

УДК 629.78

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
РАЗВОРОТА ПРОИЗВОЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

© 2019 г. А. В. Молоденков^{а,*}, Я. Г. Сапунков^а

^а *Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

**e-mail: molalexei@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.03.2017 г.

После доработки 10.03.2017 г.

Принята к публикации 25.06.2018 г.

В кватернионной постановке рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат и фиксированном времени разворота твердого тела произвольной динамической конфигурации без ограничения на функцию управления при произвольных граничных условиях. В классе обобщенных конических движений произведена модификация задачи оптимального разворота, которая позволила получить ее аналитическое решение. Аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение традиционной задачи оптимального разворота. Дается алгоритм квазиоптимального разворота твердого тела. Приводятся числовые примеры, показывающие, что решение модифицированной задачи хорошо аппроксимирует решение традиционной задачи оптимального разворота твердого тела. Кроме того, примеры показывают, что кинематические характеристики оптимального движения в традиционной задаче (кватернион поворота и вектор угловой скорости) слабо зависят от динамической конфигурации твердого тела и, в основном, определяются граничными условиями задачи (во всяком случае, при величинах $|\varphi| \leq \pi/2$, где φ – угол эйлера поворота твердого тела). Слабая зависимость кинематических характеристик оптимального движения твердого тела от его динамической конфигурации обеспечивает близость решений модифицированной и традиционной задач оптимального разворота тела при произвольной динамической конфигурации.

Ключевые слова: твердое тело, оптимальный разворот, квазиоптимальное решение, обобщенное коническое движение, произвольные граничные условия, космический аппарат

DOI: 10.1134/S0572329919020090

1. Введение. Построение управления пространственной переориентацией твердого тела в традиционной постановке включает задачи программного углового движения (разворота), программного управления и поиска управления, стабилизирующего программу углового движения в малом. Задача расчета программного углового движения и реализующего его управления во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления. Аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости твердого тела не найдено даже в случае сферической симметрии тела, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи (например,

[1–8]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем, аналитическое решение задачи оптимального разворота твердого тела в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту космического аппарата (КА) готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В настоящей статье (разд. 2–4) в традиционной постановке рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергозатрат и фиксированном времени разворота твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости тела без ограничения на функцию управления. С применением кватернионов на основании принципа максимума Л.С. Понтрягина получены выражения для структуры оптимального управления, функции Гамильтона–Понтрягина и сопряженной системы уравнений для исходной задачи. В разд. 5, 6 статьи представлено аналитическое решение модифицированной задачи оптимального по энергии разворота твердого тела при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости тела, доведенное до алгоритма. В классе обобщенных конических движений произведена модификация классической задачи оптимального разворота, которая позволила получить аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача с квадратичным функционалом, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Найденное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение классической задачи оптимального разворота твердого тела при произвольных граничных условиях. Получены явные выражения для вектора угловой скорости, управляющего момента и траектории движения твердого тела. Вектор управляющего момента получается из вектора угловой скорости на основе решения обратной задачи динамики твердого тела.

Следует отметить, что для случаев аналитической разрешимости традиционной задачи оптимального разворота при сферической симметрии твердого тела, когда наложены ограничения на краевые условия задачи, – плоский эйлеров разворот, коническое движение – решения традиционной и модифицированной задач полностью совпадают. В разд. 7 приводятся краткое описание процедуры численного решения традиционной задачи, ранее полученного в [9] и численные примеры, показывающие близость решений традиционной и модифицированной задач оптимального разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях. Кроме того, примеры показывают, что кинематические характеристики оптимального движения в традиционной задаче (кватернион поворота и вектор угловой скорости) слабо зависят от динамической конфигурации твердого тела и, в основном, определяются граничными условиями задачи.

Отметим, что среди примеров рассматриваются развороты Международной космической станции (МКС) и КА “Спейс Шаттл”.

Статья продолжает исследования, начатые в [10, 11].

2. Постановка традиционной задачи. Движение твердого тела произвольной динамической конфигурации вокруг центра масс описывается уравнениями [2]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega \quad (2.1)$$

$$\dot{\omega} = \Gamma^{-1}M - \Gamma^{-1}[\omega, I\omega] \quad (2.2)$$

где $\mathbf{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ – кватернион поворота твердого тела, $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ – вектор угловой скорости, $\mathbf{M}(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T$ – вектор внешнего момента, действующего на твердое тело, матрица

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

– тензор инерции. Фазовые координаты $\mathbf{\Lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$ и управление \mathbf{M} удовлетворяют требованиям задачи оптимального управления [12] ($\mathbf{\Lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t)$ – непрерывные функции, $\mathbf{M}(t)$ – кусочно-непрерывная функция); кватернион $\mathbf{\Lambda}(t)$ нормирован, т.е. $\|\mathbf{\Lambda}\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$; i_1, i_2, i_3 – орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, символ “ \circ ” означает кватернионное умножение, а “[. . .]” – векторное произведение. В динамических уравнениях Эйлера (2.2) I_1, I_2, I_3 – главные моменты инерции твердого тела.

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T \quad (2.3)$$

и угловой скорости твердого тела

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T \quad (2.4)$$

Требуется определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{opt}}(t)$ системой (2.1), (2.2) при граничных условиях (2.3), (2.4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt \quad (2.5)$$

где время T произвольно и зафиксировано.

3. Переход к безразмерным переменным. Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по формулам

$$I_* = ((I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)/3)^{1/2}, \quad \bar{I}_k = I_k/I_*, \quad k = 1, 2, 3 \\ \bar{\boldsymbol{\omega}} = T\boldsymbol{\omega}, \quad \bar{t} = T^{-1}t, \quad \bar{\mathbf{M}} = I_*^{-1}T^2\mathbf{M}, \quad \bar{J} = I_*^{-2}T^3J$$

при этом вид формул (2.1)–(2.4) не изменится, а функционал (2.5) запишется так

$$J = \int_0^1 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt \quad (3.1)$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (2.1)–(2.4) (где $T = 1$), (3.1) в безразмерных переменных и верхние черты у них будут опущены.

4. Применение принципа максимума. Выполним процедуру принципа максимума Л.С. Понтрягина [1, 12]. Введем вспомогательные функции $\boldsymbol{\Psi}(t)$ (кватернион) и

$\Phi(t)$ (вектор) сопряженные к фазовым переменным $\Lambda(t)$, $\omega(t)$. Составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H = -\psi^*(M, M) + (\Psi, \Lambda \circ \omega) / 2 + (\Phi, \Gamma^{-1}M - \Gamma^{-1}[\omega, I\omega]) \quad (4.1)$$

где постоянная $\psi^* \geq 0$, а “ (\cdot, \cdot) ” – скалярное произведение векторов.

Будем рассматривать невырожденные решения краевой задачи принципа максимума, для которых $\psi^* > 0$. В силу однородности функции Гамильтона–Понтрягина H [12] в формуле (3.1) положим $\psi^* = 0$.

Сопряженная система:

$$\begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega, \\ \dot{\Phi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) / 2 - [\Gamma^{-1}\Phi, I\omega] + I[\Gamma^{-1}\Phi, \omega] \end{cases} \quad (4.2)$$

где “ $\text{vect}(\cdot)$ ” обозначает векторную часть кватерниона, а “ \sim ” – сопряжение кватерниона. Как видно, уравнения для переменных Ψ и Λ совпадают, а их решения различаются на кватернионную мультипликативную константу C

$$\Psi = C \circ \Lambda \quad (4.3)$$

Используя это и введя обозначение [1]

$$p = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ c_v \circ \Lambda \quad (4.4)$$

сопряженную систему (4.2) запишем так:

$$\begin{cases} \dot{p} = \tilde{\Lambda} \circ c_v \circ \Lambda \\ \dot{\Phi} = -p / 2 - [\Gamma^{-1}\Phi, I\omega] + I[\Gamma^{-1}\Phi, \omega] \end{cases} \quad (4.5)$$

Следует отметить, что применение этого приема [1], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (2.1) (замена кватернионной сопряженной переменной Ψ на векторную переменную p (4.4)) позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после принципа максимума, на четыре.

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (4.1) дает следующую структуру оптимального управления:

$$M^{\text{opt}} = \Gamma^{-1}\Phi / 2 \quad (4.6)$$

Как видно, вектор-функция управления в задаче носит непрерывный характер.

Функция Гамильтона–Понтрягина (4.1) с учетом новой переменной p (4.4) примет вид

$$H = -(M, M) + (p, \omega) / 2 + (\Phi, \Gamma^{-1}M - \Gamma^{-1}[\omega, I\omega]) \quad (4.7)$$

5. Модифицированная задача оптимального разворота. Движение твердого тела по-прежнему описывается соотношениями (2.1)–(2.4), при этом начальное и конечное значения по угловому положению и угловой скорости тела произвольны.

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела является разрешимость классической задачи Дарбу – аналитического определения $\Lambda(t)$ из уравнения (2.1) при известных Λ_0 , $\omega(t)$.

Для кватернионного дифференциального уравнения (2.1) при условии, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ задается выражением

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \frac{dg}{dt} \quad (5.1)$$

в котором $f(t)$ и $g(t)$ – произвольные функции времени, известно решение [13], удовлетворяющее начальному условию (1.3)

$$\begin{aligned} \Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

где символ $\exp\{\cdot\}$ обозначает кватернионную экспоненту [1]. Формулы (5.1), (5.2) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального разворота твердого тела при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения твердого тела постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1–3, 5–8, 10].

Заметим [13], что задачу Дарбу с произвольно заданным вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ с помощью замен переменных можно свести к решению уравнения типа (2.1) с угловой скоростью

$$\mathbf{w}(t) = -\left(\mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \frac{dg}{dt}\right)$$

отличающейся от (5.1) только знаком. При этом явное аналитическое решение этой задачи, как и при произвольном векторе $\boldsymbol{\omega}(t)$, не известно.

То есть предлагаемая структура угловой скорости (5.1) хорошо соотносится с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела.

Выражение (5.1) и решение (5.2) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона \mathbf{K} , $\|\mathbf{K}\| = 1$. Тогда вектор $\boldsymbol{\omega}$ и кватернион Λ будут определяться соотношениями

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ \left(\mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \frac{dg}{dt}\right) \circ \mathbf{K} \quad (5.3)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K} \quad (5.4)$$

Будем рассматривать вторые производные от функций f и g в качестве управляющих параметров. Тогда если ввести обозначения

$$\frac{df}{dt} = f_1, \quad \frac{dg}{dt} = g_1 \quad (5.5)$$

то можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему

$$\frac{df}{dt} = f_1, \quad \frac{dg}{dt} = g_1, \quad \frac{df_1}{dt} = u_1, \quad \frac{dg_1}{dt} = u_2 \quad (5.6)$$

где f , f_1 , g , g_1 – фазовые координаты, u_1 , u_2 – управляющие параметры.

Ограничимся случаем, когда кватернион \mathbf{K} представляется в виде произведения

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\} \quad (5.7)$$

где α_1, α_2 — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 определяют поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ (5.1) вокруг осей $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. Поворот вокруг оси \mathbf{i}_3 уже включен в формулу (5.3), если учесть, что в функцию $g(t)$ входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2\alpha_2/2\} \quad (5.8)$$

Условия того, что выражения для $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Lambda}$ (5.3), (5.4) удовлетворяют граничным условиям (2.3), (2.4) с учетом (5.7), (5.8), запишутся в виде

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \\ + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \mathbf{\Lambda}_T \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тогда для управляемой системы (5.6) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления. Требуется найти оптимальные управления $u_1(t), u_2(t)$, которые переводят управляемую систему (5.6) из начального состояния

$$f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0) \quad (5.12)$$

в конечное состояние

$$f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T) \quad (5.13)$$

удовлетворяющие соотношениям (5.9)–(5.11), в которых α_1, α_2 выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум функционалу

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt \quad (5.14)$$

Соотношения (5.9)–(5.11) можно переписать в виде

$$\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T) = \\ = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 \circ \mathbf{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Такую задачу оптимального управления будем называть модифицированной задачей оптимального разворота твердого тела.

Управляющий момент, соответствующий решению модифицированной задачи оптимального разворота твердого тела, определяется из (2.2) по формуле

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] \quad (5.18)$$

6. Решение задачи с помощью принципа максимума. Функция Гамильтона–Понтрягина для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$H = -(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 \quad (6.1)$$

где $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\Psi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\Psi_3}{dt} = -\Psi_1, \quad \frac{d\Psi_4}{dt} = -\Psi_2 \quad (6.2)$$

Общее решение уравнений (6.2), содержащее произвольные постоянные c_1, \dots, c_4 имеет вид

$$\Psi_1 = c_1, \quad \Psi_2 = c_2, \quad \Psi_3 = -c_1t + c_3, \quad \Psi_4 = -c_2t + c_4 \quad (6.3)$$

Из условия максимума для функции Гамильтона–Понтрягина (6.1) определяется оптимальное управление

$$u_1 = \Psi_3/2 = (-c_1t + c_3)/2, \quad u_2 = \Psi_4/2 = (-c_2t + c_4)/2 \quad (6.4)$$

После подстановки (6.4) в систему уравнений (5.6) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных c_1, \dots, c_8

$$\begin{aligned} f &= -c_1t^3/12 + c_3t^2/4 + c_5t + c_6 \\ g &= -c_2t^3/12 + c_4t^2/4 + c_7t + c_8 \\ f_1 &= -c_1t^2/4 + c_3t/2 + c_5 \\ g_1 &= -c_2t^2/4 + c_4t/2 + c_7 \end{aligned} \quad (6.5)$$

В связи с тем, что c_6 входит в функцию f как аддитивная постоянная, то из формул (5.4) видно, что эта постоянная не оказывает влияние; поэтому c_6 можно положить равной нулю. Таким образом, для определения девяти неизвестных постоянных задачи $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 служат девять уравнений из системы (5.15)–(5.17) (отметим, что в кватернионном уравнении (5.17) независимыми являются только три уравнения в скалярной форме из-за нормированности кватерниона $\mathbf{\Lambda}$). Если формулы (6.5) подставить в (5.3), (5.4), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории твердого тела. Эти выражения определяют оптимальный в смысле минимума функционала энергозатрат (5.14) разворот твердого тела в классе обобщенных конических движений. Управляющий момент согласно (5.1), (5.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ ((\mathbf{i}_1(u_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) + \\ &+ \mathbf{i}_2(u_1 \cos g - f_1 g_1 \sin g) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}) + [\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \\ &+ \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K}, \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K})] \end{aligned} \quad (6.6)$$

Формула (6.6) с учетом (6.4), (6.5) определяет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального разворота твердого тела, тем самым, решена полностью.

Следует отметить, что при сферической симметрии твердого тела квадрат модуля управляющего момента выражается через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом

$$\mathbf{M}^2 = u_1^2 + f_1^2 g_1^2 + u_2^2 \quad (6.7)$$

Если в задаче оптимального разворота сферически-симметричного тела векторы граничных условий по угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_T$ положить параллельными $\text{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 \circ \mathbf{\Lambda}_T)$ (плоский эйлеров разворот твердого тела), то решения задач в классической и модифици-

рованной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение классической задачи оптимального разворота сферически-симметричного твердого тела получено в классе конических движений типа решения [11]. В этих случаях слагаемое $f_1^2 g_1^2$ в (6.7) обращается в нуль и функционал (5.14) полностью переходит в функционал (2.5) ((3.1)) классической задачи.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального разворота твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений в безразмерных переменных.

Шаг 1. По заданным граничным условиям по угловому положению Λ_0, Λ_T (2.3), угловой скорости ω_0, ω_T (2.4) и времени переориентации КА ($T = 1$) из формул (5.7), (5.8) и девяти уравнений системы (5.15)–(5.17) определяются девять неизвестных постоянных задачи $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8, \alpha_1, \alpha_2$ и строятся функции f, f_1, g, g_1 .

Шаг 2. Используя формулы (5.7), находим компоненты кватерниона \mathbf{K} .

Шаг 3. По формуле (5.3):

$$\omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ \left(\mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \frac{dg}{dt} \right) \circ \mathbf{K}$$

вычисляется вектор угловой скорости твердого тела.

Шаг 4. По формуле (5.4):

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}$$

вычисляется кватернион ориентации твердого тела.

Шаг 5. Используя формулу (6.6), вычисляется вектор управляющего момента твердого тела.

Шаг 6. По формулам (3.1), (6.6) вычисляется значение безразмерного функционала оптимизации задачи оптимального разворота.

7. Численные примеры. В данном разделе приводятся примеры численного решения задачи оптимального разворота в традиционной и модифицированной постановке для различных вариантов динамической конфигурации твердого тела. Отметим, что среди примеров рассматриваются развороты Международной космической станции (МКС) [14] и КА “Спейс Шаттл” [15].

Численное решение традиционной задачи оптимального разворота твердого тела (2.1)–(1.4), (3.1) на основании принципа максимума Л.С. Понтрягина сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega \\ \dot{\omega} = \Gamma^{-1} \mathbf{M} - \Gamma^{-1} [\omega, \mathbf{I}\omega] \\ \dot{\phi} = -\mathbf{p}/2 - [\Gamma^{-1} \phi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\Gamma^{-1} \phi, \omega] \\ \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad \mathbf{c}_v = \text{const} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \omega(0) = \omega_0 \quad (7.2)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_T, \quad \omega(T) = \omega_T \quad (7.3)$$

$$\mathbf{M}^{\text{opt}} = \Gamma^{-1} \phi/2 \quad (7.4)$$

откуда подлежат нахождению величины $\mathbf{M}^{\text{opt}}, \Lambda^{\text{opt}}, \omega^{\text{opt}}, \mathbf{c}_v$.

Таблица 1

t	M_1^{tradit}	M_2^{tradit}	M_3^{tradit}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	-0.9854	0.7259	-0.4892	-0.9647	0.7634	-0.4932
0.5	-0.2917	0.2087	-0.2878	-0.3103	0.1687	-0.2847
$T=1$	0.5077	-0.1272	-0.0985	0.5350	-0.0220	-0.1024

Таблица 2

t	M_1^{tradit}	M_2^{tradit}	M_3^{tradit}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	-0.9805	0.8439	-0.3869	-0.9804	0.8879	-0.4023
0.5	-0.3033	0.2480	-0.2290	-0.3082	0.2045	-0.2247
$T=1$	0.5287	-0.1367	-0.0762	0.5280	-0.0261	-0.0808

Конечное условие (7.3) необходимо переписать в семимерном фазовом пространстве $\Lambda \times \omega$ в виде

$$\begin{aligned} \text{vect}(\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T) &= 0 \\ \omega(T) &= \omega_T \end{aligned} \quad (7.5)$$

Для решения краевой задачи (7.1), (7.2), (7.4), (7.5) разработан итерационный численный метод [9], представляющий собой комбинацию методов Рунге–Кутты, Ньютона и градиентного спуска. Важно отметить, что условие совпадения кватерниона ориентации твердого тела в конечный момент времени с кватернионом, определяющим заданную конечную ориентацию твердого тела, (условие (7.3)) заменено условием обращения в нуль векторной части кватернионного произведения $\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T$ (7.5). В [15, 16] авторы пытались выполнить условие $\Lambda(T) = \Lambda_T$, что приводило к вырождению матриц частных производных от невязок. В качестве первого приближения по недостающим начальным условиям при решении краевой задачи (7.1), (7.2), (7.4), (7.5) оптимального управления с произвольными граничными условиями по угловому положению и угловой скорости твердого тела берутся начальные условия по переменным ϕ , p , полученные при решении задачи оптимального разворота сферически симметричного твердого тела в классе плоских эйлеровых разворотов [8].

Численное решение модифицированной задачи оптимального разворота твердого тела строилось по формулам разд. 5, 6.

Во всех примерах расчеты проводились для граничных условий:

$$\Lambda_0 = (0.7951, 0.2981, -0.3975, 0.3478)$$

$$\Lambda_T = (0.8443, 0.3985, -0.3260, 0.1485) \quad (7.6)$$

$$\omega_0 = (0.2739, -0.2388, -0.3), \quad \omega_T = (0.0, 0.0, -0.59),$$

Решения традиционной и модифицированной задачи оказались близкими. Для примера, в табл. 1–5, приведем значения компонент вектора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в середине интервала времени движения твердого тела $[0, T]$ ($T=1$) в этих двух решениях.

Таблица 3

t	M_1^{tradit}	M_2^{tradit}	M_3^{tradit}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	-0.9480	0.9316	-0.2786	-0.9715	0.9847	-0.3062
0.5	-0.3093	0.2807	-0.1676	-0.2987	0.2337	-0.1622
$T = 1$	0.5401	-0.1432	-0.0536	0.5085	-0.0293	-0.0584

Таблица 4

t	M_1^{tradit}	M_2^{tradit}	M_3^{tradit}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	-0.2091	0.8349	-0.6241	-0.2181	0.9608	-0.6893
0.5	-0.0741	0.2697	-0.3795	-0.0725	0.1683	-0.3630
$T = 1$	0.1318	-0.2804	-0.1131	0.1261	-0.0253	-0.1307

Таблица 5

t	M_1^{tradit}	M_2^{tradit}	M_3^{tradit}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	-0.1556	0.8793	-0.5955	-0.1897	1.0127	-0.6669
0.5	-0.0780	0.2846	-0.3644	-0.0610	0.1807	-0.3459
$T = 1$	0.1444	-0.2897	-0.1065	0.1052	-0.2682	-0.1246

Пример 1. $I_1 = I_2 = I_3 = 1$ (случай сферической симметрии твердого тела). Значения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$, входящих в аналитическое решение модифицированной задачи таковы:

$$\alpha_1 = -0.0421, \quad \alpha_2 = -0.2226, \quad c_1 = 3.2902, \quad c_2 = -1.4885, \quad c_3 = 2.2113, \\ c_4 = -1.45, \quad c_5 = -0.4156, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = -0.2221, \quad c_8 = -0.9216.$$

Значения функционала оптимизации в традиционной и модифицированной задаче: $J^{\text{tradit}} = 0.47824, J^{\text{modif}} = 0.47975$. В рассматриваемом примере расхождение между величинами функционала (3.1) для традиционной и модифицированной задач составляет 0.315%.

Пример 2. $I_1 = 1, I_2 = 1.2, I_3 = 0.8$ (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.9869, I_2 = 1.1843, I_3 = 0.7895$ (безразмерные моменты инерции). Значения функционала оптимизации в традиционной и модифицированной задаче: $J^{\text{tradit}} = 0.4920, J^{\text{modif}} = 0.4935$. Расхождение между величинами функционала (2.1) для традиционной и модифицированной задач составляет 0.305%.

Пример 3. $I_1 = 1, I_2 = 1.4, I_3 = 0.6$ (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.9506, I_2 = 1.3308, I_3 = 0.5704$ (безразмерные моменты инерции). Значения функционала оптимизации в традиционной и модифицированной задаче: $J^{\text{tradit}} = 0.4947, J^{\text{modif}} = 0.4966$. Расхождение между величинами функционала (2.1) для традиционной и модифицированной задач составляет 0.384%.

Таблица 6

Конфигурация КА; традиционная задача	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Сферически-симметричный КА (пример 1)	0.8096	0.3625	-0.3768	0.26679	-0.0502	-0.0114	-0.4937
КА произвольной конфигурации (пример 2)	0.8095	0.3628	-0.3766	0.26705	-0.0499	-0.0115	-0.4941
КА произвольной конфигурации (пример 3)	0.8093	0.3631	-0.3765	0.26738	-0.0496	-0.0116	-0.4949
КА “Спейс Шаттл” (пример 4)	0.8077	0.3654	-0.3773	0.26781	-0.0506	-0.0159	-0.4949
МКС (пример 5)	0.8086	0.3634	-0.3780	0.26683	-0.0519	-0.0137	-0.4948
Модифицированная задача	0.8099	0.3627	-0.3756	0.26734	-0.0488	-0.0098	-0.4938

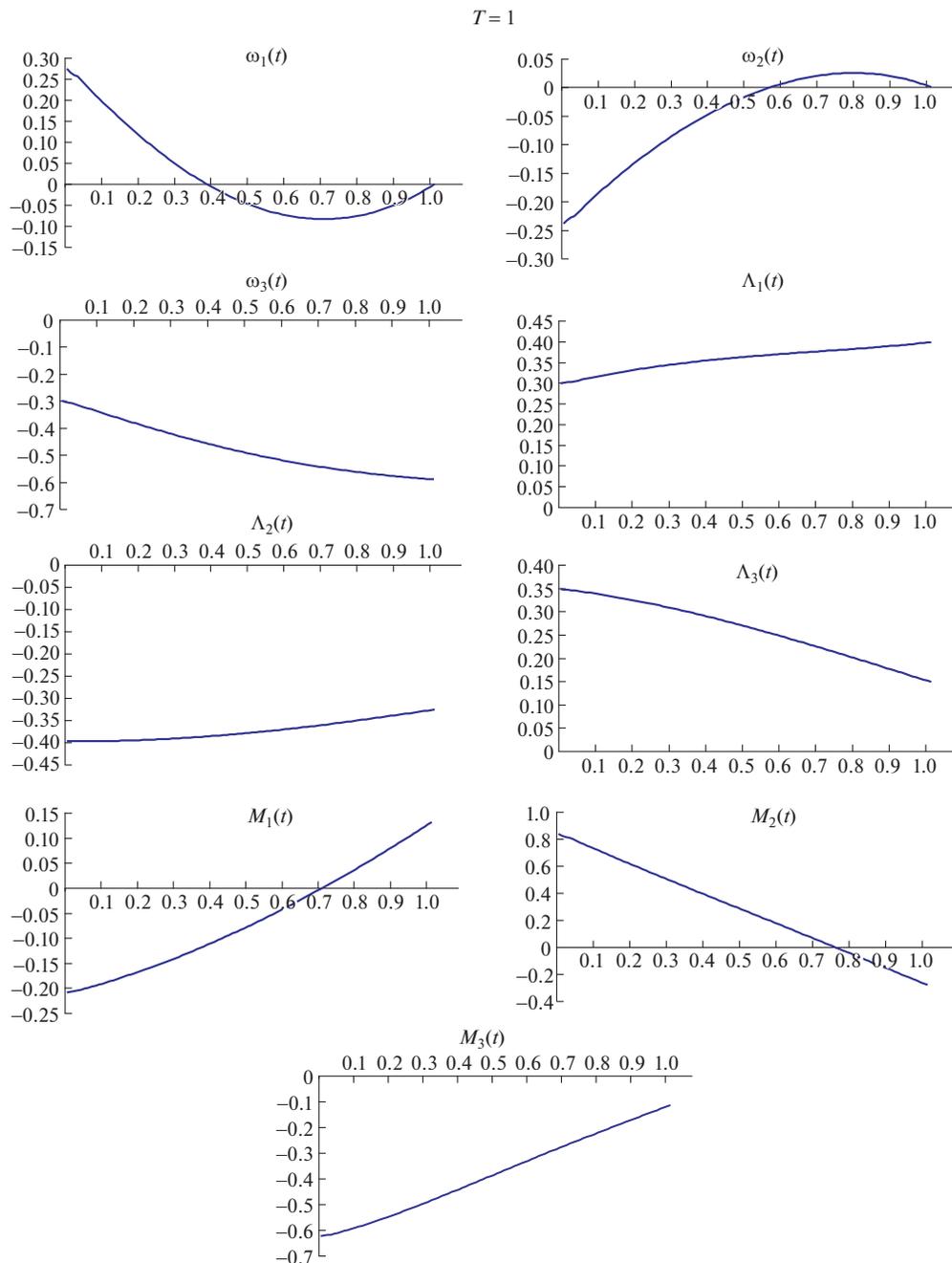
Пример 4 (МКС). $I_1 = 4853000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 23601000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 26278000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.2358$, $I_2 = 1.1466$, $I_3 = 1.2766$ (безразмерные моменты инерции). Значения функционала оптимизации в традиционной и модифицированной задаче: $J^{\text{tradit}} = 0.35522$, $J^{\text{modif}} = 0.36404$. Расхождение между величинами функционала (3.1) для традиционной и модифицированной задач составляет 2.37%.

Пример 5 (КА “Спейс Шаттл”). $I_1 = 3400648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 21041672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = I_2 = 21041672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.1967$, $I_2 = 1.2168$, $I_3 = I_2 = 1.2168$ (безразмерные моменты инерции). Значения функционала оптимизации в традиционной и модифицированной задаче: $J^{\text{tradit}} = 0.35797$, $J^{\text{modif}} = 0.36775$. Расхождение между величинами функционала (3.1) для традиционной и модифицированной задач составляет 2.73%.

Ниже для примера 4 (МКС) на фиг. 1, 2 представлены графики изменения во времени компонент угловой скорости $\omega_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, векторной части кватерниона ориентации $\Lambda_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ и компонент вектора управляющего момента $M_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ в традиционной и модифицированной задаче оптимального разворота.

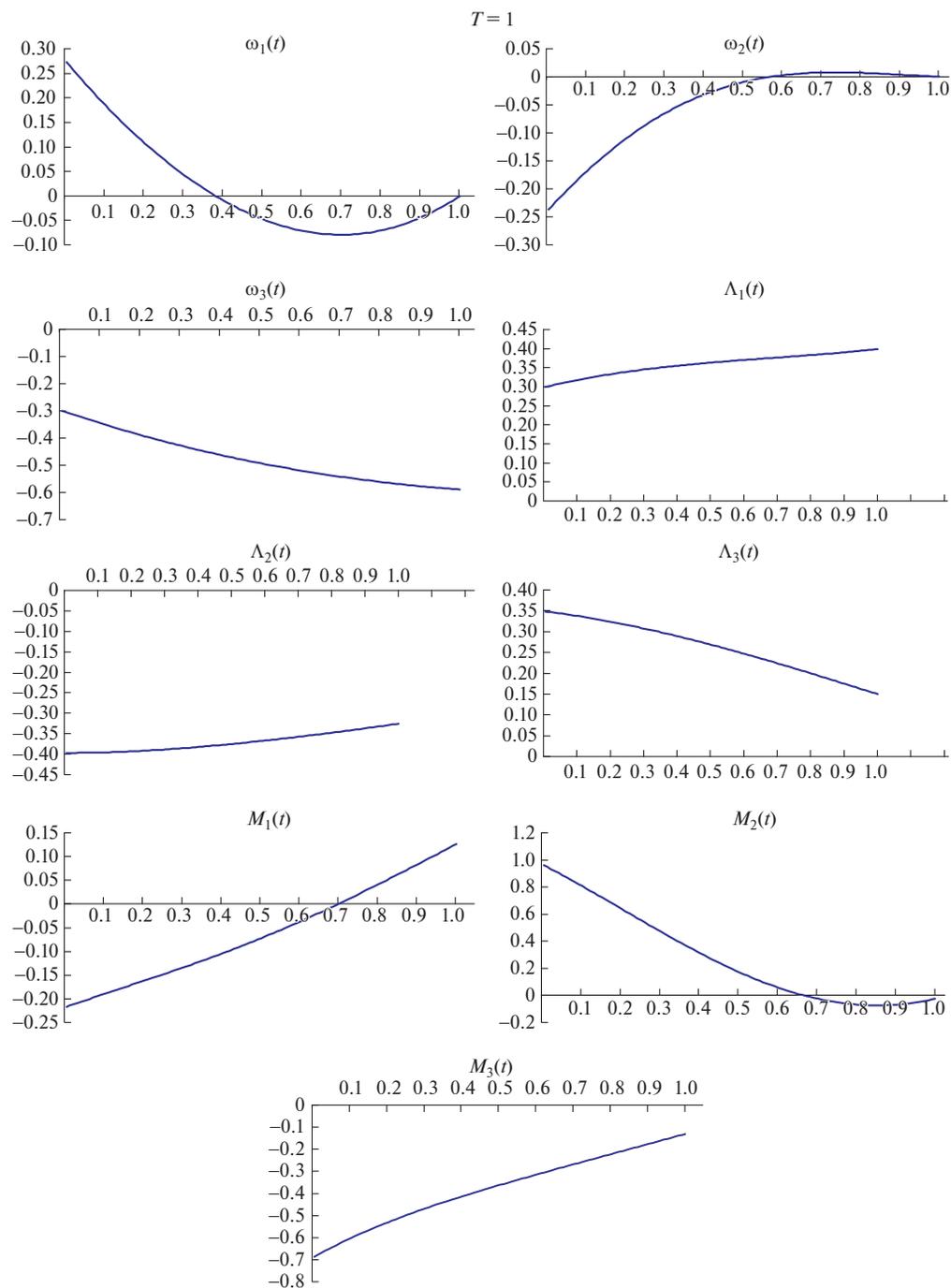
Следует отметить, что в примере 1 (сферическая симметрия твердого тела) значения функционала (3.1) и управляющие моменты в традиционной и модифицированной задачах практически совпали. Из примеров 2–5 видно, что с возникновением существенной разницы между моментами инерции твердого тела I_1 , I_2 , I_3 увеличивается расхождение между управляющими моментами, полученными при решении традиционной и модифицированной задач в зависимости от характера изменения моментов инерции твердого тела между собой. Но, в то же время, различие между значениями функционала качества процесса управления (3.1), вычисленными при решении традиционной и модифицированной задач, приемлемо. Надо заметить, что значение функционала качества процесса управления – определяющая характеристика задачи.

Из сравнения результатов расчетов следует, что аналитическое решение модифицированной задачи представляет собой приближенное (квазиоптимальное) решение задачи об оптимальном развороте твердого тела в традиционной постановке. В табл. 6 представлены значения компонент кватернионов ориентации и векторов угловых



Фиг. 1

скоростей твердых тел рассмотренных выше динамических конфигураций в традиционной задаче и результаты решения модифицированной задачи в середине интервала времени движения ($t = 0.5$) при граничных условиях (7.6). Различие в компонентах кватернионов ориентации и векторов угловых скоростей твердого тела в традицион-



Фиг. 2

ной и модифицированной задаче наблюдается в третьем или четвертом знаке после запятой. Причем различие в компонентах кватернионов ориентации в третьем знаке составляет не более трех единиц, различие в компонентах угловых скоростей в третьем

знаке максимально составляет шесть единиц, но такая погрешность возникает только в той компоненте вектора угловой скорости, которая по своей величине мала по сравнению с другими компонентами. По этой причине различие между величинами и направлениями векторов угловой скорости в традиционной и модифицированной задаче будет определяться остальными компонентами вектора угловой скорости, в которых различие также как и в компонентах кватерниона ориентации составляет не более трех единиц.

Из большого количества проведенных численных расчетов решения задачи об оптимальном развороте твердого тела для различных граничных условий и для различных распределений масс в теле, что характеризуется значениями главных моментов инерции I_1, I_2, I_3 , можно сделать следующие выводы:

1) кинематические характеристики разворота твердого тела (кватернион ориентации $\mathbf{\Lambda}$ и вектор угловой скорости $\mathbf{\omega}$) в традиционной задаче слабо зависят от распределения масс в твердом теле и в основном определяются граничными условиями задачи (во всяком случае, при величинах $|\varphi| \leq \pi/2$, где φ – угол эйлера поворота твердого тела), а в модифицированной задаче кинематические характеристики вращения твердого тела зависят только от граничных условий задачи;

2) управляющий момент существенно зависит от распределения масс в теле и граничных условий и в традиционной, и в модифицированной постановках задачи.

Слабая зависимость кинематических характеристик оптимального движения твердого тела от его динамической конфигурации обеспечивает близость решений модифицированной и традиционной задач оптимального разворота твердого тела при произвольной динамической конфигурации.

Также отметим, что кватернион ориентации твердого тела $\mathbf{\Lambda}(t)$ может быть двузначным [1], то есть $\mathbf{\Lambda}$ и $-\mathbf{\Lambda}$ соответствуют одному и тому же угловому положению твердого тела в пространстве.

Заключение. Представленное в статье аналитическое квазиоптимальное решение классической задачи разворота твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости твердого тела может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известные аналитические решения задачи оптимальной переориентации сферически-симметричного твердого тела в классе плоских эйлеровых разворотов.

Следует отметить, что оптимальные развороты МКС на сегодняшний день осуществляются под управлением американского сегмента МКС на основе процедур “Zero Propellant Maneuver” и “Optimal Propellant Maneuver”, где численно решается задача оптимального управления движением твердого тела с гладким управлением с учетом возмущающих факторов в динамических уравнениях Эйлера (2.2) [17, 18]. Также проводятся исследования, направленные на создание и развитие российских алгоритмов оптимального управления разворотами МКС как упругого объекта, учитывающих ограничения на динамические нагрузки в конструкции МКС [18].

Изложенный в статье подход можно обобщить на эти случаи и построить явное аналитическое приближенное решение задачи, которое с хорошими точностями (по крайней мере, при величинах эйлера угла поворота $|\varphi| \leq \pi/2$) решало бы задачу разворота МКС при произвольных граничных условиях и не требовало бы численного решения краевой задачи оптимизации или иного сложного численного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Scrivenner S.L., Thompson R.C. Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.

3. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 7–14.
4. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
5. *Сиротин А.Н.* Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 36–47.
6. *Сиротин А.Н.* Об оптимальной по быстрдействию пространственной переориентации в положение покоя вращающегося сферически-симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 18–27.
7. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 16–27.
8. *Молоденков А.В.* Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления. Сб. научн. трудов. Пермь: ПГУ, 1995. С. 122–131.
9. *Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.* Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6. Автоматическое и автоматизированное управление летательными аппаратами. С. 10–15.
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота твердого тела в классе конических движений // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 3–16.
11. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 391 с.
13. *Молоденков А.В.* К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 3–13.
14. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2002. № 57. 19 с.
15. *Li F., Bainum P.M.* Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1990. V. 13. № 1. P. 38–45.
16. *Lastman G.J.* A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems // Intern. J. Control. 1978. V. 27. № 4. P. 513–524.
17. *Bedrossian N., Bhatt S., Kang W., Ross M.* Zero-Propellant Maneuver Guidance // IEEE Control Systems magazine. 2009. V. 29. № 5. P. 53–73.
18. Описание эксперимента “Летная отработка процесса управления разворотами МКС с использованием реактивных двигателей Российского сегмента МКС с минимальным расходом топлива и учетом ограничений по нагрузкам на конструкцию МКС” // http://knts.tsniimash.ru/ru/site/Experiment_q.aspx?idE=328&id=5