

УДК 539.3:534.08

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСТРУКЦИИ
ПРИ УДАРНО-ВОЛНОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ (РАСЧЕТ, ЭКСПЕРИМЕНТ)**

© 2019 г. И. О. Глот^{а,*}, В. П. Матвеев^а, Р. В. Цветков^а,
И. Н. Шардаков^а, А. П. Шестаков^а

^а Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Пермь, Россия

*e-mail: glot@icmm.ru

Поступила в редакцию 15.11.2018 г.

После доработки 15.11.2018 г.

Принята к публикации 19.11.2018 г.

Статья посвящена экспериментально-теоретическому исследованию деформационных процессов в железобетонной конструкции, представляющей собой фрагмент сборно-монолитного здания в масштабе 1:2. Анализируется распространение упругих волн, вызванных ударным воздействием на различные части конструкции. Приводятся результаты численного моделирования распространения упругой волны по элементам конструкции. На основе данных математического моделирования разработаны схемы экспериментального исследования конструкции, выбраны параметры силового воздействия и характеристики аппаратуры, регистрирующей деформационный отклик. Приводятся данные физического эксперимента по ударно-волновому воздействию на конструкцию в режиме упругого деформирования.

Ключевые слова: железобетон, полномасштабная модель здания, упругость, деформация, ударно-волновое воздействие, вибрационная диагностика, математическое моделирование, эксперимент

DOI: 10.1134/S0572329919020053

1. Введение. Исследование поведения элементов строительных конструкций в условиях критического состояния имеет первостепенное значение при решении задач их безопасной эксплуатации. Недооценка решения этих задач приводит к гигантским материальным потерям и человеческим жертвам. Одним из современных подходов, позволяющих решать эти задачи, является использование методов вибрационной диагностики конструкций [1–3]. Исследование состояния отдельных элементов строительных конструкций с помощью анализа колебаний, возникающих в них в результате импульсного воздействия, применяется достаточно широко [4–8]. Однако до сих пор остается недостаточно изученным как с точки зрения фундаментальной, так и прикладной науки вопрос о закономерностях деформационного поведения ансамбля элементов строительной или инженерной конструкции, передающего не только свойства отдельных элементов, но и многообразие механизмов их взаимодействия. Особенно важными становятся эти вопросы в условиях перехода конструкции к предкритическому и критическому состоянию. В последнее время наблюдается рост интереса к исследованиям крупномасштабных конструкций. Проводятся эксперименты с макетами многоэтажных зданий в условиях сейсмической нагрузки, фрагментами мостовых сооружений, мачт и опор линий электропередач и д.п. [9–15]. В работе [16] описывается

исследование поведения плитного железобетонного фундамента и каркаса здания на крупномасштабном лабораторном стенде, в работе [17] описаны результаты испытаний натурного фрагмента сборно-монолитного каркасного сооружения, состоящего из двух типичных ячеек конструкции.

Изучение пространственно-временного распределения деформационного отклика несущих элементов конструкции на возникновение критического состояния в отдельных ее частях является актуальной задачей. При этом особый интерес представляют решение указанных задач с привязкой к реальным масштабам исследуемых объектов. В работе [18] представлен экспериментальный стенд, разработанный и созданный в Институте механики сплошных сред УрО РАН (г. Пермь) для исследования деформационных процессов в крупномасштабных конструкциях. Стенд предназначен для испытания железобетонных конструкций в различных режимах, от упругого деформирования до полного разрушения. Настоящая статья посвящена экспериментально-теоретическому исследованию, проведенному с использованием данного стенда. Изучались деформационные процессы в железобетонной конструкции, представляющей собой фрагмент сборно-монолитного здания, включающий 24 типовых ячейки, объединенные в 4 этажа. Конструкция является моделью здания в масштабе 1:2 и имеет габаритные размеры: высота 6 м, длина 6 м, ширина 4 м. Такой пространственный масштаб исследуемого объекта позволяет получить достоверные результаты о закономерностях пространственно-временного распределения деформационных процессов, соответствующих реальным сооружениям.

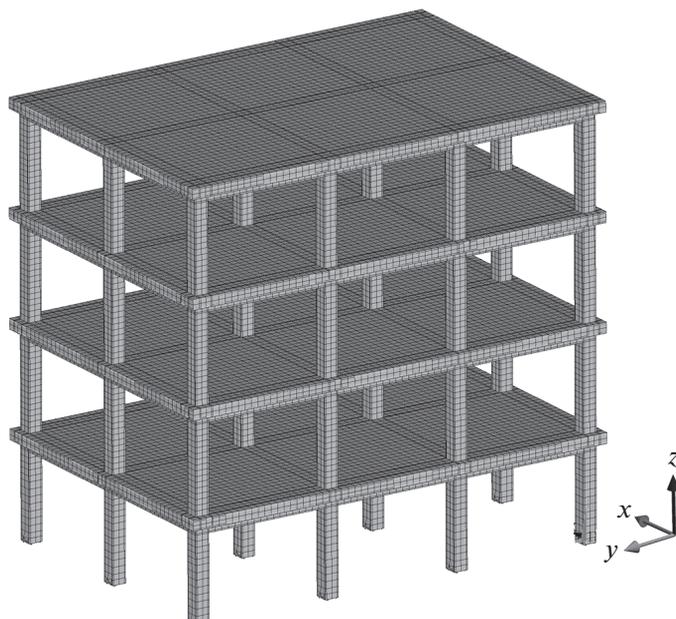
2. Математическое моделирование ударно-вибрационных процессов в модельной железобетонной конструкции. Информация об исходных свойствах неповрежденной модельной конструкции может быть получена из экспериментов на ударное воздействие в шадающем режиме. Этот режим предполагает, что возникающие при внешних воздействиях деформационные процессы не вызывают необратимых деформаций конструкции. Для обеспечения экспериментальной реализации этого режима было осуществлено математическое моделирование динамического деформационного отклика элементов конструкции на ударное локализованное внешнее воздействие.

Для математической постановки этой задачи использовался принцип возможных перемещений [19], в котором учитывается вариация работы внутренних напряжений, поверхностных сил и сил инерции:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_\sigma} f_i \delta u_i dS - \int_V \rho \ddot{u}_i \delta U_i dV \quad (2.1)$$

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} – соответственно, компоненты тензора упругих напряжений и деформаций, u_i – компоненты вектора перемещений, \ddot{u}_i – компоненты вектора ускорения, f_i – компоненты вектора поверхностных сил, ρ – плотность, V – объем, S_σ – поверхность, на которую действуют компоненты вектора поверхностных сил.

Численное решение вариационного уравнения (2.1) осуществлялось методом конечных элементов с использованием программного комплекса ANSYS. Для построения конечно-элементных образов элементов конструкции использовались конечные элементы с квадратичной аппроксимацией компонент вектора перемещения. Структуры конечно-элементных сеток формировались неоднородными с целью наилучшей аппроксимации численного решения в областях, где напряженно-деформированное состояние модельной конструкции может иметь большие градиенты. Конечно-элементный образ конструкции показан на фиг. 1. Сходимость и достоверность получае-



Фиг. 1

мых решений оценивалась по величинам норм выполнения естественных краевых условий, а также по характеру сходимости численных решений в зависимости от степени дискретизации рассматриваемых областей на конечные элементы.

Физико-механические свойства материалов, использованных в конструкции: бетон – плотность 2300 кг/м^3 , модуль упругости $30 \times 10^9 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона 0.2; сталь – плотность 7800 кг/м^3 , модуль упругости $2 \times 10^{11} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона 0.3.

При использовании метода конечных элементов конечномерный алгебраический аналог вариационного уравнения (2.1) относительно узловых неизвестных имеет вид

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

где \mathbf{M} – матрица масс; $\mathbf{U}(t)$ – вектор узловых неизвестных как функция времени t , $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ – вектор узловых ускорений; $\mathbf{F}(t)$ – заданный вектор внешних узловых сил, определяющий величину, место и продолжительность механического импульсного нагружения.

Начальные условия в этой задаче принимались однородными.

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2) осуществлялось двумя подходами. Первый подход – непосредственное численное решение всей системы (2.2). Второй подход предполагает разложение искомого решения по собственным функциям, получаемым из решения алгебраической задачи на собственные значения

$$[\mathbf{K} - p^2 \mathbf{M}] \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.3)$$

где p – искомое собственное значение (собственная частота колебаний); \mathbf{V} – собственный вектор амплитудных значений узловых перемещений (собственная форма колебаний).

Из решения уравнения (2.3) определяются собственные функции \mathbf{V}_n , соответствующие собственным значениям p_n , где $n = 1, 2, 3, \dots$, а $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots$ и т.д. Далее искомое решение системы (2.2) представлялось в виде

$$\mathbf{U}(t) = \sum \varphi_n(t) \mathbf{V}_n \quad (2.4)$$

где $\varphi_n(t)$ – искомые функции времени, которые определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\varphi_n + p_n^2 \cdot \varphi_n = a_n \Phi_n(t) \quad (2.5)$$

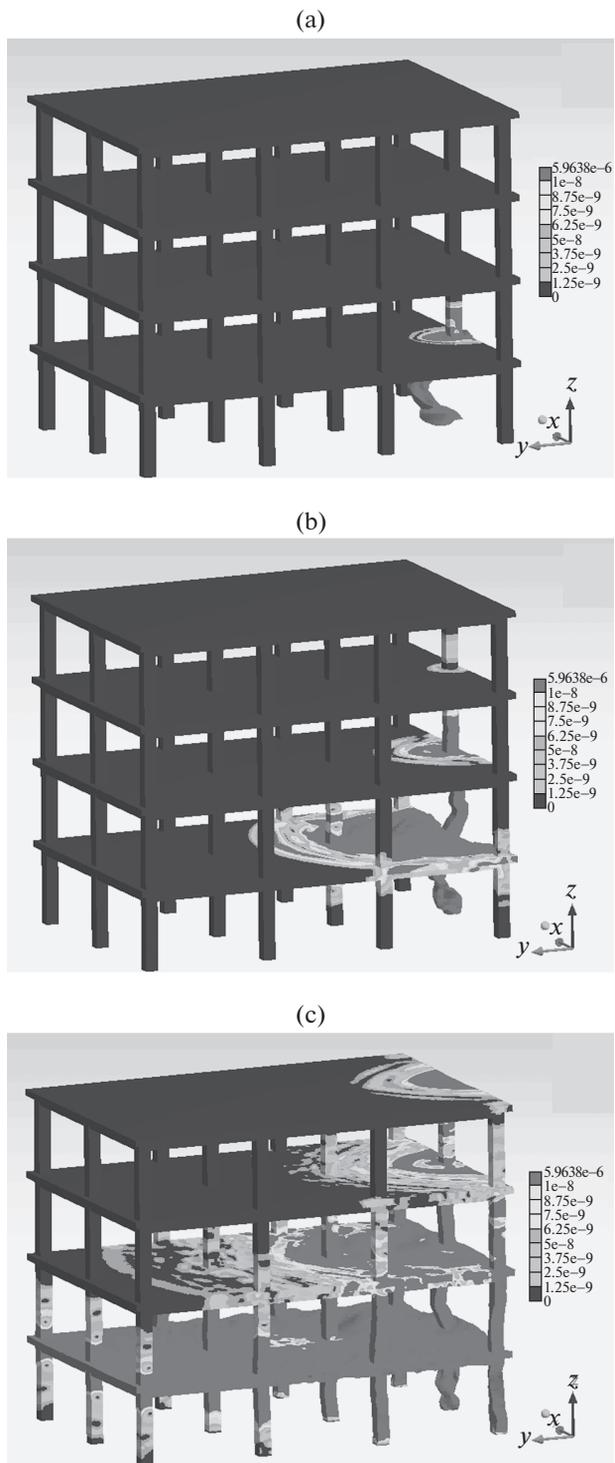
Здесь a_n – коэффициент разложения искомого решения $\mathbf{U}(t)$ в ряд по собственным функциям \mathbf{V}_n , $\Phi_n(t)$ – временная функция, полученная после разложения вектора внешних сил $\mathbf{F}(t)$ по собственным векторам \mathbf{V}_n . В рассматриваемых задачах эта сила локализована до геометрического масштаба конечного элемента.

У каждого из представленных подходов имеются свои достоинства и недостатки. Достоинством первого подхода, непосредственного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2), является возможность достаточно точно описать пространственно-временное развитие деформационного процесса в конструкции в начальный период после приложения нагрузки. Недостатком этого подхода является необходимость высокой степени дискретизации конструкции на конечные элементы и, как следствие, необходимость решения системы дифференциальных уравнений высокого порядка, что требует больших вычислительных ресурсов, значительно превосходящих возможности традиционных персональных компьютеров.

Достоинством второго подхода, предполагающего разложение искомого решения в виде отрезка ряда по собственным формам колебаний (2.4), является возможность достаточно хорошо описать пространственно-временное развитие деформационного процесса в конструкции в период установившихся свободных колебаний. Следует отметить, что численная реализация такого подхода уже не требует столь значительных вычислительных ресурсов, как в первом подходе, и может быть выполнена на традиционных персональных компьютерах. Недостатком этого подхода является недостаточно качественное описание начального периода распространения возмущений по элементам конструкции. Кроме того недостатком является необходимость установления достаточного числа собственных форм в разложении на основе численного эксперимента.

3. Результаты моделирования и выводы. В рамках представленных численных алгоритмов решения задач о динамических деформационных процессах в элементах пространственной железобетонной конструкции проведен масштабный численный эксперимент. Его результаты позволили получить пространственно-временное распределение деформационных и кинематических параметров в элементах конструкции. В частности, из полученных решений были определены виброграммы механических величин (перемещений, скоростей, ускорений) в местах расположения вибродатчиков, которые намечены для использования в физическом эксперименте. Полученные виброграммы обрабатывались с помощью Фурье- и вейвлет-преобразований. Анализ полученных решений и результатов их обработки позволил оценить следующие характеристики волнового деформационного процесса:

– найти распределение собственных частот на числовой оси;



Фиг. 2

– оценить изменения пространственно-временного распределения деформаций по элементам модельной конструкции в зависимости от продолжительности импульсного силового воздействия, его формы, направления и места приложения;

– определить конфигурацию фронта волны перемещений (или другого критерия деформации) в различные моменты времени после начала действия импульса внешних сил;

– определить пространственное распределение амплитудных значений удельной потенциальной энергии деформирования по элементам конструкции при установившемся режиме свободных колебаний, а также оценить места локализации максимумов удельной потенциальной энергии, определить формы свободных колебаний, которые в этом распределении являются доминирующими.

На фиг. 2 представлен пример моделирования распространения по элементам конструкции фронта волны перемещений, вызванной внешним локализованным силовым воздействием. Силовой импульс приложен в нижней части одной из колонн модельной конструкции с помощью ударника массой 400 г, воздействующего в направлении нормали к поверхности колонны. Рисунок демонстрирует положения фронта волны перемещений (на шкале представлены значения перемещений в м), соответствующие трем последовательным моментам времени: 0.36 мс (а), 1.1 мс (b) и 2.4 мс (с) от момента удара. На рисунке хорошо видно распространение упругой волны в пределах одного этажа модельной конструкции и запаздывающее перетекание ее на соседние этажи с дальнейшим распространением в плоскости очередного этажа.

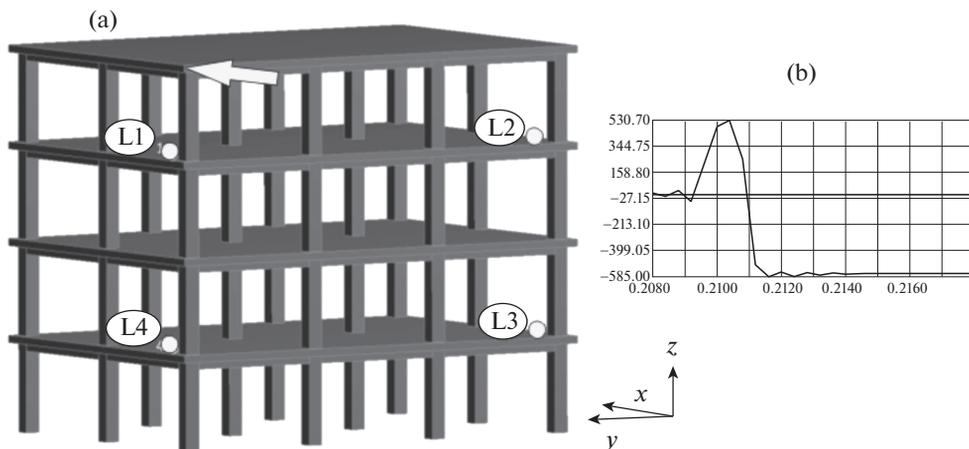
Анализ полученных результатов моделирования позволил конкретизировать режимы физических экспериментов по регистрации отклика модельной железобетонной конструкции на ударно-вибрационное нагружение в шадящем режиме. Были оценены такие характеристики внешнего силового воздействия как длительность импульса, место приложения импульса, направление воздействия. Также были определены типы датчиков, способных зарегистрировать отклик на такое воздействие в низкочастотном (от 0.5 до 400 Гц) и высокочастотном (до 10 кГц) диапазонах.

4. Экспериментальное исследование динамического нагружения модельной конструкции. В соответствии с результатами математического моделирования был осуществлен эксперимент по регистрации прохождения упругих волн по элементам модельной железобетонной конструкции. Эксперимент состоял в ударном воздействии на конструкцию в шадящем режиме и регистрации с помощью акселерометров отклика в различных ее элементах. Таким образом, на основании данных с локально размещенных датчиков оценивался характер распространения упругих волн по конструкции в целом.

В соответствии с результатами численного моделирования и частотными диапазонами регистрирующей аппаратуры все эксперименты были разделены на две серии. В первой серии регистрировался отклик конструкции в низкочастотном диапазоне (до 400 Гц) с помощью четырех высокочувствительных трехкомпонентных акселерометров. Во второй серии экспериментов для регистрации отклика в высокочастотном диапазоне (до 10 кГц) использовались семь однокомпонентных акселерометров.

Эксперимент 1 – импульсное нагружение модельной конструкции с регистрацией отклика в низкочастотном диапазоне.

Для регистрации распространения вибрационного отклика по элементам модельной конструкции было выполнено 3 серии экспериментов, для каждого из которых была реализована своя конфигурация расположения датчиков. В каждой серии экспериментов было последовательно выполнено несколько импульсных воздействий, от-



Фиг. 3

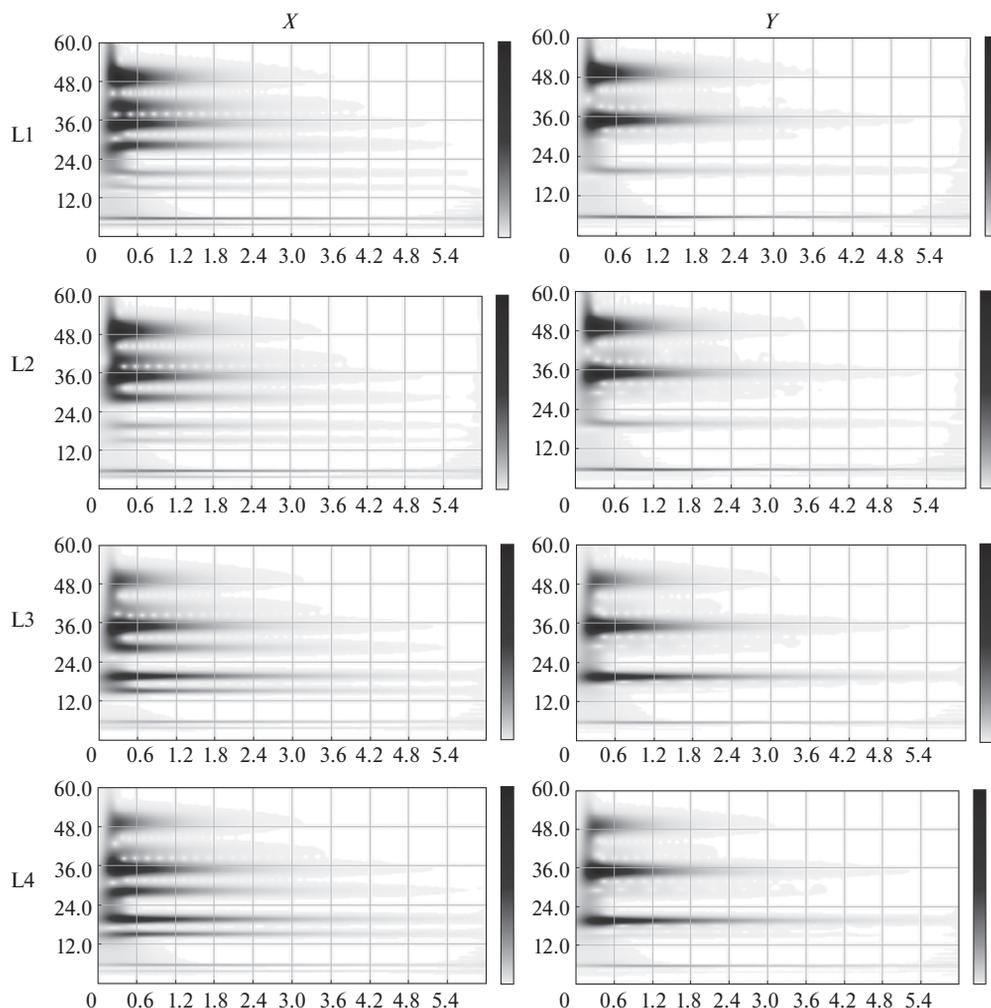
личающихся местом приложения и направлением импульса. Импульсное воздействие выполнялось с помощью оснащенного акселерометром металлического ударника, позволяющего регулировать величину импульса и регистрировать его длительность. Компоненты виброускорений в низкочастотном диапазоне регистрировались многоканальной сейсмостанцией с четырьмя трехкомпонентными сейсмоприемниками. Параметры регистрации: частотный диапазон 0.3–400 Гц, амплитудный диапазон 5×10^{-5} –10 m/s^2 , частота дискретизации регистрируемого сигнала 2500 Гц.

На фиг. 3а изображена схема одной из экспериментальных серий: ударное воздействие на модельную конструкцию в угловой точке верхнего этажа (место приложения и направление нагрузки показано стрелкой) и регистрация отклика четырьмя трехкомпонентными акселерометрами L1–L4, расположенными попарно на двух колоннах первого и третьего этажей. Зависимость ускорения (m/s^2) ударника в точке контакта с конструкцией от времени (сек) показана на фиг. 3б. Длительность импульса составляет ~ 2 мс. Были получены виброграммы компонент ускорений в направлении X и Y и выполнено вейвлет-преобразование для них. Фигура 4 представляет для каждого из датчиков L1–L4 вейвлет-образы виброграмм ускорений в направлениях X и Y. На рисунках по вертикальной оси представлена частота в Гц, по горизонтальной оси – время в секундах.

Полученные результаты наглядно демонстрируют частотный спектр колебаний, возбуждаемых в элементах модельной конструкции. Вейвлет-образы показывают интенсивность и “продолжительность жизни” деформационного отклика в различных точках конструкции. Из представленных рисунков следует, что наиболее устойчивые моды, возникающие в результате воздействия импульса длительностью 2 мс, имеют частоту ~ 6 Гц.

Эксперимент 2 – импульсное нагружение конструкции с регистрацией отклика в высокочастотном диапазоне (до 10 кГц).

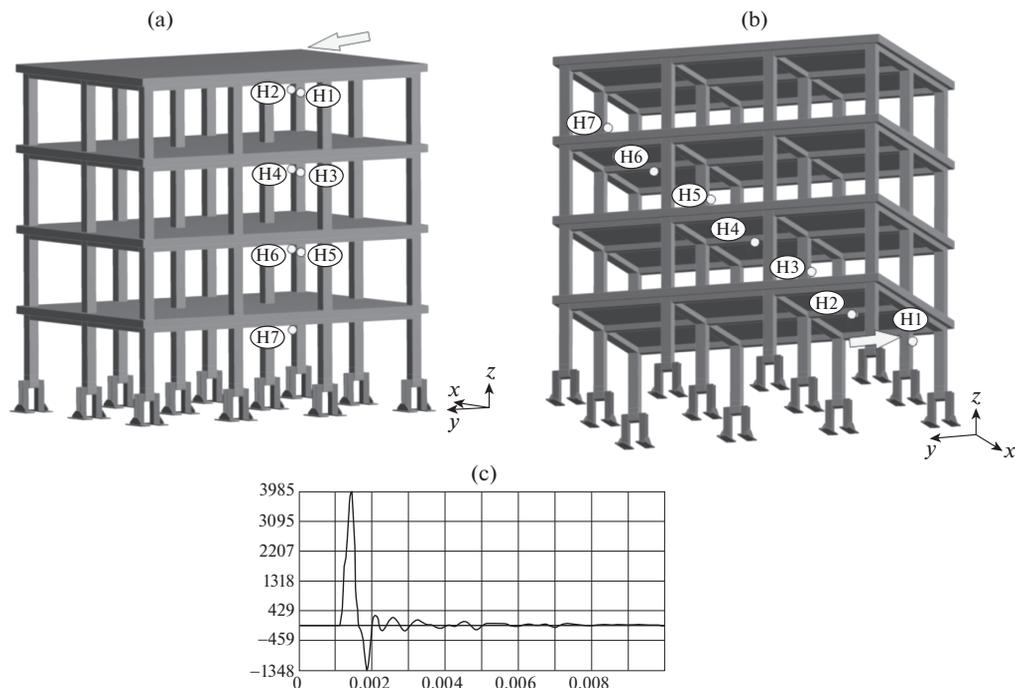
На фиг. 5а представлена схема одного из экспериментов этой серии. Упругие волны в конструкции возбуждались с помощью ударника массой 400 г, действующего в направлении нормали к поверхности в верхней части угловой колонны (стрелка). Временная развертка ускорения в точке удара представлена на фиг. 5с (ускорение в m/s^2 ,



Фиг. 4

время в с). Длительность импульса составляет ~ 0.5 мс. Для регистрации компонент виброускорений использовался 8-канальный анализатор спектра с однокомпонентными акселерометрами. На конструкции располагались 7 однокомпонентных датчиков Н1–Н7 (частотный диапазон 0.5–10000 Гц), а на ударнике – 1 однокомпонентный датчик (частотный диапазон 1–15000 Гц). Все датчики регистрировали компоненту ускорения нормальную по отношению к поверхности закрепления. Максимальная регистрируемая амплитуда ускорений составляет 500 g, частота дискретизации регистратора – 50 кГц.

Фигура 6 демонстрирует развитие вибрационного процесса на начальном этапе колебаний конструкции. Графики показывают изменение ускорения (м/с^2) в зависимости от времени (мс) в точках расположения датчиков Н1–Н7. Штриховыми линиями представлены виброграммы, зарегистрированные в эксперименте, сплошные линии



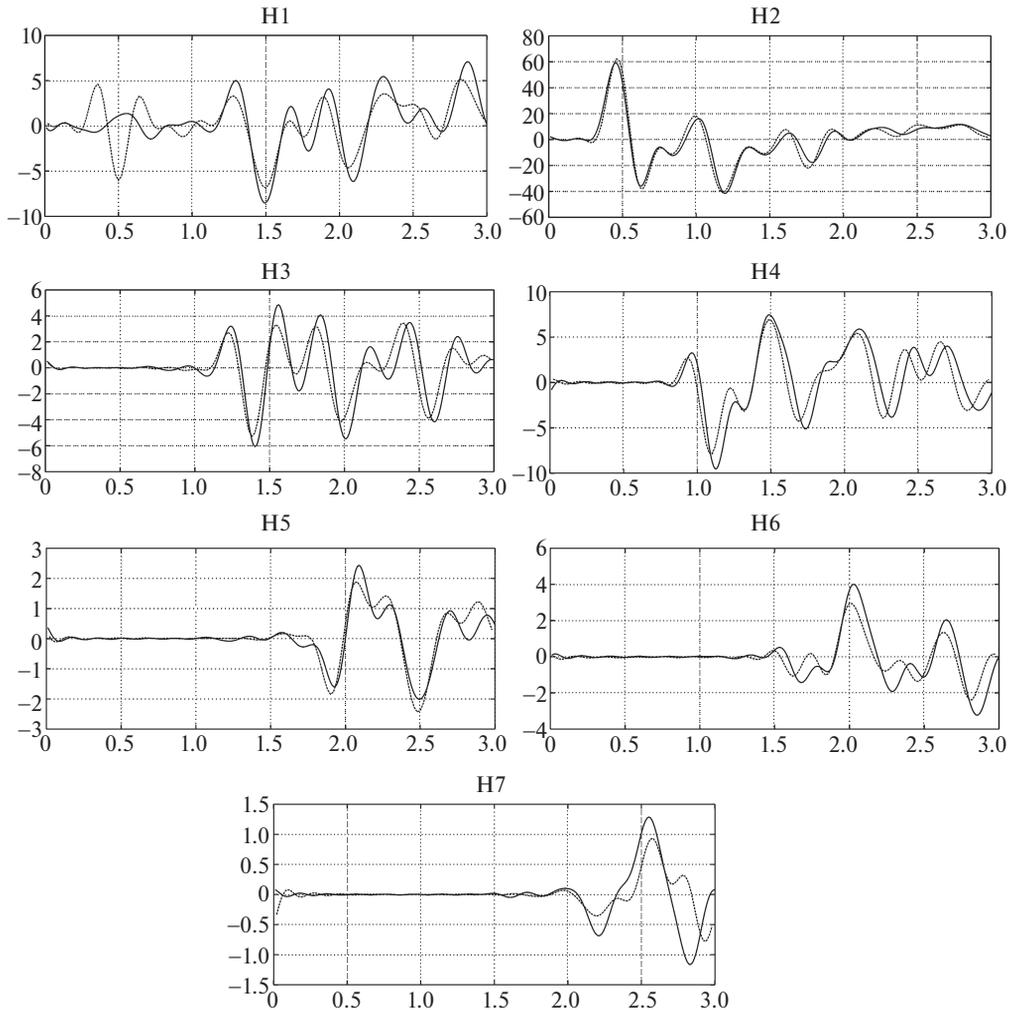
Фиг. 5

соответствуют результатам моделирования. Датчики правой колонки (Н2, Н4, Н6, Н7) регистрируют компоненты ускорений в направлении, совпадающем с направлением удара, датчики левой колонки (Н1, Н3, Н5) – в ортогональном направлении. Приведенные результаты свидетельствуют о хорошем согласовании результатов моделирования и эксперимента.

Представленная последовательность виброграмм позволяет проследить продвижение фронта волны виброускорений от датчика Н1, находящегося рядом с местом удара, к датчику Н7, наиболее удаленному от него. На виброграммах четко прослеживается сдвиг момента начала колебаний вправо по временной шкале по мере удаления датчиков от ударника. Следует отметить, что для импульса внешней силы длительностью 0.5 мс не удалось зарегистрировать распространение сигнала с помощью низкочастотных датчиков, использованных в первой серии экспериментов.

Сопоставление фрагментов этого рисунка позволяет сделать ряд заключений о характере распространения фронтов волны различных компонент виброускорения. Фронт волны для компоненты ускорения, совпадающей с направлением ударного импульса, распространяется несколько медленнее, чем фронт волны для ортогональной компоненты. С другой стороны, скорость затухания амплитудных значений на фронте волны выше у компоненты, совпадающей по направлению ударным импульсом.

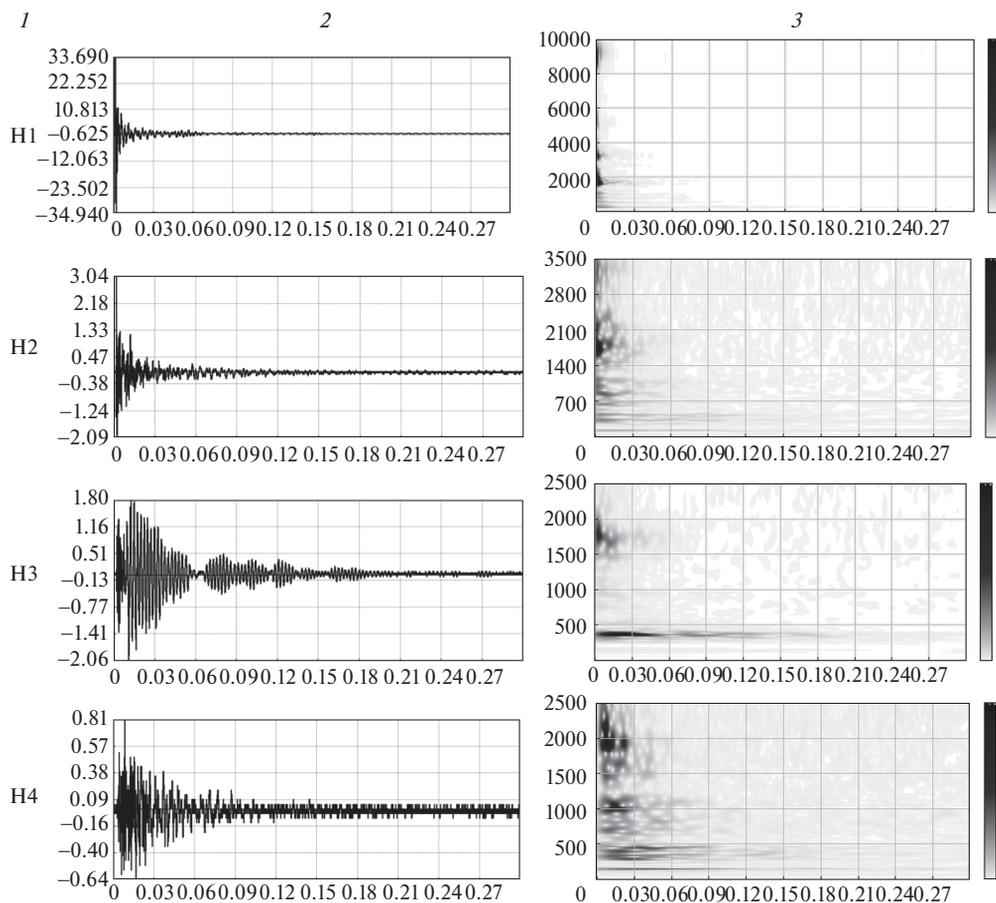
На фиг. 5b представлена схема эксперимента по регистрации колебаний в конструкции при ударе по нижней части центральной колонны (место и направление удара показано стрелкой). Форма импульса показана на фиг. 5c, длительность импульса ~ 0.5 мс. Регистрация отклика производилась семью однокомпонентными датчиками-



Фиг. 6

акселерометрами, размещенными на колоннах (датчики Н1, Н3, Н5, Н7) и плитах перекрытий (датчики Н2, Н4, Н6) на трех этажах конструкции.

На фиг. 7 для каждого из семи датчиков Н1–Н7 в столбце 2 приведены виброграммы ускорений (м/с^2) и в столбце 3 соответствующие им вейвлет-образы (частота в Гц); время на графиках дано в секундах. Анализ полученных вейвлет-образов свидетельствует, что частотные спектры колебаний, возбуждаемых заданным импульсом, для колонн и плит перекрытий значительно отличаются. Для всех колонн (датчики Н1, Н3, Н5, Н7) частотные спектры однотипны и более локализованы по сравнению со спектрами плит. Доминирующими и наиболее долгоживущими колебаниями для колонн являются моды с частотами ~ 400 Гц. Для плит (датчики Н2, Н4, Н6) доминируют колебания с частотой ~ 200 Гц. Следует также отметить, что изменения формы колебаний на начальном участке виброграмм при переходе от первого датчика к

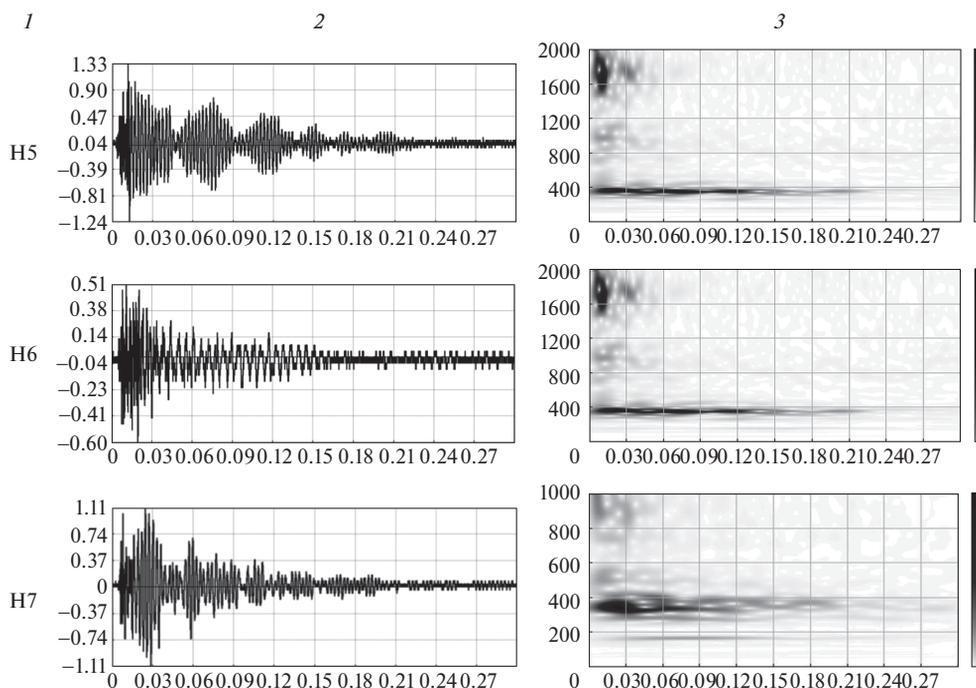


Фиг. 7

последнему свидетельствуют о проявлении дисперсионных свойств в колебательной системе.

5. Заключение. Построена математическая модель вибрационных процессов в крупномасштабной железобетонной конструкции, вызванных импульсной ударной нагрузкой. Получены картины распространения упругих волн по элементам конструкции при воздействии силового импульса различной интенсивности и локализации. На основе численных экспериментов с этой моделью были определены параметры физического эксперимента по регистрации процессов распространения упругих волн по конструкции.

Проведенные вибрационные испытания модельной железобетонной конструкции позволили получить информацию о ее деформационных свойствах. Они были использованы для верификации построенной математической модели. Зарегистрированный массив деформационных свойств конструкции может расцениваться как портрет состояния конструкции в начальный момент ее жизненного цикла. В ходе последующих исследований планируется сравнить с ним информацию о текущем состоянии конструкции. В частности, такое сопоставление необходимо для выявления накапливаю-



Фиг. 7. Окончание

щихся необратимых деформаций, возникающих в процессе нагружения конструкции. Информация о начальном состоянии модельной конструкции будет являться основой для создания ее “электронного паспорта”, который будет сохранять данные об изменениях свойств конструкции по мере выполнения запланированных долгосрочных экспериментов по разнообразному нагружению конструкции вплоть до ее полного разрушения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-29-00172).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sanjeev Kumar Verma, Sudhir Singh Bhadauria, Saleem Akhtar*. Review of nondestructive testing methods for condition monitoring of concrete structures // *J. Constr. Eng.* V. 2013. ID 834572.
2. *Monitoring and Safety Evaluation of Existing Concrete Structures*. *Fib Bulletin* № 22. 2003. 290 p.
3. *Clarence W. de Silva*. *Vibration Monitoring, Testing and Instrumentation*. CRC Press, 2007. 484 p.
4. *Lyapin A., Shatilov Y.* Vibration-based damage detection of the reinforced concrete column // *Proc. Eng.* 2016. V. 150. P. 1867–1871.
5. *Егорочкина И.О., Шляхова Е.А., Черпаков А.В., Манвелян Л.А., Кучеренко Д.Ю.* Алгоритм выполнения ремонтных работ по восстановлению стоек опор ЛЭП // *Инж. вестн. Дона*. 2016. № 4.
6. *Черпаков А.В., Есинов Ю.В., Гончаров О.Ю., Гриценко В.В., Зотов А.И.* Построение критерия идентификации поврежденности на основе фазовых портретов колебаний ферменных конструкций // *Инж. вестн. Дона*. 2015. № 4.
7. *Быков А.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н., Шестаков А.П.* Ударно-волновой метод контроля процесса устранения трещин в железобетонных конструкциях // *Изв. РАН. МТТ*. 2017. № 4. С. 35–41.

8. *Shardakov I.N., Shestakov A.P., Glot I.O., Bykov A.A.* Process of cracking in reinforced concrete beams (simulation and experiment) // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2016. V. 10. № 38. P. 349–360.
9. *Dilena M., Morassi A.* Dynamic testing of a damaged bridge // *Mech. Systems and Signal Processing*. 2011. V. 25. № 5. P. 1485–1507.
10. *Румянцев А.А., Сергеевцев Е.Ю.* Натурные исследования динамических характеристик частично возведенного здания универсального бассейна в г. Анапе // *Вестн. МГСУ*. 2012. № 5. С. 93–97.
11. *Шаблинский Г.Э., Зубков Д.А.* Натурные динамические исследования строительных конструкций. Изд-во Асс. строит. вузов, 2009. 216 с.
12. *Negro P., Bournas D., Molina F.J.* Pseudodynamic tests on a full-scale 3-storey precast concrete building: Global response // *Eng. Struct.* 2013. V. 57. P. 594–608.
13. *Ding Y., Wu M., Xu L.-Y., Zhu H.-T., Li Z.X.* Seismic damage evolution of steel–concrete hybrid space-frame structures // *Eng. Struct.* 2016. V. 119. P. 1–12.
14. *Демидкин С.В., Савков С.* Центр комплексно-сейсмических испытаний: современное состояние и перспективы развития // *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. 2015. № 5.
15. *Araki H., Kabayama K.* Seismic performance of full scale reinforced concrete columns containing coal ash // *13th World Conf. on Earthquake Engineering*. Vancouver, Canada, 2004. P. 15.
16. *Кухта А.В.* Экспериментальные стенды “Конструктор”, “Плита” и “Створ” для решения задач строительного мониторинга: особенности, возможности, проблемы // *Мониторинг. Наука и безопасность*. 2013. № 1. С. 46–59.
17. *Карякин А.А., Сонин С.А., Попп П.В., Алилуев М.В.* Испытание натурального фрагмента сборно-монолитного каркаса системы Аркос с плоскими перекрытиями // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Строительство и архитектура*. 2009. № 35(168). С. 16–20.
18. *Шардаков И.Н., Шестаков А.П., Гусев Г.Н., Бартоломей М.Л., Кашеварова Г.Г., Цветков Р.В., Глот И.О.* Экспериментальный стенд для исследования особенностей предкритических и критических деформационных процессов в железобетонных конструкциях (математическое моделирование, структурная схема) // *Int. J. Computational Civil and Struct. Eng.* 2016. V. 12. № 4. P. 163–175.
19. *Новацкий Витольд.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.