

УДК 539.3

МОДУЛИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО УПРУГОГО ТЕЛА

© 2019 г. Т. И. Белянкова^{a,b}, В. В. Калинин^{a,b,*}, Д. Н. Шейдаков^a

^a Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

^b Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: kalin@ssc-ras.ru

Поступила в редакцию 28.08.2017 г.

После доработки 28.08.2017 г.

Принята к публикации 29.01.2018 г.

В терминах отсчетной конфигурации проведена линеаризация уравнений нелинейной механики первоначально изотропного упругого тела (ПИУТ) в окрестности некоторого преднапряженного состояния равновесия. При этом использовалось специальное представление упругого потенциала через алгебраические инварианты тензора деформации Коши–Грина, содержащее модули высших порядков. Построены линеаризованные определяющие соотношения и уравнения движения, учитывающие нелинейное влияние начальных деформаций на свойства ПИУТ.

Ключевые слова: модули высших порядков, преднапряженная среда, начальная деформация, алгебраические инварианты тензора деформации Коши–Грина

DOI: 10.1134/S0572329919030036

1. Введение. Технологическое развитие авиа- и машиностроения, приборостроения и электроники приводит к необходимости создания новых конструкционных материалов, а также подробного исследования их физических свойств, технологических и прочностных характеристик в зависимости от режимов и условий эксплуатации. Проведение подобных исследований сопряжено с необходимостью решения сложных прикладных задач теории упругости и притяжения механических моделей гиперупругой среды [1, 2], с той или иной степенью точности отражающих процессы, происходящие в изучаемых телах. В случае изотропного материала упругий потенциал представляется в виде скалярной функции инвариантов меры или тензора деформации [2–4]. Для жестких материалов широко используется предложенное Мурнаганом представление упругого потенциала в виде кубической функции инвариантов тензора деформации Коши–Грина [5] с константами III порядка. Значения последних определены для ряда металлов, сплавов и конструкционных материалов, кристаллов с различными классами симметрии [6–9], а также для некоторых горных пород [10]. Модель Мурнагана позволяет более точно описывать поведение предварительно напряженных тел. С ее помощью в [6, 10–19] исследованы эффекты второго порядка, а также изучены особенности динамики, распространения и локализации волн в преднапряженных средах. В [11] проведена линеаризация уравнений нелинейной механики деформируемого твердого тела в текущей и отсчетной конфигурациях. Полученные результаты в дальнейшем [11, 16–19] использованы при решении ряда конкретных задач динамической теории упругости. В [17–19] исследовано влияние характера начальных воздействий на возникновение, распространение и локализацию волновых

полей в однородных и неоднородных предварительно напряженных средах. Развитие технологий, основанных на эксплуатации материалов и конструкций, допускающих большой уровень деформации, определяет необходимость усовершенствования привлекаемых моделей за счет использования более сложных форм упругого потенциала. Различные представления упругих потенциалов с константами III и IV порядков успешно использовались при моделировании мягких и резиноподобных материалов [20, 21]. Среди жестких материалов выделяются так называемые металлические стекла, перспективные в практических приложениях и обладающие уникальными физическими свойствами. Они способны до начала пластического течения выдерживать чрезвычайно высокий уровень упругой деформации, что требует привлечения констант IV порядка для адекватного описания их поведения. Результаты экспериментальных исследований по определению упругих модулей III и IV порядков для объемных металлических стекол на основе циркония (Zr) и палладия (Pd) представлены в [22–24]. Настоящая работа посвящена усовершенствованию развитой в [11] линеаризованной теории контактного взаимодействия предварительно напряженных тел путем учета модулей IV порядка в представлении упругого потенциала. В работе построены линеаризованные определяющие соотношения и уравнения движения преднапряженной среды, позволяющие учитывать нелинейные эффекты “второго” и “третьего” порядков при анализе влияния начальной деформации на упругие свойства исходного материала. Изучено влияние модулей высших порядков на характеристики предварительно напряженного материала при расчете начально-деформированного состояния.

2. Общая постановка задачи для преднапряженного ПИУТ. Введем в рассмотрение отсчетную v и актуальную V конфигурации с радиус-векторами:

$$\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{R} = X_k \mathbf{i}_k \quad (2.1)$$

где $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ – ортонормированный декартовый векторный базис, x_1, x_2, x_3 и X_1, X_2, X_3 – лагранжевы и эйлеровы координаты, соответственно.

Деформацию среды характеризуют градиент деформации \mathbf{C} и тензор деформации Коши–Грина $\mathbf{S} \overset{\circ}{\nabla}$ – набла оператор в отсчетной конфигурации, \mathbf{Y} – единичный тензор):

$$\mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{E}^{\circ}) \quad (2.2)$$

напряженное состояние – тензоры напряжений Кирхгофа \mathbf{P} и Пиола \mathbf{B} :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \quad (2.3)$$

В случае изотропного материала удельная потенциальная энергия деформации $W(\mathbf{S})$ может быть выражена через алгебраические инварианты $I_k = \text{tr} \mathbf{S}^k$ ($k = 1, 2, 3$) тензора деформации Коши–Грина [22–24]:

$$W = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{6} \beta_1 I_1^3 + \beta_2 I_1 I_2 + \frac{4}{3} \beta_3 I_3 + \frac{1}{24} \gamma_1 I_1^4 + \frac{1}{2} \gamma_2 I_1^2 I_2 + \frac{4}{3} \gamma_3 I_1 I_3 + \frac{1}{2} \gamma_4 I_2^2 \quad (2.4)$$

Здесь λ, μ – упругие модули II порядка; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ – упругие модули III и IV порядков, соответственно. Тензор Кирхгофа (2.3) с учетом представления (2.4) записывается в виде [3]:

$$\mathbf{P} = k \chi_k \mathbf{S}^{k-1}; \quad \chi_k = \frac{\partial W}{\partial I_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \lambda I_1 + \frac{1}{2}\beta_1 I_1^2 + \beta_2 I_2 + \frac{1}{6}\gamma_1 I_1^3 + \gamma_2 I_1 I_2 + \frac{4}{3}\gamma_3 I_3 \\ \chi_2 &= \mu + \beta_2 I_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 I_1^2 + \gamma_4 I_2, \quad \chi_3 = \frac{4}{3}(\beta_3 + \gamma_3 I_1)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Краевая задача нелинейной теории упругости для предварительно напряженного ПИУТ в лагранжевых координатах описывается уравнениями

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

и граничными условиями на поверхности тела $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$:

$$\begin{aligned}\Omega_1: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{t} \\ \Omega_2: \quad \mathbf{R} &= \mathbf{R}^*\end{aligned}\quad (2.8)$$

\mathbf{b} и \mathbf{t} – векторы массовых и поверхностных сил, соответственно; \mathbf{R}^* – радиус-вектор точек поверхности деформированного тела; ρ_0 – плотность материала в отсчетной конфигурации; \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности недеформированного тела. Замыкает постановку задачи закон состояния гиперупругого изотропного материала (2.5), (2.6).

3. Линеаризованные уравнения движения для преднапряженного ПИУТ. Пусть существует некоторое равновесное начально-деформированное состояние ПИУТ и величины, характеризующие это состояние, не зависят явно от времени [3, 11]:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{C}_1 = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}(\mathbf{C}_1), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{C}_1), \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}(\mathbf{C}_1) \quad (3.1)$$

Уравнения равновесия в объеме и на поверхности $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ представляются соотношениями:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D}_1 + \rho_0 \mathbf{b}_1 = 0 \quad (3.2)$$

$$\Omega_1: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{t}_1 \quad (3.3)$$

$$\Omega_2: \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^*$$

Рассмотрим малое возмущение начального состояния (3.1), вызванное небольшим изменением поверхностных или массовых сил (характеристики возмущенного состояния будем отмечать верхним индексом \times):

$$\mathbf{b}^\times = \mathbf{b}_1 + \eta \mathbf{b}, \quad \mathbf{t}^\times = \mathbf{t}_1 + \eta \mathbf{f} \quad (3.4)$$

Положение точек тела в таком состоянии определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}^\times = \mathbf{R}_1 + \eta \mathbf{u} \quad (3.5)$$

Здесь η – малый параметр, \mathbf{u} – вектор добавочных перемещений. Для тензора Пиюла в возмущенном состоянии справедливо представление:

$$\mathbf{D}^\times = \mathbf{D}_1 + \eta \mathbf{D}^\bullet + o(\eta^2) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{C}_1 + \eta \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}) \right|_{\eta=0} \quad (3.7)$$

Здесь и далее верхним индексом \bullet обозначены конвективные производные соответствующих тензоров.

Величины (3.4)–(3.6), определяющие возмущенное состояние тела, удовлетворяют уравнениям движения (2.7) с граничными условиями (2.8). Учитывая соотношения (3.1)–(3.7), в отсутствие массовых сил получаем линеаризованные уравнения движения:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D}^{\bullet} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

и линеаризованные граничные условия на поверхности $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$:

$$\begin{aligned} \Omega_1: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{\bullet} &= \mathbf{f} \\ \Omega_2: \quad \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

Путем линеаризации определяющих соотношений (2.3), (2.5) найдем конвективную производную тензора Пиола \mathbf{D}^{\bullet} :

$$\mathbf{D}^{\bullet} = \mathbf{P}^{\bullet} \cdot \mathbf{C}_1 + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{C}^{\bullet} \quad (3.10)$$

Здесь

$$\mathbf{P}^{\bullet} = 2\chi_2 \mathbf{S}^{\bullet} + 3\chi_3 (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}^{\bullet} + \mathbf{S}^{\bullet} \cdot \mathbf{S}_1) + \chi_1 \mathbf{E} + 2\chi_2^* \mathbf{S}_1 + 3\chi_3^* \mathbf{S}_1^2 \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_k^{\bullet} &= \chi_{km} I_m^{\bullet}; \quad \chi_{km} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_k \partial I_m}, \quad I_m^{\bullet} = \frac{\partial I_m}{\partial \mathbf{S}} \circ \mathbf{S}^{\bullet} = m \mathbf{S}_1^{m-1} \circ \mathbf{S}^{\bullet}, \quad k, m = 1, 2, 3 \\ \mathbf{S}^{\bullet} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}^{\mathbf{T}\bullet} + \mathbf{C}^{\bullet} \cdot \mathbf{C}_1^{\mathbf{T}}), \quad \mathbf{C}^{\bullet} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь символом “ \circ ” обозначена операция полного умножения.

Далее будем полагать, что начальное деформированное состояние ПИУТ однородно:

$$\mathbf{R}_1 = v_k x_k \mathbf{i}_k; \quad v_k = 1 + \delta_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.13)$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – относительные удлинения волокон, направленных вдоль координатных осей, совпадающих в естественной конфигурации с декартовыми координатами.

Градиент деформации и тензор деформации Коши–Грина (2.2) с учетом условия (3.13) записываются следующим образом:

$$\mathbf{C}_1 = v_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{S}_1 = S_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k; \quad S_k = \frac{1}{2} (v_k^2 - 1), \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

Тензоры Кирхгофа и Пиола представляются выражениями:

$$\mathbf{P}_1 = P_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{D}_1 = v_k P_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k; \quad P_k = n \chi_n S_k^{n-1}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

Конвективные производные (3.10), (3.11) этих тензоров принимают вид (δ_{km} – символ Кронекера):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\bullet} &= P_{km}^* \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m, \quad \mathbf{D}^{\bullet} = (v_m P_{km}^* + P_k u_{m,k}) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m \\ P_{km}^* &= \left[\chi_2 + \frac{3}{2} \chi_3 (S_k + S_m) \right] (v_k u_{k,m} + v_m u_{m,k}) + \delta_{km} \theta_{kn} v_n u_{n,n} \\ \theta_{kn} &= \chi_{11} + 2\chi_{12} (S_k + S_n) + \chi_{13} (4S_k^2 + 3S_n^2) + 4\chi_{22} S_k S_n \\ u_{k,m} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_m}, \quad u_{k,mn} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m \partial x_n}, \quad k, m, n = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь использованы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^\bullet &= \frac{1}{2}(v_k u_{k,m} + v_m u_{m,k}) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m, & I_1^\bullet &= v_k u_{k,k}, & I_2^\bullet &= 2v_k S_k u_{k,k}, & I_3^\bullet &= 3v_k S_k^2 u_{k,k} \\ \chi_1^\bullet &= (\chi_{11} + 2\chi_{12} S_n + 3\chi_{13} S_n^2) v_n u_{n,n}, & \chi_2^\bullet &= (\chi_{12} + 2\chi_{22} S_n) v_n u_{n,n}, & \chi_3^\bullet &= \chi_{13} v_n u_{n,n} \end{aligned}$$

Согласно представлениям (3.12), коэффициенты χ_{km} равны:

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \lambda + \beta_1 I_1 + \frac{1}{2} \gamma_1 I_1^2 + \gamma_2 I_2, & \chi_{12} &= \chi_{21} = \beta_2 + \gamma_2 I_1, & \chi_{22} &= \gamma_4 \\ \chi_{13} &= \chi_{31} = \frac{4}{3} \gamma_3, & \chi_{23} &= \chi_{32} = \chi_{33} = 0; & I_m &= S_1^m + S_2^m + S_3^m, & m &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Линеаризованные уравнения движения (3.8) в скалярном виде представляются формулами ($m = 1, 2, 3$):

$$P_k u_{m,kk} + \theta_{mn} v_m v_n u_{n,mn} + v_m \left[\chi_2 + \frac{3}{2} \chi_3 (S_k + S_m) \right] (v_k u_{k,km} + v_m u_{m,kk}) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

Используя выражения (3.16), компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы \mathbf{D}^\bullet могут быть представлены в компактной форме [2, 3, 11]:

$$\mathbf{D}^\bullet = D_{ij}^* \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j; \quad D_{ij}^* = C_{ijkl}^* u_{k,l}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} C_{iiii}^* &= P_i + \theta_{ii} v_i^2 + 2(\chi_2 + 3\chi_3 S_i) v_i^2, & C_{ijij}^* &= \left(\chi_2 + \frac{3}{2} \chi_3 [S_i + S_j] \right) v_i v_j \\ C_{ijji}^* &= P_i + \left(\chi_2 + \frac{3}{2} \chi_3 [S_i + S_j] \right) v_j^2, & C_{iijj}^* &= \theta_{ij} v_i v_j, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (3.20)$$

Все остальные коэффициенты C_{ijkl}^* равны нулю.

Представление (3.19) определяет влияние начальных деформаций на исходные свойства изотропного материала, т.е. C_{ijkl}^* определяют свойства предварительно напряженного тела. В отсутствии начальных деформаций ($v_1 = v_2 = v_3 = 1$), согласно (2.6), (3.14)–(3.17) получаем

$$C_{iiii}^* = \lambda + 2\mu, \quad C_{iijj}^* = \lambda, \quad C_{ijij}^* = \mu, \quad C_{ijji}^* = \mu$$

С учетом (3.19), (3.20) линеаризованные уравнения движения (3.18) преднапряженного первоначально изотропного тела принимают вид [1–3, 11]:

$$C_{ijkl}^* u_{k,li} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

При решении краевых задач для полуграниченных сред задача (3.9), (3.21) замыкается дополнительными граничными условиями:

– для полупространства $|x_1|, |x_2| \leq \infty, x_3 \leq 0$

$$x_3 \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{u} \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

– для слоя $|x_1|, |x_2| \leq \infty, a_- \leq x_3 \leq a_+$, нижняя грань которого жестко зашпелена

$$x_3 = a_-: \quad \mathbf{u} = 0 \quad (3.23)$$

– на границе раздела n -го и $(n+1)$ -го элементов структуры с плоскопараллельными границами (при полном сцеплении):

$$x_3 = a_n: \quad \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n+1)}, \quad D_{3k}^{*(n)} = D_{3k}^{*(n+1)}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

– на границе раздела (при контакте без трения):

$$x_3 = a_n; \quad u_3^{(n)} = u_3^{(n+1)} = 0, \quad D_{3k}^{*(n)} = D_{3k}^{*(n+1)} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (3.25)$$

4. Различные типы начального напряженного состояния ПИУТ. Начальные напряжения в теле определяются тензором Кирхгофа, который в случае однородной начальной деформации (3.13) задан соотношениями (3.15) с коэффициентами (2.6). Группируя слагаемые по степеням тензора деформации \mathbf{S} , для компонент тензора Кирхгофа получаем:

$$\begin{aligned} P_1 &= (\lambda + 2\mu) S_1 + \lambda(S_2 + S_3) + B_{21} + B_{31} \\ P_2 &= (\lambda + 2\mu) S_2 + \lambda(S_1 + S_3) + B_{22} + B_{32} \\ P_3 &= (\lambda + 2\mu) S_3 + \lambda(S_1 + S_2) + B_{23} + B_{33} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если в представлении (2.4) удержать слагаемые с упругими модулями II и III порядков, то для χ_1, χ_2, χ_3 , согласно выражениям (2.6), получим:

$$\chi_1 = \lambda I_1 + \frac{1}{2} \beta_1 I_1^2 + \beta_2 I_2, \quad \chi_2 = \mu + \beta_2 I_1, \quad \chi_3 = \frac{4}{3} \beta_3$$

и $B_{3k} = 0$ ($k = 1, 2, 3$) в выражениях (4.1).

При сохранении в упругом потенциале (2.4) только слагаемых с модулями II порядка коэффициенты χ_1, χ_2, χ_3 равны:

$$\chi_1 = \lambda I_1, \quad \chi_2 = \mu, \quad \chi_3 = 0; \quad B_{2k} = B_{3k} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

Компоненты тензора напряжений Кирхгофа в этом случае линейно связаны с компонентами тензора деформации Коши–Грина.

Слагаемые B_{2k} и B_{3k} ($k = 1, 2, 3$) позволяют учитывать в соотношениях (4.1) влияние упругих модулей высших порядков:

$$\begin{aligned} B_{21} &= \zeta_2 S_1^2 + 2\zeta_1 S_1 (S_2 + S_3) + \zeta_1 (S_2^2 + S_3^2) + \beta_1 S_2 S_3 \\ B_{22} &= \zeta_2 S_2^2 + 2\zeta_1 S_2 (S_1 + S_3) + \zeta_1 (S_1^2 + S_3^2) + \beta_1 S_1 S_3 \\ B_{23} &= \zeta_2 S_3^2 + 2\zeta_1 S_3 (S_1 + S_2) + \zeta_1 (S_1^2 + S_2^2) + \beta_1 S_1 S_2 \\ \zeta_1 &= \frac{\beta_1}{2} + \beta_2, \quad \zeta_2 = \frac{\beta_1}{2} + 3\beta_2 + 4\beta_3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

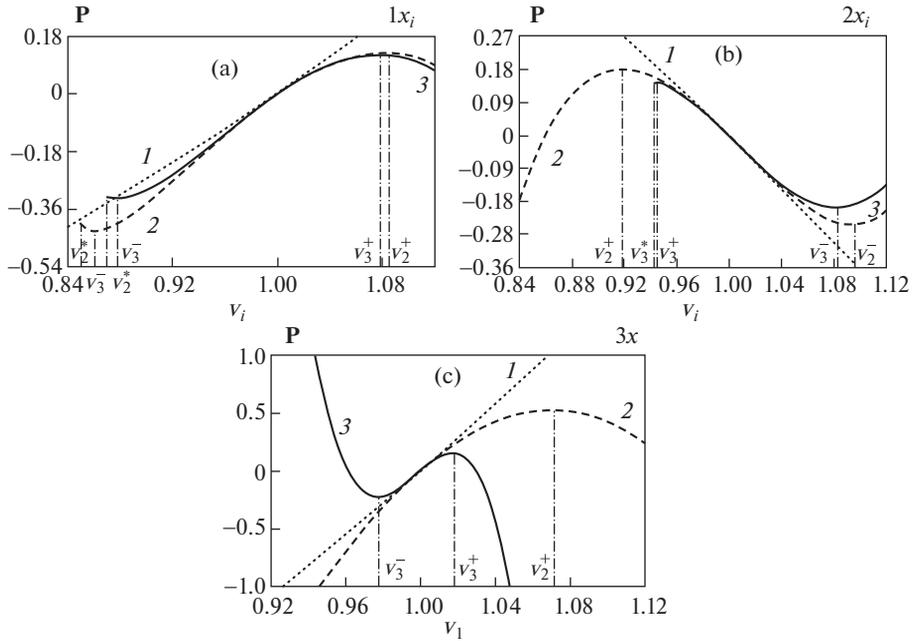
$$\begin{aligned} B_{31} &= \xi_4 S_1^3 + 3\xi_3 (S_2 + S_3) S_1^2 + \xi_3 (S_2^3 + S_3^3) + \xi_2 S_1 (S_2^2 + S_3^2) + \xi_1 S_2 S_3 (2S_1 + S_2 + S_3) \\ B_{32} &= \xi_4 S_2^3 + 3\xi_3 (S_1 + S_3) S_2^2 + \xi_3 (S_1^3 + S_3^3) + \xi_2 S_2 (S_1^2 + S_3^2) + \xi_1 S_1 S_3 (2S_2 + S_1 + S_3) \\ B_{33} &= \xi_4 S_3^3 + 3\xi_3 (S_1 + S_2) S_3^2 + \xi_3 (S_1^3 + S_2^3) + \xi_2 S_3 (S_1^2 + S_2^2) + \xi_1 S_1 S_2 (2S_3 + S_1 + S_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\xi_1 = \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_2, \quad \xi_2 = \frac{\gamma_1}{2} + 2\gamma_2 + 2\gamma_4, \quad \xi_3 = \frac{\gamma_1}{6} + \gamma_2 + \frac{4\gamma_3}{3}, \quad \xi_4 = \frac{\gamma_1}{6} + 2\gamma_2 + \frac{16\gamma_3}{3} + 2\gamma_4$$

Выражения (4.1) представляют собой систему трех, в общем случае нелинейных, уравнений относительно трех неизвестных: $\{S_1, S_2, S_3\}$, $\{P_1, P_2, P_3\}$ или их сочетаний в зависимости от способа задания начального напряженно-деформированного состояния. При комбинированном задании начального состояния известной предполагается деформация вдоль одной оси (например, v_1) и два условия на напряжения. Деформации и напряжения вдоль других осей определяются из системы (4.1). Далее исследованы влияния предварительных напряжений при следующих видах начальных состояний ($i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$):

$$1x_i \Rightarrow P_i = P, \quad P_j = P_k = 0 \text{ (одноосное)}$$

$$2x_i \Rightarrow P_i = 0, \quad P_j = P_k = P \text{ (двухосное)}$$



Фиг. 1

$$3x_i \Rightarrow P_i = P, \quad P_j = P_k = G \text{ (трехосное, несимметричное)}$$

$$3x \Rightarrow P_1 = P_2 = P_3 = P \text{ (трехосное, гидростатическое)}$$

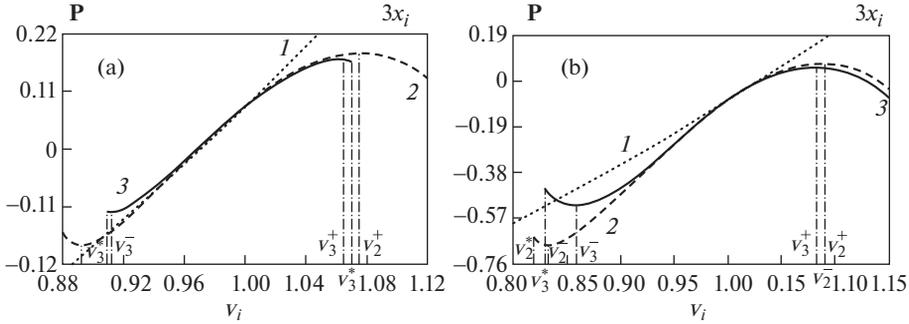
В качестве материала использовано металлическое стекло со следующими параметрами [22]:

$$\begin{aligned} \rho &= 9300 \text{ кг/м}^3, & \lambda &= 145.3 \text{ ГПа}, & \mu &= 35.8 \text{ ГПа} \\ \beta_1 &= -227 \text{ ГПа}, & \beta_2 &= -234 \text{ ГПа}, & \beta_3 &= -81.8 \text{ ГПа} \\ \gamma_1 &= -105828 \text{ ГПа}, & \gamma_2 &= 1555.6 \text{ ГПа}, & \gamma_3 &= 181 \text{ ГПа}, & \gamma_4 &= -298 \text{ ГПа} \end{aligned}$$

Упругие коэффициенты и начальные напряжения в приведенных ниже численных результатах отнесены к модулю сдвига μ изотропного материала в естественном состоянии (далее штрихи опущены)

$$P' = P/\mu, \quad G' = G/\mu, \quad C_{ijkl}^{*'} = C_{ijkl}^*/\mu$$

На фиг. 1 и 2 приведены эпюры начальных напряжений, необходимых для достижения требуемой деформации, рассчитанные без учета модулей высших порядков ($B_{2k} = B_{3k} = 0, k = 1, 2, 3$; пунктирные линии, кривые 1), с учетом упругих модулей III порядка ($B_{2k} \neq 0, B_{3k} = 0$, штриховые линии, кривые 2) и с учетом модулей упругости III и IV порядков ($B_{2k} \neq 0, B_{3k} \neq 0$, сплошные линии, кривые 3). На фиг. 1 представлены эпюры напряжений, рассчитанные для одноосных ($1x_i$, фиг. 1, а), двухосных ($2x_i$, фиг. 1, б) и гидростатического ($3x$, фиг. 1, с) состояний соответственно. Фиг. 2 иллюстрирует влияние учета модулей высших порядков на поведение напряжений для трехосных ($3x_i$) состояний, осложненных наличием постоянной статической составляющей G , равной 0.1 (фиг. 2, а) и -0.1 (фиг. 2, б). Как следует из графиков, присут-



Фиг. 2

ствие констант высших порядков приводит к значительной нелинейности зависимости “напряжения–деформации”. Символами v_k^* на фиг. 1 и 2 обозначены критические значения удлинений соответствующих кривой k ($k = 2, 3$), при которых начальные напряжения становятся комплекснозначными. Символами v_k^- и v_k^+ обозначены значения, при которых напряжения достигают локального минимума P_k^- или максимума P_k^+ , соответственно. В диапазоне $[v_k^-, v_k^+]$ выполняется условие взаимно однозначного соответствия “напряжения–деформации”, что свидетельствует о выполнении в этом диапазоне критерия $\sigma_{ii}^0 \Leftrightarrow (x_3, v_i)$ [5], определяющего внутреннюю устойчивость материала. Как следует из графиков, наличие констант высших порядков ограничивает диапазон удлинений, при которых материал сохраняет устойчивость. Учет констант IV порядка в большей степени сужает диапазон устойчивости. Наиболее чувствительным к потере устойчивости является 9-ти константный материал в гидростатическом состоянии.

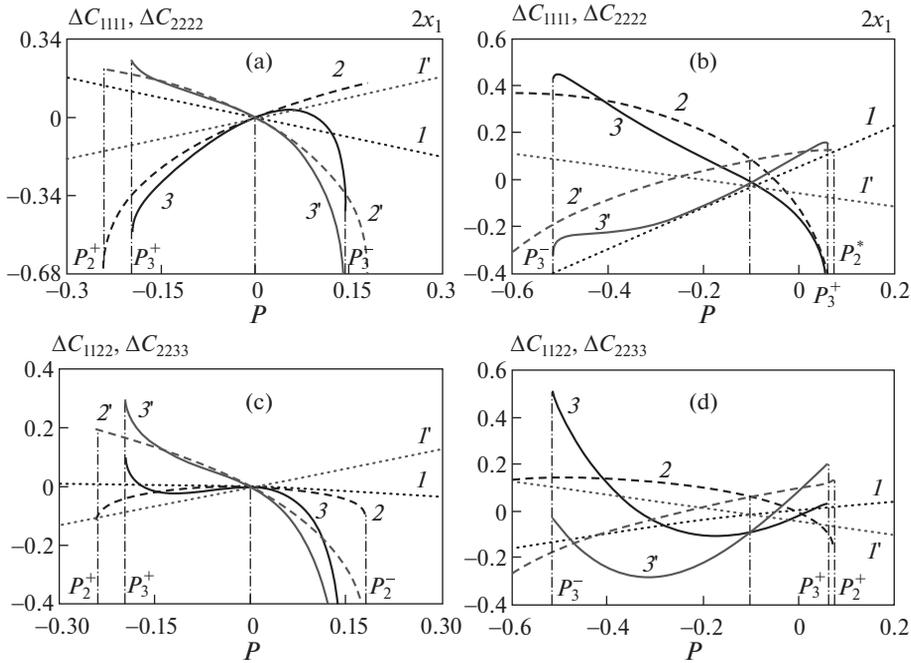
5. Влияние модулей высших порядков на свойства преднапряженного ПИУТ. В качестве тензора напряжений в предварительно напряженном упругом теле выступает тензор \mathbf{D}^\bullet (3.19) – линеаризованный тензор Пиола, участвующий в уравнениях движения (3.21) с граничными условиями (3.9), (3.22)–(3.25) в зависимости от задачи и типа среды. Влияние начальных напряжений на свойства первоначально изотропного материала отражают коэффициенты C_{ijkl}^* (3.20). Перепишем их в следующем виде [11]:

$$C_{ijkl}^* = \delta_{jk} P_i + C_{ijkl}^\times v_j v_k, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

Здесь C_{ijkl}^\times зависят от свойств материала и характера начальных воздействий

$$\begin{aligned} C_{iiii}^\times &= \lambda + 2\mu + 4(\beta_2 + 2\beta_3) S_i + (\beta_1 + 2\beta_2) I_1 + 4\left(\frac{7}{3}\gamma_3 + \gamma_4\right) S_i^2 + \\ &+ 4(\gamma_2 + 2\gamma_3) I_1 S_i + \left(\frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2\right) I_1^2 + (\gamma_2 + 2\gamma_4) I_2 \\ C_{ijij}^\times &= C_{ijji}^\times = \mu + 2\beta_3 (S_i + S_j) + \beta_2 I_1 + 2\gamma_3 I_1 (S_i + S_j) + \gamma_4 I_2 + \frac{1}{2}\gamma_2 I_1^2 \\ C_{ijij}^\times &= \lambda + 2\beta_2 (S_i + S_j) + \beta_1 I_1 + \frac{4}{3}\gamma_3 (4S_i^2 + 3S_j^2) + 2\gamma_2 (S_i + S_j) I_1 + \\ &+ 4\gamma_4 S_i S_j + \gamma_2 I_2 + \frac{1}{2}\gamma_1 I_1^2, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (5.2)$$

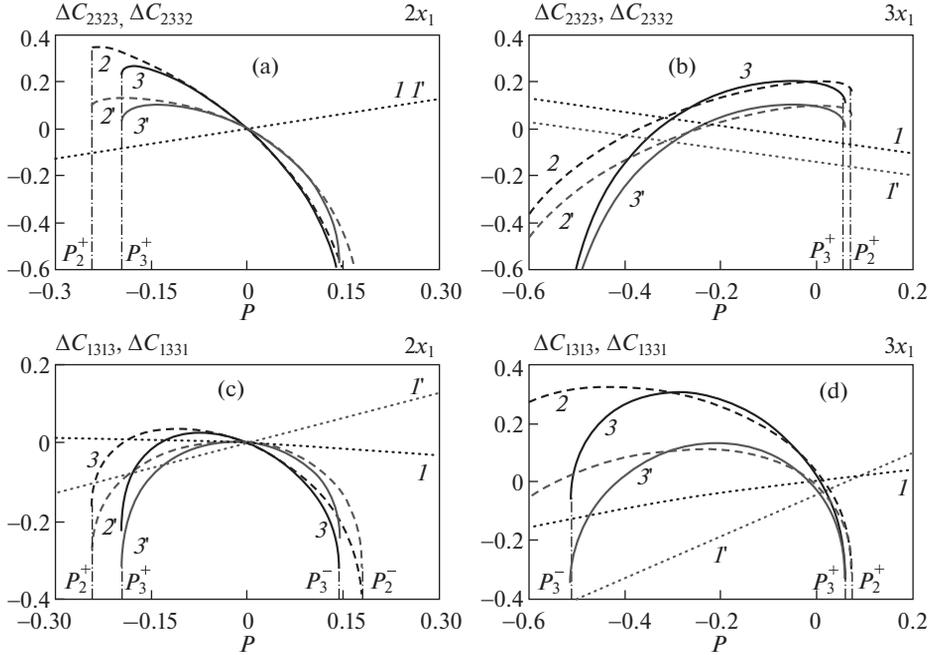
Все остальные коэффициенты C_{ijkl}^\times равны нулю.



Фиг. 3

Фиг. 3 и 4 иллюстрируют влияние деформации на четыре типа упругих коэффициентов в предварительно напряженном теле. На рисунках представлена зависимость ΔC_{ijkl} ($\Delta C_{ijkl} = (C_{ijkl}^* - C_{ijkl}^0)/C_{ijkl}^0$, где C_{ijkl}^0 – значения упругих модулей в естественном состоянии) от величины начальных напряжений для C_{iiii}^* , C_{ijij}^* (фиг. 3) и C_{ijji}^* , C_{ijij}^* (фиг. 4) при двухосном ($2x_1$, фиг. а и с) и трехосном ($3x_1, G = -0.1$, фиг. b и d) начальных воздействиях. Как и ранее, учет упругих модулей II порядка, II и III, а также II, III и IV порядков отмечены на фигурах пунктирными (кривые 1), штриховыми (кривые 2) и сплошными (кривые 3) линиями, соответственно. Кривые с отметками $I, 2, 3$ и $I', 2', 3'$ на фиг. 3, а, b соответствуют ΔC_{1111} и ΔC_{2222} , на фиг. 3, с, d – ΔC_{1122} и ΔC_{2233} , на фиг. 4, а, b – ΔC_{2323} и ΔC_{2332} , на фиг. 4, с, d – ΔC_{1313} и ΔC_{1331} .

Как видно из фиг. 3, 4 даже в области линейности по начальным напряжениям учет модулей высших порядков в предварительно напряженном теле приводит к существенным изменениям в поведении C_{ijkl}^* . Однако, при всех различиях в поведении C_{ijkl}^* следует отметить, что при одноосных, двухосных и гидростатическом начальных напряженных состояниях пересечения ΔC_{iiii} , ΔC_{ijij} , ΔC_{ijji} и ΔC_{ijij} с учетом различных приближений происходит в нуле ($P = 0$, фиг. 3 и 4, а, с). При этом значение $P = 0$ отвечает естественному состоянию. В случае несимметричного трехосного напряженного состояния ($3x_1, G = \pm 0.1$) или трехосного состояния общего вида значение $P = 0$ не соответствует естественному состоянию материала. Пересечение пар ΔC_{1111} и ΔC_{2222} , ΔC_{1122} и ΔC_{2233} , ΔC_{2323} и ΔC_{2332} , ΔC_{1313} и ΔC_{1331} в случае $3x_1, G = -0.1$ происходит в



Фиг. 4

некотором деформированном состоянии ($P \neq 0$, фиг. 3 и 4, b, d), значения в точках пересечения отлично от нуля и зависит как от характера начального напряженного состояния, так и от констант, учитываемых в соответствующих приближениях.

6. Линейное приближение. В случае малых начальных деформаций используется линейное приближение для инвариантов меры деформации:

$$v_k = 1 + \delta_k, \quad v_k^2 = 1 + 2\delta_k, \quad v_k v_i = 1 + \delta_k + \delta_i, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad i \neq k$$

$$S_k = \delta_k, \quad I_1 = s = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \quad I_2 = I_3 = 0$$

Коэффициенты χ_k (2.6) и χ_{km} (3.17) ($k, m = 1, 2, 3$) в линейном приближении выражаются формулами

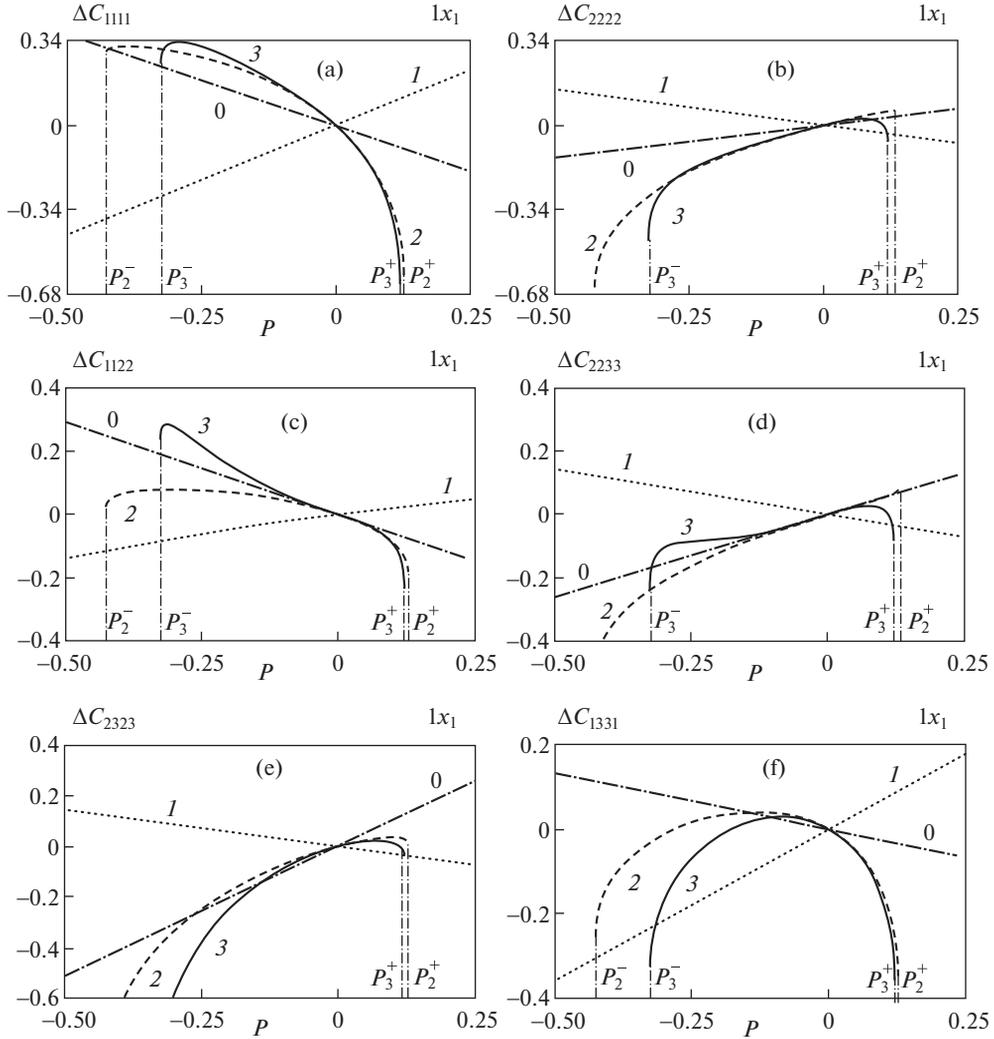
$$\chi_1 = \lambda s, \quad \chi_2 = \mu + \beta_2 s, \quad \chi_3 = \frac{4}{3}(\beta_3 + \gamma_3 s), \quad \chi_{11} = \lambda + \beta_1 s$$

$$\chi_{12} = \chi_{21} = \beta_2 + \gamma_2 s, \quad \chi_{22} = \gamma_4, \quad \chi_{13} = \chi_{31} = \frac{4}{3}\gamma_3, \quad \chi_{23} = \chi_{32} = \chi_{33} = 0$$

Компоненты тензора Кирхгофа (2.5) имеют простой вид:

$$P_k = \lambda s + 2\mu\delta_k, \quad k = 1, 2, 3$$

Коэффициенты S_{ijkl}^* , входящие в выражения для компонент линейризованного тензора напряжений Пиола (3.19), (3.20), при малых начальных деформациях записываются следующим образом ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$):



Фиг. 5

$$\begin{aligned}
 C_{iii}^* &= P_i + (\lambda + 2\mu)(1 + 2\delta_i) + \beta_1 s + 4\beta_2 \delta_i, & C_{ijj}^* &= \mu + (\mu + 2\beta_3)(\delta_i + \delta_j) \\
 C_{ijj}^* &= \lambda + \beta_1 s + (\lambda + 2\beta_2)(\delta_i + \delta_j), & C_{iji}^* &= P_i + \mu(1 + 2\delta_j) + 2\beta_3(\delta_i + \delta_j)
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

На фиг. 5 показано влияние учета нелинейности деформации на различные свойства преднапряженного материала при одноосном ($1x_1$) начальном воздействии. Как и на предыдущих графиках здесь представлены относительные изменения коэффициентов ΔC_{ijkl} , рассчитанных с учетом лишь упругих модулей II порядка (кривые 1), II и III порядков (кривые 2), и II, III и IV порядков (кривые 3), в зависимости от величины начальных напряжений. Цифрой 0 отмечены линейные по деформации приближения коэффициентов (6.1).

Из графиков следует, что чувствительность коэффициентов C_{ijkl}^* к нелинейности деформации заметно различается, однако для большинства коэффициентов существует область малых деформаций, в которой нелинейностью можно пренебречь. Таким образом, при оценке динамических, эксплуатационных и прочностных характеристик деталей, выполненных из искусственных высокотехнологических материалов, работающих под воздействием различного рода нагрузок, при решении широкого круга прикладных задач, а также задач контактного взаимодействия необходимо сочетать максимально точный учет свойств материала с возможностью получения достаточно простых и эффективных в использовании решений.

7. Заключение. В терминах отсчетной конфигурации проведена линейризация уравнений нелинейной механики деформируемого твердого тела в окрестности некоторого преднапряженного состояния равновесия. Использовалось специальное представление упругого потенциала через алгебраические инварианты тензора деформации Коши–Грина, содержащее модули высших порядков. Построены линейризованные определяющие соотношения и уравнения движения, учитывающие нелинейное влияние начальных деформаций на свойства ПИУТ. Исследовано влияние различных видов больших начальных деформаций на упругие коэффициенты первоначально изотропного материала. Показано значительное расхождение в поведении упругих модулей для предварительно напряженных двух-, пяти- и девятиконстантных материалов. При малых начальных деформациях для большей части упругих коэффициентов различия между линейным по деформации и нелинейными, связанными с учетом модулей высших порядков, приближениями в случае простых начальных воздействий незначительны. При сложных воздействиях разница в поведении коэффициентов становится существенной. Анализ показал, что использование линейного приближения при исследовании влияния начальных воздействий на упругие свойства первоначально изотропного материала более предпочтительно, чем использование модели двухконстантного материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14-19-01676) и Миннауки и высшего образования РФ (проект 01201354242).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. *Maugin G.A.* Continuum Mechanics of Electromagnetic solids. Elsevier science publishers. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1968. 598 p.
3. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 403 с.
5. *Murnaghan F.D.* Finite deformations of an elastic solid // Am. J. of Math. 1937. V. 59. № 2. P. 235–260.
6. *Hughes D.S., Kelly J.L.* Second-Order Elastic Deformation of Solids // Phys. Rev. 1953. V. 92. № 5. P. 1145–1149.
7. *Thurston R.N., Brugger K.* Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media // Phys. Rev. 1964. V. 133. № 6A. P. A1604–A1610.
8. *Smith R.T., Stern R., Stephens R.W.B.* Third-order elastic moduli of polycrystal line metals from ultrasonic velocity measurements // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. V. 40. № 5. P. 1002–1008.
9. *Секоян С.С.* О вычислении констант упругости третьего порядка по результатам ультразвуковых измерений // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 3. С. 453–457.
10. *Бакулин В.Н., Протосеня А.Г.* О наличии нелинейных эффектов при распространении упругих волн в горных породах // ДАН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 314–316.
11. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2008. 240 с.
12. *Hayes M., Rivlin R.S.* Propagation of plane wave in an isotropic elastic material subjected to pure homogeneous deformation // Arch. Ration Mech. and Analysis. 1961. V. 8. № 1. P. 15–22.
13. *Калинчук В.В., Полякова И.Б.* О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 6. С. 22–27.

14. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 1. Киев: Наук. думка, 1986. 376 с.
15. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 2. Киев: Наук. думка, 1986. 536 с.
16. Белянкова Т.И., Калинин В.В. О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 123–134.
17. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
18. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Особенности локализации волнового поля в преднапряженном функционально-градиентном слое // Физика и механика материалов. 2015. Т. 23. № 1. С. 25–30.
19. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Особенности локализации волнового поля в преднапряженном функционально-градиентном слое // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 3. С. 219–234.
20. Destrade M., Ogden R.W. On the third- and fourth-order constants of incompressible isotropic elasticity // J. Acoust. Soc. Am. 2010. V. 128. № 6. P. 3334–3344.
21. Shams M., Destrade M., Ogden R.W. Initial stresses in elastic solids: Constitutive laws and acoustoelasticity // Wave Motion. 2011. V. 48. P. 552–567.
22. Кобелев Н.П., Колыванов Е.Л., Хоник В.А. Упругие модули высших порядков объемного металлического стекла $Zr_{52.5}Ti_5Cu_{17.9}Ni_{14.6}Al_{10}$ // ФТТ. 2007. Т. 49. Вып. 7. С. 1153–1158.
23. Kobelev N.P., Khonik V.A., Makarov A.S., Afonin G.V., Mitrofanov Yu.P. On the nature of heat effects and shear modulus softening in metallic glasses: A generalized approach // J. of Appl. Phys. 2014. V. 115. P. 033513.
24. Кобелев Н.П., Колыванов Е.Л., Хоник В.А. Упругие модули высших порядков металлического стекла $Pd_{40}Cu_{30}Ni_{10}P_{20}$ // ФТТ. 2015. Т. 57. Вып. 8. С. 1457–1461.