z}(\omega)$ верно $\check{z}(\omega) > \hat{z}(\omega)$. Так как из (48) и (45) следует, что функции $\hat{\omega}(z)$ и $\check{\omega}(z)$ возрастающие, то же верно для обратных к ним функций, т.е. $\check{\omega}(z) < \hat{\omega}(z)$. Поэтому $\check{\omega}(z)$ и $\hat{\omega}(z)$ также образуют упорядоченную пару нижнего и верхнего решений. В данном случае, однако, $\check{\omega}(z)$ через элементарные функции, вообще говоря, не выражается.

4.5. Степенной ряд для заднего участка ВПС в однородной среде.

Рассмотрим профиль ВПС в области D_3 , где $u(x, t) \rightarrow \phi_3 - 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Найдем решение уравнения (7) в виде бегущей квазиволны: $u(x, t) = v(z)$, $z = x - Wt$. Пусть $v(z) = \phi_3 + \omega(z)$, и в некоторой окрестности значения $\omega = 0$ верно равенство

$$f(\phi_3 + \omega) = C_3 \omega^{*\theta_3}, \tag{49}$$

причем $C_3 > 0$. Тогда основное уравнение второго порядка (11) примет вид

$$\kappa \omega_{zz} + W \omega_z - C_3 \omega^{*\theta_3} = 0. \tag{50}$$

Дополнительные условия к (50): $\omega(z_3) = \omega_3$, $\omega_3 < 0$, z_3 задает сдвиг вдоль оси z , $\omega(+\infty) = -0$ обеспечивает решение типа ВПС. Понижение порядка $v_z = p$ приводит к уравнению

$$-\kappa p p_\omega - W p = C_3 (-\omega)^{*\theta_3} \tag{51}$$

с условием $p(0) = 0$, где $W < 0$. Учитывая, что $\omega < 0$, $f(\omega) < 0$, $p = \omega_z > 0$, $p_\omega < 0$, мы записали (51) в такой форме, чтобы каждое слагаемое левой и правой частей было положительным.

Решение будем искать в виде асимптотического ряда [19]. В [1] показано, что частичная сумма первого порядка имеет вид

$$P_1(\omega) = \frac{C_3}{-W} (-\omega)^{*\theta_3} + \kappa \theta_3 \frac{C_3^2 (-\omega)^{2\theta_3-1}}{W^3}. \tag{52}$$

Будем искать решение (51) в виде

$$p(\omega) = \sum_{s=1}^{+\infty} h_s (-\omega)^{s\theta_3 - s + 1}, \quad (53)$$

где $h_1 = C_3 / (-W)$. Последовательно собирая в (51) слагаемые с одинаковыми степенями ω , получим для расчета коэффициентов ряда (53) систему уравнений

$$\kappa \sum_{m=1}^{s-1} h_m h_{s-m} ((s-m)(\theta_3 - 1) + 1) = -Wh_s, \quad (54)$$

явное рекуррентное решение которой для $s \geq 2$

$$h_s = \frac{\kappa}{-W} \sum_{m=1}^{s-1} h_m h_{s-m} ((s-m)(\theta_3 - 1) + 1). \quad (55)$$

Теперь найдем радиус сходимости ряда (28) (по степеням $(-\omega)^{\theta_3 - 1}$). Ряд (28) сходится при

$$-\left(W^2 / (\kappa\theta_3 C_3)\right)^{1/(\theta_3 - 1)} < \omega \leq 0. \quad (56)$$

Из задачи Коши $d\omega/dz = p_0(\omega)$ с начальным условием $\omega(+\infty) = 0$ найдем точное решение для нулевого порядка частичной суммы

$$p_0(\omega) = C_3 / (-W(-\omega)^{\theta_3}) \quad (57)$$

асимптотического ряда (52):

$$v(z) = \phi_3 + \Xi_3(z - z_3), \quad (58)$$

где

$$\Xi_3(z) = -\left(\frac{-W}{C_3(\theta_3 - 1)}\right)^{1/(\theta_3 - 1)} \frac{1}{z^{1/(\theta_3 - 1)}}. \quad (59)$$

Для первого порядка частичной суммы (52) можно найти решение только в неявной форме, аналогичной (45). Можно показать, что полученная таким образом функция $v(z)$ удовлетворяет условию $v(z) = \phi_3 + \Xi_3(z - z_0)(1 + o(1))$ при $z \rightarrow +\infty$, так что (59) дает асимптотику точного решения в окрестности заднего участка фронта.

4.6. Верхнее и нижнее решения в окрестности заднего участка ВПС.

Легко убедиться в том, что упорядоченную пару верхнего и нижнего решений уравнения (50) в некоторой окрестности значения $\omega = 0$ можно взять в виде

$$\beta_3(z) = \Xi_3(z - z_3) + r_3, \alpha_3(z) = \Xi_3(z - z_3) - r_3, \quad (60)$$

где $r_3 > 0$. Точнее, верна

Теорема 4. Пусть в области D_3 выполнено условие (49). Найдется такое $r_3 > 0$, что в этой области будут верны условия знакоопределенности оператора $M[\beta_3] < 0$, $M[\alpha_3] > 0$ и условие упорядоченности $\alpha_3(z) < \beta_3(z)$, причем нижнее и верхнее решения α_3 и β_3 найдены из (60).

Доказательство выполним для верхнего решения. Пусть $\beta = \omega + r$, $\omega_z = p_0(\omega)$, $\omega_{zz} = p_0 p_{0\omega}$, $p_0(\omega)$ определено (57). Пусть $\omega_0 < 0$ и $r > 0$ выбраны так, что для всех $\omega \in (\omega_0, \omega_0 + r)$ выполнено (49). Тогда $\beta_z = \omega_z$, $\beta_{zz} = \omega_{zz}$, поэтому прямое вычисление дает

$$M\beta = \kappa\theta_3 \frac{-C_3^2(-\omega)^{2\theta_3-1}}{W^2} - [C_3(-\omega)^{\theta_3} - C_3(-\omega-r)^{\theta_3}] < 0 \quad (61)$$

при $r > 0$, так как каждое из двух слагаемых меньше нуля. Для нижнего решения доказательство аналогично с очевидными изменениями.

5. Класс функций плотности источников, для которых можно найти явное решение сопутствующей задачи

Получить точное явное решение уравнения сопутствующей задачи (13) при заданной произвольно функции $f(u, x)$, вообще говоря, не удастся, за исключением специальных симметрических функций, обеспечивающих значение $W = 0$, например, кубической симметрической функции [20]. Построим класс правых частей f , в рамках которого уравнение (13) вместе с условиями (14) может быть решено аналитически, и достаточно широкий, чтобы в нем при любом W можно было найти функцию, близкую к физически оправданной модели. Пусть $p(v, x)$ есть заданная функция, $p(v, x) > 0$ при $\phi_1(x) < v < \phi_3(x)$ и

$$f(v, x) = Wp + \kappa p p_v. \quad (62)$$

Если $f(v, x)$ есть функция, удовлетворяющая всем сформулированным ранее условиям при некотором заданном значении W , то $p(v)$ дает решение задачи Коши

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{W}{\kappa} + \frac{f(v)}{\kappa p}, \quad v \in (\phi_1, \phi_3), \quad p(\phi_1) = 0, \quad (63)$$

причем условие $p(\phi_3) = 0$ автоматически будет выполнено. Теперь профиль ВПС найдем в явном виде:

$$x(\tilde{\omega}) = x(0) + \int_0^{\tilde{\omega}} \frac{d\omega}{p(\omega)}, \quad (64)$$

причем из условия $\theta_j > 1$ и из (4), (5) следует $\xi \rightarrow +\infty$ при $\nu \rightarrow \phi_3 - 0$, $\xi \rightarrow -\infty$ при $\nu \rightarrow \phi_1 + 0$, так как интеграл в (64), записанный в пределах (ϕ_2, ϕ_1) и в пределах (ϕ_2, ϕ_3) , расходится соответственно к $-\infty$ и $+\infty$.

Как принято в работах данной тематики, мы приведем пример достаточно широкого класса функций $f(u)$, для которых выполнены указанные в разд.2 условия. Для построения формальной асимптотики и для аналитического расчета профиля ВПС сформулируем достаточно широкий класс функций плотности источников, которые обеспечивают степенную зависимость в окрестности нижнего и верхнего корней. Зададим функцию $f(u)$ по отдельности на четырех промежутках: $U_0 = (-\infty, \phi_1 - \delta]$, $U_1 = [\phi_1 - \delta, \phi_1 + \delta]$, $U_2 = [\phi_1 + \delta, \phi_3 - \delta]$, $U_3 = [\phi_3 - \delta, \phi_3 + \delta]$, $U_4 = [\phi_3 + \delta, +\infty)$, причем $\phi_1 + \delta < \phi_3 - \delta$ на каждом из $U_{\{1;2;3\}}$ будет расположен ровно один корень уравнения $f(u) = 0$, на $U_{\{0;4\}}$ корней нет. На U_1 используем для вычисления $f(u)$ выражения (62) и (33), заменив там ω на $u - \phi_1$. На U_3 используем (62) и (52), заменив там ω на $u - \phi_3$. На U_2 зададим $\tilde{p}_2(u)$ так, чтобы были выполнены условия гладкого сопряжения $p(u)$ и $p_u(u)$ в точках $\phi_1^* = \phi_1 + \delta$ и $\phi_3^* = \phi_3 - \delta$: $p(\phi_j^* - 0) = p(\phi_j^* + 0)$, $p_u(\phi_j^* - 0) = p_u(\phi_j^* + 0)$ для $j \in \{1;3\}$. На $U_{0,4}$ пусть $f(u)$ будет линейная функция, коэффициенты которой найдем также из условий гладкого сопряжения. Условия для выбора функции $p_2(\nu)$ включают (1) требование гладкости, (2) единственный корень ϕ_2 уравнения $\kappa(p_2)_u + W = 0$ должен быть расположен на промежутке U_2 , и, кроме того, должно найтись такое ϕ_2^* , что

$$\begin{cases} (p_2)_u > 0, & U_2^{(-)} = (\phi_1 + \delta, \phi_2^*), \\ (p_2)_u < 0, & U_2^{(+)} = (\phi_2^*, \phi_3 - \delta), \end{cases} \quad (65)$$

так что $p(u)$ имеет единственную точку максимума на (ϕ_1, ϕ_3) . Саму функцию $f(u)$ найдем из (13), (62). Условия на $p(\nu)$ позволяют использовать широкий класс функций, из которого можно выбрать функцию, близкую к практически оправданной.

6. Устойчивость решения эволюционного уравнения в однородной среде

Перейдем к исследованию эволюционного уравнения (7). Если функция $\Theta(z)$ есть точное решение уравнения (11), то функция $u(x, t) = \Theta(x - Wt)$

есть точное решение уравнения (7). Если к тому же $v(x)$ удовлетворяет условиям примыкания на бесконечности (12), то соответствующая $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (7) и является таким образом решением эволюционного уравнения с граничными условиями. Но в реальной ситуации физической модели, для которой составлена математическая модель (7), начальные данные не обязательно будут соответствовать условию $u(x,0) = \Theta(x - x_0)$. Заранее ясно, что при специальном выборе начальных данных можно после завершения быстропротекающих процессов установления получить решение эволюционного уравнения в виде КС, состоящей из нескольких пятен, разделенных ВПС разной полярности. Таким образом, в данной работе мы можем только поставить задачу обоснования того факта, что при выборе начальных данных для эволюционного уравнения, не слишком сильно отличающихся от функции $\Theta(x - x_0)$, решение $u(x,t)$ также не будет сильно отличаться от бегущей квазиволны $\Theta(x - Wt)$. Для этого мы опять привлечем технику верхнего и нижнего решений, разработанную в [15], основанную на построении верхнего и нижнего решений эволюционного уравнения (7). Для этого мы построим верхнее решение $\beta(x,t,\varepsilon)$ и нижнее решение $\alpha(x,t,\varepsilon)$ задачи (7).

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$M[u] = -\varepsilon u_t + \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u), \quad (66)$$

определенный на множестве всех дважды непрерывно дифференцируемых в области $\Pi = (a,b) \times (0,T)$, непрерывных в области $\bar{\Pi} = [a,b] \times [0,T]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи (7). Мы построим такие функции $\beta(x,t,\varepsilon)$ и $\alpha(x,t,\varepsilon)$, чтобы выполнялись условия знакоопределенности оператора M [14]:

$$M[\beta] < 0, \quad M[\alpha] > 0 \quad (67)$$

и условие упорядоченности

$$\alpha(x,t,\varepsilon) < \beta(x,t,\varepsilon) \quad (68)$$

в Π . Верхнее и нижнее решения β и α будем искать в виде

$$\beta(x,t,\varepsilon) = \Theta(\xi_\beta) + \varepsilon^\mu r, \quad \alpha(x,t,\varepsilon) = \Theta(\xi_\alpha) - \varepsilon^\mu r, \quad (69)$$

где $\Theta(x)$ есть точное решение (11),

$$\xi_\alpha(x,t,\varepsilon) = \frac{x - x_\alpha^*(t)}{\varepsilon}, \quad \xi_\beta(x,t,\varepsilon) = \frac{x - x_\beta^*(t)}{\varepsilon},$$

$$x_{\alpha}^{*}(t) = x_0^{*}(t) + \varepsilon^{\gamma} q t, \quad x_{\beta}^{*}(t) = x_0^{*}(t) - \varepsilon^{\gamma} q t, \quad x_0^{*}(t) = x_0^{*} + W_0 t.$$

Константы μ , r , γ , q мы далее укажем. Все параметры в выражении (69) положительны: $q > 0$, $r > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$. Мы используем для построения верхнего и нижнего решений, таким образом, нулевой член асимптотического ряда.

Теорема 5. Для любых $\theta_1 > 1$, $\theta_3 > 1$ $\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $\exists r > 0$, $\exists q > 0$, $\exists \mu > 0$, $\exists \gamma > 0$: $L[\beta] < 0$, $L[\alpha] > 0$ и $\alpha < \beta$ в Π . $\mu = \gamma$ и

$$q > rB_2 / A_2. \quad (70)$$

Теперь из теоремы о верхнем и нижнем решениях эволюционного уравнения [14] следует

Теорема 6. Для задачи (7) существует упорядоченная пара нижнего и верхнего решений $\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, t, \varepsilon)$ соответственно. Если начальная функция заключена между ними, т.е. $\alpha(x, 0, \varepsilon) < u^0(x, \varepsilon) < \beta(x, 0, \varepsilon)$, то задача (7) имеет единственное классическое решение $u(x, t, \varepsilon)$, причем

$$\alpha(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon)$$

для всех $x \in [a, b]$ и $t \in [0, T)$.

7. Асимптотическое представление решения в неоднородной среде

7.1. Регулярная функция. Пусть теперь плотность источников f зависит также от x : $f(u, x)$, но не зависит от ε (принципиального характера это ограничение не имеет). Наша цель – показать, что в неоднородной среде решение уравнения (7) с корнями дробной кратности при некоторых ограничениях качественно не отличается от решения в однородной среде и проявляет то же важное на практике свойство заднего участка фронта. Для этого мы используем методику [15]. Мы построим асимптотический ряд, представляющий решение в неоднородной среде, и используем модифицированную частичную сумму этого ряда для представления нижнего и верхнего решений. Мы следуем идеям А.Н. Тихонова [16], представляя решение в виде суммы регулярной части и функции переходного слоя [20].

Регулярную функцию нулевого порядка $\bar{u}_0(x, t)$ найдем из уравнения $f(\bar{u}_0(x, t), x) = 0$. Выберем решение в соответствии с UI в виде разрывной функции

$$\bar{u}_0(x, t) = \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(x, t), & x < x^*(t), \\ \bar{u}_0^{(+)}(x, t), & x > x^*(t), \end{cases} \quad (71)$$

где $\bar{u}_0^{(-)}(x, t) = \phi_1(x)$, $\bar{u}_0^{(+)}(x, t) = \phi_3(x)$. При $x = x^*(t)$ примем $\bar{u}_0(x, t)$ равной $\phi_2(x)$. Так как в рамках нашей модели f не зависит явно от ε , то регулярные функции первого ($m = 1$) и всех последующих порядков ($m > 1$) равны нулю: $\bar{u}_m(x) = 0$ (это не является принципиально важным).

7.2. Функция переходного слоя нулевого порядка. При сформулированных условиях из *теоремы 1* следует, что для любого $x^* \in (a, b)$ найдется единственное значение $W_0 < 0$ такое, что краевая задача

$$\begin{cases} \kappa \Theta_{\xi\xi} + W_0 \Theta_{\xi} = f_0(\Theta(\xi, x^*), x^*), \\ \Theta(-\infty) = \phi_1(x^*), \quad \Theta(+\infty) = \phi_3(x^*) \end{cases} \quad (72)$$

с условиями примыкания к устойчивым уровням $\phi_{1,3}(x^*)$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$ разрешима. Обозначим это значение $W_0(x^*)$. Решение задачи (72) обозначим $\tilde{u}_0(\xi, x^*)$. Величина $W_0(x^*)$ может также быть найдена из тождества [20]:

$$W_0(x^*) \int_{-\infty}^{+\infty} (\Theta_{\xi})^2 d\xi = \int_{\phi_1(x^*)}^{\phi_3(x^*)} f(v, x^*) dv, \quad (73)$$

причем условие **У3** влечет $W_0(x^*) < 0$ при всех $x^* \in (a, b)$. Найдем $x^*(t)$ из решения задачи Коши:

$$\frac{dx^*}{dt} = W_0(x^*), \quad x^*(0) = x_0^*, \quad (74)$$

начальное положение фронта КС задается величиной $x_0^* \in (a, b)$, или из равносильного уравнения Вольтерра:

$$x^*(t) = x_0^* + \int_0^t W_0(x^*(\tau)) d\tau. \quad (75)$$

В соответствии с классическим подходом к построению асимптотического ряда [2], функции переходного слоя нулевого порядка $Q_0^{(\pm)}(\xi, t)$ находятся из краевых задач

$$\begin{cases} \kappa Q_{0\xi\xi}^{(\pm)} + W_0 Q_{0\xi}^{(\pm)} = f_0(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}, x^*) - f_0(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^*), x^*), \\ Q_0^{(\pm)}(0, t) + \bar{u}_0^{(\pm)}(x^*) = \phi_2(x^*), Q_0^{(-)}(-\infty) = 0, \quad Q_0^{(+)}(+\infty) = 0 \end{cases} \quad (76)$$

и условия сшивания производных

$$Q_{0\xi}^{(-)}(-0) = Q_{0\xi}^{(+)}(+0). \quad (77)$$

Из (11) и (12) следует, что $\bar{u}_0(\xi) + Q_0^{(\pm)}(\xi, t) = \Theta(\xi, x^*(t))$, это равенство верно только при условии решения (76) совместно с (77), (74). В растянутых координатах находим Θ из (63), (64) в неявной форме:

$$\int_{\Phi_2}^{v_0(\xi)} \frac{d\hat{v}}{p(\hat{v}, x^*)} = \xi.$$

7.3. Функции переходного слоя последующих порядков. Метод построения функций переходного слоя последующих порядков принципиально не отличается от изложенного в [21, 22]. Координата точки перехода представляется в виде ряда

$$x^{(m^*)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t). \quad (78)$$

Заметим, что в точке сшивания x^* первая производная частичной суммы асимптотического ряда должна быть непрерывна. Скачок производной можно представить в виде суммы степенного ряда, причем в (-1) -м порядке непрерывность обеспечивается условием (77). В нулевом порядке функция (71) имеет скачок производной, равный $(\phi_3)_x(x^*) - (\phi_1)_x(x^*)$, который будет скомпенсирован условиями сопряжения функции переходного слоя первого порядка. Функции переходного слоя 1-го порядка слева и справа от точки перехода находим из краевых задач

$$\begin{cases} (\kappa \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + W_0 \frac{\partial}{\partial \xi} - f_{0u}(\tilde{u}(\xi), x_0)) Q_1^{(\pm)}(\xi, t) = q_1^{(\pm)}(\xi, t), \\ Q_1^{(\pm)}(\pm\infty, t) = 0, \\ Q_1^{(\pm)}(\pm 0) = -x_1 \frac{d\bar{u}_0^{(\pm)}}{dx} + x_1 \frac{d\phi_2}{dx}, \end{cases} \quad (79)$$

где

$$q_1^{(\pm)}(\xi, t) = -W_1 Q_{0\xi}^{(\pm)} + (Q_0^{(\pm)})_t + K_1^{(\pm)}(\xi, t), \quad (80)$$

известная функция K_1 зависит также от W_0, x_0, x_1 . Точные выражения для этих функций приведены в [21]. Условия разрешимости системы (79) приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$W_1 = \frac{dx_1}{dt} = G_1(x_0, W_0, x_1, W_1), \quad (81)$$

причем функция G_1 зависит также от моментов функции f и ее частных производных, рассчитанных вместе с Q_0 . Функция G_1 при выполнении условий У1–У4 является дифференцируемой функцией x_1 , что гарантирует существование и единственность решения (81). Последующие члены асимптотического ряда находятся аналогично, скорость m -го порядка находится из условия разрешимости краевой задачи для функции переходного слоя m -го порядка.

7.4. Построение верхнего решения нулевого порядка. Покажем теперь, что в неоднородной среде с дробным порядком вырождения крайних корней точное решение эволюционного уравнения (7) качественно не отличается от такового в однородной среде, так что существует решение типа перемещающейся квазиволны с такими же особенностями поведения переднего и заднего участков ВПС, что и для однородной среды. Однако теперь из-за наличия зависимости скорости дрейфа ВПС от координаты несколько изменятся параметры верхнего и нижнего решений. Верхнее решение уравнения (7) мы построим, используя функцию переходного слоя нулевого порядка. Пусть

$$N[u] = -\varepsilon u_t + \varepsilon^2 u_{xx} - f(u, x), \quad (82)$$

отличие от (66) в том, что теперь имеется зависимость от x . Ограничимся случаем $x > x^*(t)$, альтернатива рассматривается аналогично. В соответствии с (72) и (76), функция переходного слоя нулевого порядка равна $Q_0(\xi, x^*) = \Theta(\xi, x^*) - \phi_3(x^*)$.

Для большей наглядности рассмотрим частный случай, для которого выполнено еще одно условие:

У7. Выполнено условие $(\phi_3)_x(x^*) - (\phi_1)_x(x^*) = 0$ на $[a, b]$.

Принципиального характера это условие не имеет, но сильно упрощает обоснование, так как частичная сумма асимптотического ряда нулевого порядка является дифференцируемой функцией. Верхнее решение при $x > x^*(t)$ будем искать в виде

$$\beta_0(x, t) = \bar{u}_0(x) + Q_0(\xi_\beta(x, t), x_\beta^*(t)) + \varepsilon^v q_0, \quad \bar{u}_0(x) = \phi_3(x), \quad (83)$$

$$\xi_\beta(x, t) = \frac{x - x_\beta^*(t)}{\varepsilon}, \quad (84)$$

$$x_\beta^*(t) = x_\beta^*(t_0) + \int_{t_0}^t W_\beta(x_\beta^*(t')) dt', \quad W_\beta(x^*) = W(x^*) - \tilde{q}, \quad (85)$$

где константы $\tilde{r} > 0$, $\tilde{q} > 0$ будут далее найдены. Заметим, что плотность источников в нашей задаче не зависит от ε явно, поэтому $\varepsilon \bar{y}_1(x) = 0$.

7.5. Проверка знакоопределенности оператора в окрестности крайних корней. Теперь уточним выбор констант, входящих в определение (83)–(85) верхнего решения.

Теорема 7. *Найдутся такие константы в выражениях (83)–(85), что пара функций α и β являются нижним и верхним решениями уравнения (7), выполнены условия знакоопределенности (67) оператора (66) и условия упорядоченности (68).*

Для доказательства последовательно рассмотрим окрестность каждого из крайних корней, затем промежуточную область между корнями (включающую средний корень). Найдем $N[\beta]$, подставив (83) и (85) в (82):

$$\begin{aligned} N[\beta] = & [Q_{0\xi} W_0(x_\beta^*) + \kappa Q_{0\xi\xi} - f(\phi_3(x_\beta^*) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x_\beta^*)] + \\ & + \kappa \varepsilon^2 \phi_{3xx} - \tilde{q} Q_{0\xi} - \varepsilon Q_{0x} \cdot (W_0(x_\beta^*) - \tilde{q}) - \\ & - [f(\phi_3(x) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*) + \tilde{r}, x) - f(\phi_3(x) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x)] - \\ & - [f(\phi_3(x) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x) - f(\phi_3(x_\beta^*) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x_\beta^*)]. \end{aligned}$$

Заметим, что из нашего способа построения предполагаемого верхнего решения β вытекает равенство

$$Q_{0\xi} W_0(x_\beta^*) + \kappa Q_{0\xi\xi} - f(\phi_3(x_\beta^*) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x_\beta^*) = 0.$$

Определим окрестность $\Omega_3 = [\phi_3 - \delta_3, \phi_3 + \delta_3]$ корня ϕ_3 функции $f(u, x)$ таким образом, чтобы внутри этой области было верно равенство (49), которое в неоднородной среде примет вид

$$f(\phi_3(x) + \omega, x) = C_3 \omega^{*\theta_3} \quad (86)$$

при $x \in [a, b]$ и $|\omega| < \delta_3$. Тогда внутри Ω_3 выполнено также равенство

$$f(\phi_3(x) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x) - f(\phi_3(x_\beta^*) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x_\beta^*) = 0 \quad (87)$$

и верны следующие оценки:

$$|\kappa \varepsilon^2 (\phi_3)_{xx}| < C'_3 \varepsilon^2, \quad (88)$$

$$-\tilde{q} Q_{0\xi} < 0, \quad (89)$$

$$|-\varepsilon Q_{0x} \cdot (W_0(x_\beta^*) - \tilde{q})| < \varepsilon C''_3 |\omega|^{\theta_3}, \quad (90)$$

эту оценку можно еще улучшить за счет оценки $Q_{0\xi} = p(\omega)$. Заметим, что из (86) следует, что

$$\exists C'''_3 > 0: \forall v \in [\varphi_3 - \delta_3 + \tilde{r}, \varphi_3 + \delta_3 - \tilde{r}] \quad (91)$$

верно $f(v + \tilde{r}) - f(v) \geq C'''_3(\tilde{r})^{\theta_3}$, если $0 < \tilde{r} < \delta_3$.

Собирая все это вместе, получим

$$N[\beta] \leq \varepsilon^2 C'_3 + \varepsilon C''_3 \omega^{*\theta_3} - C'''_3(\tilde{r})^{\theta_3}. \quad (92)$$

Поэтому найдутся такие константы $C_3 > 0$ и $\varepsilon_3 > 0$, что при выборе

$$\tilde{r} = C_3 \varepsilon^{1/\theta_3} \quad (93)$$

сразу при всех $x \in [a, b]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ будет верным неравенство

$$N[\beta] < 0. \quad (94)$$

Точно так же получим оценку $N[\beta] < 0$ в окрестности $\Omega_1 = [\phi_1 - \delta_1, \phi_1 + \delta_1]$ нижнего корня ϕ_1 , причем β находится аналогично (83).

7.6. Проверка знакоопределенности оператора в средней части фронта. Пусть теперь $\Omega_2 = [\phi_1 + \delta_1, \phi_3 - \delta_3]$, из построения предыдущего раздела и условий гладкости f следует, что $\delta_{1,3} > 0$ можно выбрать константами (не зависящими от x^*). Из (65) следует, что найдется такое $d_2 > 0$, что внутри Ω_2 верны неравенства

$$\tilde{q} Q_{0\xi} \geq \tilde{q} d_2, \quad (95)$$

$$|f(v + \tilde{r}) - f(v)| \leq C_2 \tilde{r}. \quad (96)$$

Из (76) и из гладкости f следует также, что найдется такое $d' > 0$, что внутри Ω_2 верно неравенство $|x - x_\beta^*| \leq d' \varepsilon$, поэтому

$$\left| f(\phi_3(x) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x) - f(\phi_3(x_\beta^*) + Q_0(\xi_\beta, x_\beta^*), x_\beta^*) \right| \leq \varepsilon C. \quad (97)$$

Для $N[\beta]$ получим оценку

$$N[\beta] \leq \varepsilon^2 C'_2 - d_2 \tilde{q} + \varepsilon C''_2 + C'''_2 \tilde{r}, \quad (98)$$

поэтому найдется такое C_2 , что при выборе

$$\tilde{q} = C_2 \tilde{r} = \tilde{C}_2 \varepsilon^{1/\theta_3} \quad (99)$$

будет верно требуемое неравенство $N[\beta] < 0$. Наконец, заметим, что **У5** гарантирует непрерывность первой производной функции $\beta(x)$ в точке x^* . Мы показали, что (83) дает при указанном выборе параметров верхнее решение задачи (7).

7.7. Построение нижнего решения. Аналогично построим нижнее решение:

$$\alpha(x, t) = \phi_3(x) + Q_0(\xi_\alpha(x, t), x_\alpha^*(t)) - \tilde{r}, \quad (100)$$

$$x_\alpha^*(t) = x_\alpha^*(t_0) + \int_{t_0}^t (W_0(x_\alpha^*(t')) + \tilde{q}) dt', \quad \xi_\alpha(x, t) = (x - x_\alpha^*(t)) / \varepsilon \quad (101)$$

и покажем, что $N[\alpha] > 0$. Начальные условия выберем так, чтобы было выполнено условие стартовой упорядоченности: $x_\alpha^*(t_0) < x_\beta^*(t_0)$ (это для фронта положительной полярности: $Q_{0\xi} > 0$, иначе знак неравенства поменяем на противоположный). Упорядоченность пары (α, β) следует из условия $Q_{0\xi} > 0$, которое вытекает соответственно из условия $p(v, x) > 0$ при всех $x \in [a, b]$ и $v \in (\phi_1(x), \phi_3(x))$, которое следует из (65).

8. Результаты компьютерного моделирования

8.1. Перемещающаяся КС в однородной среде. Численный метод решения задачи (7) мы здесь формулировать не будем, все важные детали описаны в [23]. На рис.2, 3 показаны семейства графиков $u(x, t_m)$ решения эволюционного уравнения (7) в однородной среде, причем функция плотности источников f выбрана в соответствии с (4), (5) при заданных значениях $\theta_1=7/2$, $\theta_3=7/2$, а $p(u, x)$ построена в соответствии с (62), (33), (52).

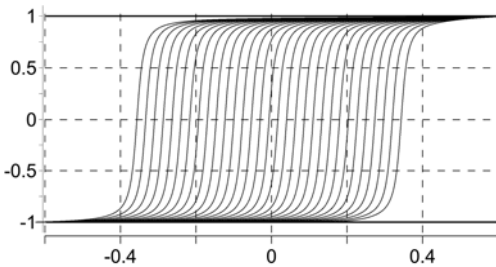


Рис.2. Семейство графиков $u(x, t_m)$ в однородной среде для $\theta_1=7/2$, $\theta_3=7/2$, $W = -0.2$, так что квазиволна бежит влево.

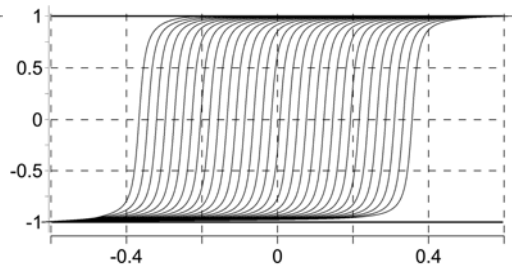


Рис.3. Семейство графиков $u(x, t_m)$ в однородной среде для $\theta_1=7/2$, $\theta_3=7/2$, $W = 0.2$, так что квазиволна бежит вправо.

На рис.2 скорость дрейфа ВПС отрицательна, поэтому передний участок ВПС (расположен слева) имеет экспоненциальный характер, задний участок ВПС (справа) имеет степенной характер. В соответствии с (59) показатель степени заднего участка равен $-1/(\theta_3 - 1) = -2/5$ и решение приближается к верхнему уровню насыщения по закону $u(x,t) = \phi_3 - C_3(x - Wt - x_3)^{-2/5}$, C_3 определяется аналитически формулой (59), x_3 определяется начальным положением ВПС. На рис.3 скорость дрейфа ВПС положительна, сравнение этих рисунков показывает, что степенной характер имеет опять задний участок ВПС (теперь он слева на рисунке).

8.2. Плотности источников для волн, бегущих влево и вправо. Функции плотности источников $f_1(u) = C'(u - \phi_1')^{\theta_1}(u - \phi_2')(u - \phi_3')^{\theta_3}$ для бегущих влево (верхняя кривая) и вправо $f_2(u) = C''(u - \phi_1'')(u - \phi_2'')(u - \phi_3'')^{\theta_3}$ (нижняя кривая) квазиволн для $\theta_1 = 7/2$, $\theta_3 = 7/2$ и $W = +0.2$ и $W = -0.2$ показаны на рис.4.

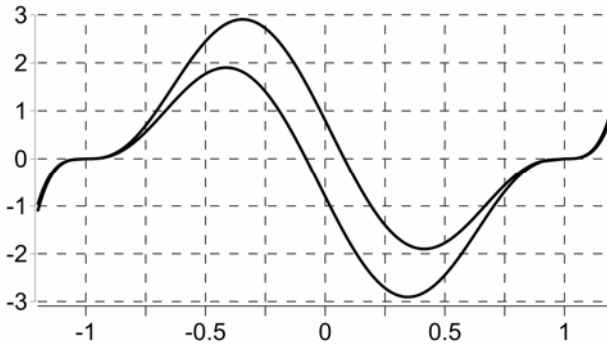


Рис.4. Функции плотности источников для квазиволн, бегущих влево (верхняя кривая) и вправо (нижняя кривая).

8.3. Перемещающаяся КС в неоднородной среде. На рис.5 показано семейство графиков решения эволюционного уравнения в неоднородной среде с $7/2$ -кратным вырождением крайних корней. Функция $\phi_1(x)$ убывающая, $\phi_3(x)$ возрастающая, скорость дрейфа для этой конфигурации, как показано в [23], складывается из скорости дрейфа дисбаланса и скорости градиентного дрейфа. Из рисунка видно, что в неоднородной среде сохраняется особенность задачи с дробным вырождением корней. Задний участок фронта приближается к стационарному значению (представленному теперь возрастающей функцией) по степенному закону, передняя часть отходит от стационарного уровня по экспоненциальному закону.

На рис.6 показано то же самое, но теперь наоборот функция $\phi_1(x)$ возрастающая, $\phi_3(x)$ убывающая, и та же особенность заднего участка фронта

очевидна. Таким образом, компьютерное моделирование подтверждает корректное аналитическое построение асимптотического ряда.

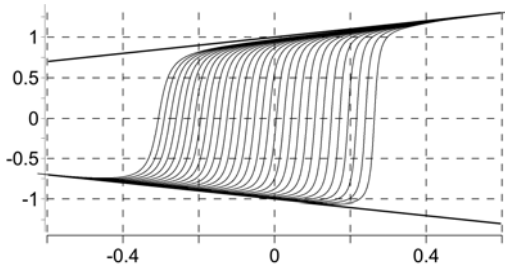


Рис.5. Графики бегущей влево квазиволны $u(x, t_m)$ для вырожденных с порядком $\theta_{1,3}=7/2$ крайних корней функции плотности источников в неоднородной среде. Представлен случай перемещения фронта в сторону уменьшения промежутка между крайними корнями функции плотности источников.

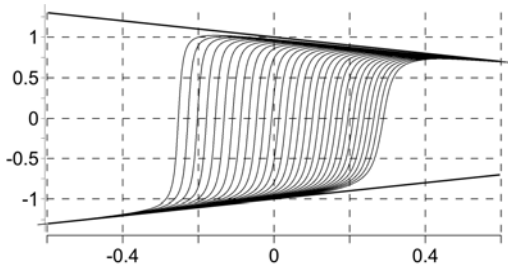


Рис.6. Графики бегущей влево квазиволны $u(x, t_m)$ для вырожденных с порядком $\theta_{1,3}=7/2$ крайних корней функции плотности источников в неоднородной среде. Представлен случай перемещения фронта в сторону увеличения промежутка между крайними корнями функции плотности источников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Быков, К.Е. Ермакова. Точные решения уравнений нестационарного фронта с точками равновесия дробного порядка // ЖВМиМФ, 2018, т.58, №12, с.1-14; англ. пер.: А.А. Bykov, K.E. Ermakova. Exact solutions of equations of a nonstationary front with equilibrium points of a fractional order // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2018, v.58, №12, p.1977-1988.
2. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикл. матем., 1998, т.4, № 3, с.799-851; А.В. Vasileva, V.F. Butuzov, N.N. Nefedov. Kontrastnye struktury v singuliarno vozmu-shchennykh zadachakh // Fundamentalnaia i prikl. matem., 1998, t.4, № 3, s.799-851.
3. V.F. Butuzov, A.B. Vasileva. Singularly Perturbed Problems with Boundary and Interior Layers: Theory and Application. – New York: John Wiley & Sons, 2007.
4. Э. Оран, Дж. Борис. Численное моделирование реагирующих потоков // Пер. с англ. – М.: Мир, 1990, 660 с.; E.S. Oran, J.P. Boris. Numerical simulation of reactive flows / Elsevier Sci. Publ., 1987.
5. В.Ф. Бутузов. О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения // ЖВМиМФ, 2011, т.51, №1, с.44–55; англ. пер. V.F. Butuzov. On periodic solutions to singularly perturbed parabolic problems in the case of multiple roots of the degenerate equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011, v.51, №1, p.40–50.
6. В.Ф. Бутузов. Об устойчивости и области притяжения стационарного решения син-

- гулярно возмущенной параболической задачи с кратным корнем вырожденного уравнения // Дифференциальные уравнения, 2015, т.51, №12, с.1593–1605;
англ. пер. *V.F. Butuzov*. On the stability and the attraction domain of the stationary solution of a singularly perturbed parabolic equation with a multiple root of the degenerate equation // *Differential Equations*, 2015, v. 51, № 12, p. 1569–1582.
7. *V.F. Butuzov*. On the dependence of the structure of boundary layers on the boundary conditions in a singularly perturbed boundary – value problem with multiple root of the related degenerate equation // *Mathematical Notes*, 2016, т.99, №2, с.36–47.
 8. *В.Ф. Бутузов*. Об одной сингулярно возмущённой задаче с кратным корнем вырожденного уравнения // *Вестник кибернетики*, 2017, т.1, № 25, с.18–34;
V.F. Butuzov. Ob odnoi singuliarno vozmushchennoi zadache s kratnym kornem vyrozhdennogo uravneniia // *Vestnik kibernetiki*, 2017, t.1, № 25, s.18–34.
 9. *В.Ф. Бутузов, Н.Н. Неведов, Л. Реке, К.Р. Шнайдер*. Асимптотика, устойчивость и область притяжения периодического решения сингулярно возмущенной параболической задачи с двукратным корнем вырожденного уравнения // *Моделирование и анализ информационных систем*, 2016, т. 23, № 3, с.247–257.
V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, L. Reke, K.R. Shnaider. Asimptotika, ustoichivost i oblast pritiazheniia periodicheskogo resheniia singuliarno vozmushchennoi parabolicheskoi zadachi s dvukratnym kornem vyrozhdennogo uravneniia // *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, 2016, t. 23, № 3, s.247–257.
 10. *В.Ф. Бутузов, А.И. Бычков*. Начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случаях двукратного и трёхкратного корня вырожденного уравнения // *Чебышевский сборник*, 2015, т.16, №4, с.41-76;
V.F. Butuzov, A.I. Bychkov. Nachalno-kraevaia zadacha dlia singuliarno vozmushchennogo parabolicheskogo uravneniia v sluchaiakh dvukratnogo i trekhkratnogo kornia vyrozhdennogo uravneniia // *Chebyshevskii sbornik*, 2015, t.16, №4, s.41-76;
 11. *V.F. Butuzov, A.I. Bychkov*. Asymptotics of the solution to an initial boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation in the case of a triple root of the degenerate equation // *Comp. Math. and Math. Physics*, 2016, v.56, № 4, p.593-611.
 12. *В.Ф. Бутузов, В.А. Белошапко*. Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения // *Моделирование и анализ информационных систем*, 2016, т.23, № 5, с.515–528;
V.F. Butuzov, V.A. Beloshapko. Singuliarno vozmushchennaia ellipticheskaiia zadacha Dirikhle s kratnym kornem vyrozhdennogo uravneniia // *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, 2016, t.23, № 5, s.515–528;
 13. *V.F. Butuzov*. On the stability and the attraction domain of the stationary solution of a singularly perturbed parabolic equation with a multiple root of the degenerate equation // *Differential Equations*, 2015, v.51, №12, p.1593–1605.
 14. *C.V. Pao*. Nonlinear parabolic and elliptic equations. – New York: Plenum, 1992.
 15. *Ю.В. Божевольнов, Н.Н. Неведов*. Движение фронта в параболической задаче реакция – диффузия // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2010, т.50, № 2, с.276-285;
англ. пер. *Yu.V. Bozhevol'nov, N.N. Nefedov*. Front motion in the parabolic reaction-diffusion problem // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, v.50, № 2, p.264–273.

16. А.Н. Тихонов. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб., 1948, т. 22(64), №2, с.193-204;
A.N. Tikhonov. O zavisimosti reshenii differentsialnykh uravnenii ot malogo parametra // Matem. sb., 1948, t. 22(64), №2, s.193-204;
17. С. Лефшец. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. – М.: ИИЛ, 1961, 388с.;
S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. – New York, Interscience Publishers, 1957, 390p.
18. Н.С. Бахвалов. Численные методы. – М.: Наука, 1975;
N.S. Bakhvalov. Numerical methods. – Nauka, Moscow, 1975.
19. А.Х. Найдфэ. Методы возмущений. – М.: Наука, 1974, 446с.;
A.H. Nayfeh. Perturbation Methods. – John Wiley, New York, 1973, 425 p.
20. Н.Н. Неведов. Нестационарные контрастные структуры в системе реакция – диффузия // Математическое моделирование, 1992, т.4, № 8, с.58-65;
N.N. Nefedov. Nestatsionarnye kontrastnye struktury v sisteme reaktsiia – diffuzia // Matematicheskoe modelirovanie, 1992, t.4, № 8, s.58-65.
21. А.А. Быков, А.С. Шарло. Нестационарные контрастные структуры в окрестности особой точки // Математическое моделирование, 2014, т.26, №8, с.107-125.
англ. пер. *A.A. Bykov, A.S. Sharlo. Nonstationary contrasting structures in the vicinity of a critical point // Math. Models and Comp. Simulations, 2015, v.7, № 2, p.165–178.*
22. А.А. Быков, Н.Н. Неведов, А.С. Шарло. Контрастные структуры для квазилинейного уравнения соболевского типа с несбалансированной нелинейностью // ЖВМиМФ, 2014, т.54, №8, с.1270-1280;
англ. пер. *A.A. Bykov, N.N. Nefedov, A.S. Sharlo. Contrast structures for a quasilinear Sobolev-type equation with unbalanced nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2014, v.54, № 8, p.1234–1243.*
23. А.А. Быков. Численное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с внутренним переходным слоем // МАИС, 2016, т.23, №3, с.259-282;
A.A. Bykov. Chislennoe reshenie nachalno-kraevoi zadachi dlia psevdoparabolicheskogo uravneniia s vnutrennim perekhodnym sloem // MAIS, 2016, t.23, №3, s.259-282;

Поступила в редакцию 10.12.2018

После доработки 10.12.2018

Принята к публикации 11.02.2019