

УДК 539.373,539.6,532.613.1

**ШАРООБРАЗНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В УПРУГОЙ МАТРИЦЕ
ПРИ НАЛИЧИИ СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ
С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА,
РАССМАТРИВАЕМОЙ КАК ПРЕДЕЛ СЛОЯ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ**

© 2019 г. В. А. Городцов^а, Д. С. Лисовенко^а, К. Б. Устинов^{а,*}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: ustino127@mail.ru

Поступила в редакцию 07.05.2018 г.

После доработки 07.05.2018 г.

Принята к публикации 04.06.2018 г.

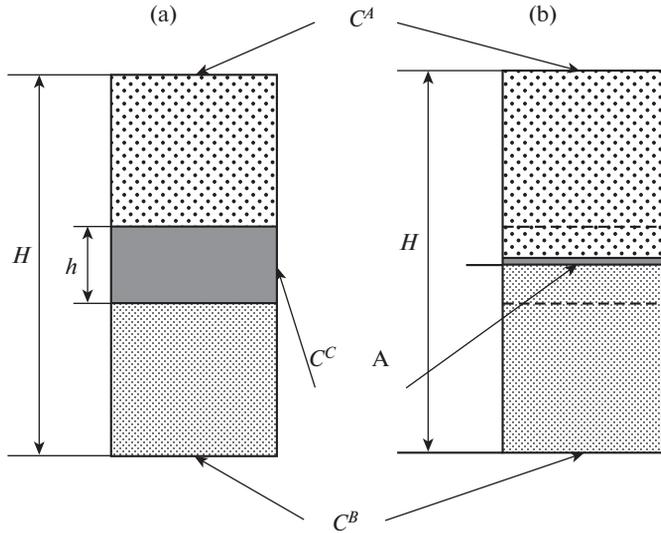
Ранее, авторами была предложена модель поверхностной упругости, в которой внутренняя граница раздела рассматривалась как тонкий структурированный слой, наделенный собственной упругостью. Переход к пределу бесконечно тонкой границы осуществлялся в два этапа. Для структурированной границы раздела сформулированы определяющие уравнения поверхностной упругости, обобщающие известные уравнения Шаттлворса. В настоящей работе такая модель дополнена граничными условиями на поверхности раздела и с ее помощью рассмотрена задача о сферически симметричном деформировании бесконечного тела с шарообразным включением.

Ключевые слова: деформация, прочность, напряжения

DOI: 10.1134/S0572329919030085

1. Введение. С уменьшением изучаемых пространственных масштабов вплоть до нанометровых из-за возрастающей роли влияния молекулярных взаимодействий для описания механического поведения материалов потребовалось обобщение классической теории упругости. В теории появляется масштабный эффект, отсутствующий в традиционной теории упругости. В частности, важным такой эффект оказывается в силу аномального молекулярного поведения приповерхностных слоев в материалах. Для описания подобного механического поведения материалов использовались как разнообразные варианты дискретного молекулярного моделирования [1–3], так и обобщения теории упругости с учетом особенностей поверхностной упругости в рамках подхода сплошной среды [4–8]. В работах авторов [9, 10] было предложено обобщение традиционной модели поверхностной упругости Шаттлворса, при котором определяющие соотношения на поверхности помимо напряжений и деформаций, действующих в плоскости границы, входят напряжения и деформации, нормальные к этой плоскости. В настоящей работе данная модель дополняется граничными условиями на поверхности раздела и с ее помощью рассматривается задача о сферически симметричном деформировании тела с шарообразным включением.

2. Модель поверхностной упругости для внутренней границы раздела. Следуя [9, 10] рассмотрим слой материала толщины h , заключенный между слоями других материалов, так что суммарная толщина всех трех слоев есть $H > h$. Все три материала будем полагать линейно-упругими трансверсально-изотропными с плоскостями изотропии параллельными границам раздела слоев (фиг. 1). На фиг. 1 представлена модель по-



Фиг. 1

верхностного слоя как предел слоя конечной толщины: (а) исходная конфигурация; (б) конечная конфигурация составного слоя. В системе координат с осью z , направленной по нормали к слоям, упругие свойства описываются набором упругих постоянных $C_{11}^i, C_{12}^i, C_{13}^i, C_{33}^i, C_{44}^i, C_{66}^i = (C_{11}^i - C_{22}^i)/2$ ($i = A$ для нижнего, $i = B$ для верхнего и $i = C$ – для среднего слоя). Рассмотрим однородное нагружение области рассматриваемой структуры, содержащей участок срединного слоя и прилегающие к нему участки вышележащего и нижележащего слоев, что соответствует слабо меняющемуся полю, когда характерные расстояния, на которых происходит существенное изменение, значительно превосходят размер рассматриваемого элемента.

Пусть в каждом из слоев могут присутствовать различные для каждого слоя собственные (свободные от напряжений) деформации ϵ_k^{PN} , $N = A, B, C$, $k = 1 \div 6$, так, что полные деформации ϵ_k^{TN} будут суммой упругих и собственных деформаций

$$\epsilon_k^{TN} = \epsilon_k^{PN} + \epsilon_k^N, \quad N = A, B, C, \quad k = 1 \div 6 \quad (2.1)$$

Выражение для упругой энергии, соответствующей исходной конфигурации имеет вид

$$U = U_0 + \frac{h}{2} C_{ij}^C (\epsilon_i^{TC} - \epsilon_i^{PC})(\epsilon_j^{TC} - \epsilon_j^{PC}) \quad (2.2)$$

Здесь U_0 – энергия вышележащего и нижележащего слоев.

Заменим теперь промежуточный упругий слой толщины h эквивалентным составным слоем, состоящим из слоя толщины $h' < h$ с некоторыми подлежащими определению свойствами и двух слоев толщиной $(h - h')/2$ со свойствами C_{ij}^A и C_{ij}^B , соответствующими исходным вышележащему и нижележащему слоям таким образом, чтобы при произвольной заданной деформации значения упругой энергии исходной и эквивалентной упругой системы совпадали. Затем, устремляя толщину нового слоя к нулю ($h' \rightarrow 0$) и изменяя при этом его упругие свойства так, чтобы сохранялась упругая

энергия, получим вместо структуры толщины H , состоявшей из двух слоев толщины $(H - h)/2$ и слоя толщины h между ними, эквивалентную структуру H , состоящую из двух слоев толщины $H/2$, соответствующих исходным материалам, и бесконечно тонкой поверхности между ними, наделенной такими новыми упругими свойствами A_{ij} , что при произвольной заданной деформации значения упругой энергии исходной и эквивалентной упругой системы совпадают. Упругие свойства эквивалентной поверхности при этом полностью описываются упругими константами A_{ij} , полученными в результате указанного предельного перехода.

Выражение для эффективной энергии составного слоя (т.е. слоя, состоящего из нового, бесконечно тонкого, слоя и двух слоев, заполненных материалами вышележащего и нижележащего слоев) можно записать как

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}} = & U_0 + \frac{h}{4} C_{ij}^A (\varepsilon_i^{TA} - \varepsilon_i^{PA}) (\varepsilon_j^{TA} - \varepsilon_j^{PA}) + \frac{h}{4} C_{ij}^B (\varepsilon_i^{TB} - \varepsilon_i^{PB}) (\varepsilon_j^{TB} - \varepsilon_j^{PB}) + \\
& + \frac{A_{ij}^{EE}}{2} \varepsilon_i^{ED} \varepsilon_i^{ED} + A_{ij}^{EP} \varepsilon_i^{ED} \varepsilon_i^{PD} + \frac{A_{ij}^{PP}}{2} \varepsilon_i^{PD} \varepsilon_i^{PD} + A_{ij}^{EA} \varepsilon_i^{ED} \varepsilon_i^{PA} + A_{ij}^{EB} \varepsilon_i^{ED} \varepsilon_i^{PB} + \\
& + A_{ij}^{PA} \varepsilon_i^{PD} \varepsilon_i^{PA} + A_{ij}^{PB} \varepsilon_i^{PD} \varepsilon_i^{PB} + A_{ij}^{AB} \varepsilon_i^{PA} \varepsilon_i^{PB} + \frac{A_{ij}^{AA}}{2} \varepsilon_i^{PA} \varepsilon_i^{PA} + \frac{A_{ij}^{BB}}{2} \varepsilon_i^{PB} \varepsilon_i^{PB}
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{TD} &= \{\varepsilon_1^{TC}, \varepsilon_2^{TC}, [u_3^T], [u_2^T], [u_1^T], \varepsilon_6^{TC}\}^T \\
\varepsilon^{PD} &= \{\varepsilon_1^{PC}, \varepsilon_2^{PC}, [u_3^P], [u_2^P], [u_1^P], \varepsilon_6^{PC}\}^T \\
\varepsilon^{ED} &= \varepsilon^{TD} - \varepsilon^{PD}
\end{aligned} \quad (2.4)$$

где $[u_3^T]$, $[u_2^T]$, $[u_1^T]$ и $[u_3^P]$, $[u_2^P]$, $[u_1^P]$ – скачки полного смещения и смещения, соответствующего собственным деформациям (возможность такого разложения обусловлена исключительно высокой степенью симметрии рассматриваемой задачи). Матрицы A_{ij} с одинаковыми верхними (нетензорными) индексами – симметричны, матрицы с неодинаковыми верхними индексами – не обязаны быть симметричными. Введенные таким образом коэффициенты A_{ij} дают квадратичную форму наиболее общего вида для упругой энергии. Как показано в [9], именно такая форма позволяет найти свойства эффективного бесконечно тонкого слоя для произвольных упругих параметров внешних слоев.

Для скачков смещения должны выполняться условия совместности, отдельно для полной и собственной деформации

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2} \varepsilon_k^{TA} + \frac{h}{2} \varepsilon_k^{TB} + [u_1^T] &= h \varepsilon_k^{TC} \\
\frac{h}{2} \varepsilon_k^{PA} + \frac{h}{2} \varepsilon_k^{PB} + [u_1^P] &= h \varepsilon_k^{PC} \quad k = 3, 4, 5
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Кроме того, должно выполняться равенство напряжений σ_3 , σ_4 , σ_5 в слоях A , B , C , соответственно

$$\begin{aligned}
C_{33}^A (\varepsilon_{T3}^A - \varepsilon_{P3}^A) + C_{13}^A (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1^{PA} - \varepsilon_2^{PA}) = \\
= C_{13}^C (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1^{PC} - \varepsilon_2^{PC}) + C_{33}^C (\varepsilon_3^{TC} - \varepsilon_3^{PC}) = \\
= C_{33}^B (\varepsilon_3^{TB} - \varepsilon_3^{PB}) + C_{13}^B (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1^{PB} - \varepsilon_2^{PB})
\end{aligned} \quad (2.6)$$

$$C_{44}^A(\varepsilon_k^{TA} - \varepsilon_k^{PA}) = C_{44}^B(\varepsilon_k^{TB} - \varepsilon_k^{PB}) = C_{44}^C(\varepsilon_k^{TC} - \varepsilon_k^{PC}) \quad (2.7)$$

$$k = 4, 5$$

Подстановка условий (2.5)–(2.7) в выражение для упругой энергии (2.3) дает выражение для энергии системы, эквивалентной исходной (2.2), и выраженной через те же кинематические переменные, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3^{EC}, \varepsilon_4^{EC}, \varepsilon_5^{EC}, \varepsilon_6, \varepsilon_k^{PN}$, $N = A, B, C$, $k = 1 \div 6$. Для того, чтобы системы были эквивалентны, равенство $U = U_{eff}$ должно выполняться для любого сочетания указанных кинематических переменных.

При отсутствии собственных деформаций полные деформации равны упругим, матрица, обозначенная A_{ij}^{EE} , соответствует матрице, обозначенной A_{ij} в [10], ненулевые компоненты которой имеют вид

$$A_{11}^{EE} = A_{22}^{EE} = A_{12}^{EE} + 2A_{66}^{EE} \quad (2.8)$$

$$A_{12}^{EE} = A_{21}^{EE} = \frac{h}{4C_{33}^A C_{33}^B - 2C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)} [C_{13}^{B2}(2C_{33}^A - C_{33}^C) + C_{13}^{A2}(2C_{33}^B - C_{33}^C) + 2C_{13}^{C2}(C_{33}^A + C_{33}^B) - 4C_{13}^B C_{13}^C C_{33}^A - 4C_{13}^A C_{13}^C C_{33}^B + 2C_{13}^A C_{13}^B C_{33}^C - (2C_{12}^C - C_{12}^A - C_{12}^B)(C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B) - 2C_{33}^A C_{33}^B)] \quad (2.9)$$

$$A_{13}^{EE} = A_{23}^{EE} = A_{31}^{EE} = A_{32}^{EE} = \frac{(C_{13}^B C_{33}^A + C_{13}^A C_{33}^B)C_{33}^C - 2C_{13}^C C_{33}^A C_{33}^B}{C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B) - 2C_{33}^A C_{33}^B} \quad (2.10)$$

$$A_{33}^{EE} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{C_{33}^C} - \frac{1}{2C_{33}^A} - \frac{1}{2C_{33}^B} \right)^{-1} \quad (2.11)$$

$$A_{44}^{EE} = A_{55}^{EE} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{C_{44}^C} - \frac{1}{2C_{44}^A} - \frac{1}{2C_{44}^B} \right)^{-1} \quad (2.12)$$

$$A_{66}^{EE} = \frac{h}{2} \left(C_{11}^C - C_{12}^C - \frac{C_{11}^A - C_{22}^A}{2} - \frac{C_{11}^B - C_{22}^B}{2} \right) = h \left(C_{66}^C - \frac{C_{66}^A + C_{66}^B}{2} \right) \quad (2.13)$$

Если собственные деформации присутствуют только в среднем слое, то достаточно знать выражения для матриц A_{ij}^{EP} и A_{ij}^{PP} .

$$A_{11}^{PP} = A_{22}^{PP} = A_{12}^{PP} + 2A_{66}^{PP}$$

$$A_{12}^{PP} = A_{21}^{PP} = -\frac{h}{2} \left[C_{12}^A + C_{12}^B + \frac{C_{13}^{A2}(2C_{33}^B - C_{33}^C) + C_{13}^{B2}(2C_{33}^A - C_{33}^C) + 2C_{13}^A C_{13}^B C_{33}^C}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)} \right]$$

$$A_{66}^{PP} = -\frac{h}{4} (C_{11}^A - C_{12}^A + C_{11}^B - C_{12}^B) = -\frac{h}{2} (C_{66}^A + C_{66}^B) \quad (2.14)$$

Для перекрестного члена

$$A_{11}^{EP} = A_{22}^{EP} = A_{12}^{EP} + 2A_{66}^{EP}$$

$$A_{12}^{EP} = A_{21}^{EP} = A_{12}^{PP} - h \frac{C_{13}^C(C_{33}^A C_{33}^B + C_{33}^B C_{33}^A)}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)}$$

$$A_{31}^{EP} = A_{32}^{EP} = -\frac{C_{33}^C(C_{13}^B C_{33}^A + C_{13}^A C_{33}^B)}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)}$$

$$A_{66}^{EP} = A_{66}^{PP} \quad (2.15)$$

Если собственные деформации присутствуют также в слое А, то необходимо знать выражения для матриц A_{ij}^{AA} , A_{ij}^{EA} и A_{ij}^{PA} . Их ненулевые компоненты равны

$$\begin{aligned} A_{11}^{AA} &= A_{22}^{AA} = A_{12}^{AA} + 2A_{66}^{AA} \\ A_{66}^{AA} &= -\frac{h}{4}(C_{11}^A - C_{12}^A) = -\frac{h}{2}C_{66}^A \\ A_{12}^{AA} &= A_{21}^{AA} = \frac{h}{2} \left[-C_{12}^A + \frac{C_{13}^{A2}(2C_{33}^B - C_{33}^C)}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} A_{11}^{EA} &= A_{22}^{EA} = A_{12}^{EA} + 2A_{66}^{EA} \\ A_{12}^{EA} &= A_{21}^{EA} = -A_{12}^{AA} + \frac{h}{2} \frac{C_{13}^A(2C_{33}^B C_{13}^C - C_{13}^B C_{33}^C)}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)} \\ A_{31}^{EA} &= A_{32}^{EA} = \frac{C_{13}^A C_{33}^B C_{33}^C}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)} \\ A_{66}^{EA} &= \frac{h}{4}(C_{11}^A - C_{12}^A) = \frac{h}{2}C_{66}^A \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} A_{11}^{PA} &= A_{22}^{PA} = A_{12}^{PA} + 2A_{66}^{PA} \\ A_{12}^{PA} &= A_{21}^{PA} = A_{12}^{EE} - h \frac{C_{13}^A C_{33}^B C_{13}^C}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)} \\ A_{66}^{PA} &= \frac{h}{4}(C_{11}^A - C_{12}^A) = \frac{h}{2}C_{66}^A \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если собственные деформации присутствуют также в слое В, то необходимо знать матрицы A_{ij}^{BB} , A_{ij}^{EB} , A_{ij}^{PB} и A_{ij}^{AB} , причем выражения для ненулевых компонент первых из трех матриц получаются заменой индексов А на В, и В на А в формулах (2.16)–(2.18). Ненулевые компоненты A_{ij}^{AB} равны

$$A_{11}^{AB} = A_{22}^{AB} = A_{12}^{AB} = A_{21}^{AB} = \frac{h}{2} \frac{C_{13}^A C_{13}^B C_{33}^C}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C(C_{33}^A + C_{33}^B)} \quad (2.19)$$

Выражения (2.14)–(2.19) получены в [9] и представлены здесь с учетом исправления опечаток.

Для того чтобы воспользоваться потенциальными преимуществами использования поверхностной упругости, связанными с возможностью заменить рассмотрение деформирования реальных трехмерных объектов описанием специфических граничных условий на двумерной границе, необходимо выписать эти граничные условия. Для этого нужно величины (напряжения, деформации и смещения), связанные с поверхностью раздела, выразить через граничные значения соответствующих величин прилегающих к поверхности раздела областей и связать их необходимым количеством уравнений. Необходимые уравнения получим по теореме Лагранжа (согласно которой в частном случае напряжения есть производные от упругой энергии по упругим де-

формациям), продифференцировав выражения для упругой энергии (2.3) по компонентам упругих деформаций в слое

$$\sigma_i^s = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_i^s} = A_{ij}^{EE} \varepsilon_i^{ED} + A_{ij}^{EP} \varepsilon_j^{PD} + A_{ij}^{TA} \varepsilon_j^{PA} + A_{ij}^{EB} \varepsilon_j^{PB} \quad (2.20)$$

Получившиеся уравнения являются уравнениями обобщенного закона Гука для поверхности раздела при наличии собственных деформаций, в которых ε_j^{PA} , ε_j^{PB} – собственные деформации прилегающих слоев, ε_j^{ED} , ε_j^{PD} – упругие и собственные деформации поверхности раздела, определяемые (2.4).

Здесь следует сделать некоторые уточнения. Поскольку, следуя концепции Гиббса [11], под поверхностными величинами всюду понимается интеграл по нормали от избытка соответствующих величин в приповерхностном слое по сравнению с массивом, то продольные компоненты деформаций (как и нормальные компоненты напряжения) не являются поверхностными величинами. Более того, поскольку компоненты деформации в плоскости поверхности раздела в общем случае претерпевают разрыв, под продольными деформациями поверхности раздела логично понимать полусумму продольных деформаций прилегающих слоев

$$\varepsilon^{TD} = \left\{ \frac{\varepsilon_1^{TA} + \varepsilon_1^{TB}}{2}, \frac{\varepsilon_2^{TA} + \varepsilon_2^{TB}}{2}, u_3^{TB} - u_3^{TA}, u_2^{TB} - u_2^{TA}, u_1^{TB} - u_1^{TA}, \frac{\varepsilon_6^{TA} + \varepsilon_6^{TB}}{2} \right\}^T \quad (2.21)$$

Аналогичная ситуация имеет место для напряжений – компоненты напряжения по нормали к поверхности раздела в общем случае также терпят разрыв за счет сил, возникающих в поверхности раздела, воспринимающей часть нагрузки при наличии кризисы подобно оболочке. Здесь также для компонент, терпящих разрыв, логично понимать полусуммы напряжений на противоположных сторонах поверхности

$$\sigma^S = \left\{ \sigma_1^S, \sigma_2^S, \frac{\sigma_3^A + \sigma_3^B}{2}, \frac{\sigma_4^A + \sigma_4^B}{2}, \frac{\sigma_5^A + \sigma_5^B}{2}, \sigma_6^S \right\}^T \quad (2.22)$$

Условия (2.20), (2.21), (2.22) вместе с уравнениями равновесия на поверхности (уравнениями Лапласа–Юнга)

$$\sigma^A - \sigma^B = \nabla_s \sigma^S \quad (2.23)$$

и являются граничными условиями на поверхности раздела. Здесь ∇_s – двумерный градиент в системе координат, связанной с поверхностью.

Для иллюстрации приведем таблицу (таблица 1), показывающую различие условия полного контакта, пружинного (винклеровского) взаимодействия (например, [12]), контакта типа классической поверхностной упругости, контакта типа обобщенной поверхностной упругости (рассматриваемая модель, для простоты ограниченная случаем отсутствия собственных деформаций).

Подчеркнем, что рассматриваемые определяющие соотношения (2.20) за счет присутствия перекрестных членов не сводятся к сумме пружинного взаимодействия и традиционной поверхностной упругости.

3. Задача о шарообразном включении в бесконечной среде в гидростатическом внешнем поле. Рассмотрим задачу о шарообразном включении радиуса R в бесконечной упругой среде при наличии контакта указанного типа. Для простоты ограничимся рассмотрением случая изотропной среды и изотропного включения; границу раздела будем предполагать трансверсально изотропной с плоскостью изотропии совпадающей в каждой точке с касательной к границе раздела. Общее решение уравнений упругости для полей смещений, деформаций и напряжений внутри и вне включения

Таблица 1

Полный контакт	Винклеровский слой	Поверхностная упругость	Обобщенная поверхностная упругость
Кинематические условия			
$[u_i] = 0$	$[u_i] = \varepsilon_{ni}^S$	$[u_i] = 0$	$[u_i] = \varepsilon_{ni}^S$
Статические условия			
$[\sigma_{ni}] = 0$	$[\sigma_{ni}] = 0$	$[\sigma_{ni}] = \nabla_s \sigma_{\alpha\beta}^s$ Уравнение Лапласа–Юнга	
Дополнительные переменные			
–	ε_{ni}^S – 3 скачка смещения	$\sigma_{\alpha\beta}^s$ – 3 компоненты поверхностного напряжения	$\varepsilon_{ni}^S, \sigma_{\alpha\beta}^s$ – 6 единиц (3 скачка смещения и 3 компоненты поверхностного напряжения)
Дополнительные уравнения			
–	$\mu_{(i)}^S \varepsilon_{ni}^S = \sigma_{ni}$ уравнения Винклера	$\sigma_{\alpha\beta}^s = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}$ уравнения Шаттлворса	$\sigma_i^s = A_{ij}^{TT} \varepsilon_i^S$ предлагаемые уравнения

имеют вид (приведенный к удобным для рассматриваемой задачи обозначениям), например [13]

$$\begin{aligned}
 u^K &= C_1^K r + \frac{C_2^K}{r^2}, & \varepsilon_{rr}^K &= \frac{du^K}{dr} = C_1^K - \frac{2C_2^K}{r^3}, & \varepsilon_{\theta\theta}^K &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^K = \frac{u^K}{r} = C_1^K + \frac{C_2^K}{r^3} \\
 \sigma_{rr}^K &= (\lambda^K + 2\mu^K) \varepsilon_{rr}^K + 2\lambda^K \varepsilon_{\theta\theta}^K = 3K^K C_1^K - \frac{4\mu^K C_2^K}{r^3} \\
 \sigma_{\theta\theta}^K &= 2(\lambda^K + \mu^K) \varepsilon_{\theta\theta}^K + \lambda^K \varepsilon_{rr}^K = 3K^K C_1^K + \frac{2\mu^K C_2^K}{r^3} \\
 K &= A, B, & C_2^A &= 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $K = A, B$ для внутренней и внешней областей соответственно; C_1^B определяет поле на бесконечности, в случае гидростатического растяжения σ^∞ ,

$$C_1^B = \frac{\sigma^\infty}{3K^B} \tag{3.2}$$

Для определения двух оставшихся неизвестных C_1^A, C_2^B воспользуемся условиями (2.20), (2.23), которые для рассматриваемого случая отсутствия собственных деформаций и сферической симметрии преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{2} (\sigma_{rr}^B - \sigma_{rr}^A) - (A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE}) \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^A + \varepsilon_{\theta\theta}^B}{2} - A_{13}^{EE} (u^B - u^A) &= 0 \Big|_{r=R} \\
 \frac{\sigma_{rr}^A + \sigma_{rr}^B}{2} &= A_{33}^{EE} (u^B - u^A) + A_{31}^{EE} (\varepsilon_{\theta\theta}^A + \varepsilon_{\theta\theta}^B) \Big|_{r=R}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь A_{ij}^{EE} – константы поверхностной упругости. Вычисление величин C_1^A, C_2^B не представляет трудности.

Рассмотрим случай, когда поверхностные величины A_{ij}^{EE} соответствуют слою конечной толщины h и определяются формулами (2.8)–(2.13). Дальнейшие вычисления любых компонент напряжений и смещений не представляют труда. Выпишем, например, коэффициент концентрации деформации (отношение деформации во включении к деформации на бесконечности) для изотропных фаз с точностью до одного члена разложения по параметру h/R

$$\frac{\varepsilon^A}{\varepsilon^\infty} = \frac{3(\lambda^B + 2\mu^B)}{3K^A + 4\mu^B} - \frac{36(\lambda^B + 2\mu^B)(K^A - K^C)(\mu^B - \mu^C)}{(3K^A + 4\mu^B)^2(\lambda^C + 2\mu^C)} \frac{h}{R} + O\left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (3.4)$$

Здесь $K^N, \lambda^N, \mu^N, N = A, B, C$ – объемные модули и константы Ламе материалов.

Сравним полученное решение с решением задачи о шаровом включении при наличии промежуточного слоя конечной толщины. Для этого вновь воспользуемся формулами (3.1), в которых положим $k = A, B, C, C_2^A = 0$, где индекс C соответствует промежуточному слою, толщину которого положим равной h . Граничные условия полного контакта будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^A - \sigma_{rr}^C &= 0 \Big|_{r=R-h/2} \\ \sigma_{rr}^B - \sigma_{rr}^C &= 0 \Big|_{r=R+h/2} \\ u^A - u^C &= 0 \Big|_{r=R-h/2} \\ u^B - u^C &= 0 \Big|_{r=R+h/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение системы (3.5) с учетом выражений для напряжений и смещений (3.1) дает значения констант $C_1^A, C_2^B, C_1^C, C_2^C$, подстановка которых в (3.1) дает решение задачи. Отметим, что вычисленный таким образом коэффициент концентрации деформации для изотропных фаз с точностью до одного члена разложения по малому параметру h/R совпадает с результатом (3.4), полученным на основе рассмотренной модели.

Рассмотрим решение, получаемое в постановке классической поверхностной упругости. Граничные условия при этом [14–16] имеют в используемых обозначениях вид

$$\begin{aligned} \frac{R}{2}(\sigma_{rr}^B - \sigma_{rr}^A) - (A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE})\varepsilon_{\theta\theta}^A &= 0 \Big|_{r=R} \\ (u^B - u^A) &= 0 \Big|_{r=R} \Rightarrow \varepsilon_{\theta\theta}^A = \varepsilon_{\theta\theta}^B \Big|_{r=R} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подстановка (3.6) в (3.1) дает

$$\begin{aligned} C_1^A/C_1^B &= \frac{3(\lambda^B + 2\mu^B)}{2(A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE})/R + 3K^A + 4\mu^B} \\ C_2^B/C_1^B &= R^3 \left[1 + \frac{3(\lambda^B + 2\mu^B)}{2(A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE})/R + 3K^A + 4\mu^B} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подстановка (3.7) в (3.1) дает решение задачи, совпадающее с точностью до обозначений с решением [14]. Для сравнения коэффициент концентрации деформации, вычисленный аналогично (3.4),

$$\frac{\varepsilon^A}{\varepsilon^\infty} = \frac{3(\lambda^B + 2\mu^B)}{3K^A + 4\mu^B} - \frac{12(\lambda^B + 2\mu^B)(\lambda^C + \mu^C)}{(3K^A + 4\mu^B)^2} \frac{h}{R} + O\left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (3.8)$$

в общем случае не совпадает с (3.4).

4. Задача о шарообразном включении при наличии собственных сферически симметричных деформаций во включении и в поверхностном слое. Рассмотрим аналогичную задачу, но при наличии собственных деформаций во включении и на поверхности раздела и при отсутствии внешнего поля. Общее решение уравнений упругости для полей смещений, деформаций и напряжений внутри и вне включения будет иметь вид

$$\begin{aligned} u^K &= C_1^K r + \frac{C_2^K}{r^2}, \quad \varepsilon_{rr}^K = \frac{du^K}{dr} = C_1^K - \frac{2C_2^K}{r^3}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^K = \varepsilon_{\phi\phi}^K = \frac{u^K}{r} = C_1^K + \frac{C_2^K}{r^3}, \\ \sigma_{rr}^K &= (\lambda^K + 2\mu^K)(\varepsilon_{rr}^{TK} - \varepsilon_{rr}^{PK}) + 2\lambda^K(\varepsilon_{\theta\theta}^{TK} - \varepsilon_{\theta\theta}^{PK}) \\ \sigma_{\theta\theta}^K &= 2(\lambda^K + \mu^K)(\varepsilon_{\theta\theta}^{TK} - \varepsilon_{\theta\theta}^{PK}) + \lambda^K(\varepsilon_{rr}^{TK} - \varepsilon_{rr}^{PK}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$K = A, B, \quad C_2^A = C_1^B = 0,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{PB} = \varepsilon_{rr}^{PB} = 0, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{PA} = \varepsilon_{rr}^{PA} = \varepsilon^0$$

Здесь $K = A, B$, по-прежнему, для внутренней и внешней областей соответственно. В качестве параметров, определяющих поле напряжений, выступают три величины собственных деформаций: собственные деформации в шаровом включении $\varepsilon_{\theta\theta}^{PA} = \varepsilon_{rr}^{PA} = \varepsilon^0$ и, вообще говоря, различные окружные и радиальные собственные деформации на поверхности раздела $\varepsilon_{\theta\theta}^{PD}, \varepsilon_{rr}^{PD}$.

Для определения констант C_1^A, C_2^B вновь воспользуемся комбинациями условий (2.20), (2.23), которые для рассматриваемого случая наличия собственных деформаций и сферической симметрии преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{R}{2}(\sigma_{rr}^B - \sigma_{rr}^A) - (A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE}) \left(\frac{\varepsilon_{\theta\theta}^A + \varepsilon_{\theta\theta}^B}{2} - \varepsilon_{\theta\theta}^{PD} \right) - A_{13}^{EE} (u^B - u^A - \varepsilon_{rr}^{PD}) - \\ - (A_{11}^{EA} + A_{12}^{EA} + A_{13}^{EA}) \varepsilon^0 - (A_{11}^{EP} + A_{12}^{EP}) \varepsilon_{\theta\theta}^{PD} - A_{13}^{EP} \varepsilon_{rr}^{PD} = 0 \Big|_{r=R} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}^A + \sigma_{rr}^B}{2} = A_{33}^{EE} (u^B - u^A - \varepsilon_{rr}^{PD}) + A_{31}^{EE} (\varepsilon_{\theta\theta}^A + \varepsilon_{\theta\theta}^B - 2\varepsilon_{\theta\theta}^{PD}) + \\ + (2A_{31}^{EA} + A_{33}^{EA}) \varepsilon^0 + 2A_{31}^{EP} \varepsilon_{\theta\theta}^{PD} + A_{33}^{EP} \varepsilon_{rr}^{PD} \Big|_{r=R} \end{aligned}$$

Пусть поверхностные величины A_{ij}^{EE} соответствуют слою конечной толщины h и определяются формулами (2.8)–(2.13). Выпишем, например, отношение полной деформации во включении к собственной деформации во включении (данное отношение является комбинацией компонент тензора Эшелби для рассматриваемой задачи). Рассмотрим два варианта: собственные деформации в слое толщины h отсутствуют и собственные деформации в данном слое равны собственным деформациям в шарообразном включении.

Для первого варианта эффективные собственные деформации в бесконечно тонком слое согласно (2.5) имеют вид

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{PD} = 0, \quad \varepsilon_{rr}^{PD} = -\varepsilon^0 h/2 \quad (4.3)$$

Тогда в случае изотропных фаз с точностью до линейного члена разложения по параметру h/R искомое отношение деформаций имеет вид

$$\frac{\varepsilon^A}{\varepsilon^0} = \frac{3K^A}{3K^A + 4\mu^B} + \frac{12K^A(\mu^B - \mu^C)(3K^C + 4\mu^B)h}{(3K^A + 4\mu^B)^2(\lambda^C + 2\mu^C)R} + O\left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (4.4)$$

Для второго из указанных вариантов эффективные собственные деформации в бесконечно тонком слое согласно (2.5) имеют вид

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{PD} = \varepsilon^0, \quad \varepsilon_{rr}^{PD} = \varepsilon^0 h/2 \quad (4.5)$$

Теперь в случае изотропных фаз с точностью до линейного члена разложения по параметру h/R получим

$$\frac{\varepsilon^A}{\varepsilon^0} = \frac{3K^A}{3K^A + 4\mu^B} + \frac{48\mu^B(\mu^B - \mu^C)(K^A - K^C)h}{(3K^A + 4\mu^B)^2(\lambda^C + 2\mu^C)R} + O\left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (4.6)$$

Сравним полученные решения с решениями задач о шаровом включении при наличии промежуточного слоя конечной толщины. Для этого вновь воспользуемся формулами (4.1), в которых положим $k = A, B, C$, $C_2^A = 0$, где индекс C соответствует промежуточному слою, толщину которого положим равной h . Граничные условия полного контакта имеют по-прежнему вид (3.5). Решение системы (3.5) с учетом выражений для напряжений и смещений (4.1) дает значения констант C_1^A , C_2^B , C_1^C , C_2^C , и следовательно дает решение задачи. Вычисленные таким образом отношения полных деформаций к собственным деформациям включения для изотропных фаз с точностью до одного члена разложения по параметру h/R совпадают с результатами (4.4) и (4.6) для отсутствия и наличия собственных деформаций в промежуточном слое, соответственно.

Следует отметить связь полученных результатов с результатами [17, 18]. Так в работе [17] получено решение для “лукообразных” структур – шарового включения, окруженного конечным числом концентрических сферических слоев конечной толщины при наличии собственных деформаций во всех слоях. Полученные выше решения соответствуют случаю единственного слоя, толщина которого устремлена к нулю. Однако в указанной работе подобный проделанному в настоящей работе предельный переход осуществлен не был. В работе [18] результаты [17] были обобщены на случай наличия традиционной поверхностной упругости (без собственных поверхностных деформаций) между слоями. При такой постановке возникает естественный вопрос о выборе отсчетной конфигурации для промежуточного слоя. Этот вопрос обсуждался в работах авторов [19, 20], где в постановке традиционной поверхностной упругости была решена задача о произвольных (не осесимметричных) собственных деформациях шарового включения и поверхностного слоя.

Заключение. В рамках предложенной ранее авторами модели обобщенной поверхностной упругости сформулированы граничные условия на границе раздела материалов. Рассмотрены задачи о сферически симметричном деформировании бесконечного тела с шарообразным включением при наличии внешнего поля и собственных деформаций во включении и промежуточном слое. Сравнение полученных решений с решениями для поверхностного слоя малой, но конечной толщины дает совпадения главных членов разложения по отношению толщины поверхностного слоя к радиусу включения, в то время как для решений, полученных в приближении традиционной теории поверхностной упругости, подобное совпадение отсутствует.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН I.16.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Особенности расчета изгибной жесткости нанокристаллов // ДАН. 2002. Т. 385. № 4. С. 494–496.
2. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. Дискретно-континуальная модель нанотрубки // Известия РАН. МТТ. 2005. № 4. С. 57–74.

3. *Odegard G.M.* Equivalent-continuum modeling of nanostructured materials. In: Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology / M. Rieth and W. Schommers, Eds. American Sci. Publ., 2006.
4. *Shuttleworth R.* The surface tension of solids // Proc. Phys. Soc. 1950. V. A63. № 5. P. 444–457.
5. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. Anal. 1975. V. 57. № 4. P. 291–323; 1975. V. 59. № 4. P. 389–390.
6. *Murdoch A.I.* Some fundamental aspects of surface modeling // J. Elasticity. 2005. V. 80. P. 33–52.
7. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Киев: Наук. думка, 1985. 200 с.
8. *Ibach H.* The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures // Surf. Sci. Rep. 1997. V. 29. № 5–6. P. 195–263.
9. *Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A.* On the Modeling of Surface and Interface Elastic Effects in Case of Eigenstrains. Models, Simulations and Applications. Series: Advanced Structured Materials / Altenbach H., Morozov N.F., Eds. 2013. XV. 30. P. 167–180.
10. *Гольдштейн П.В., Городцов В.А., Устинов К.Б.* О построении теории поверхностной упругости для плоской границы // Физ. мезомех. 2013. Т. 16. № 4. С. 75–83.
11. *Gibbs J.W.* The equilibrium of heterogeneous substances. In the collected works of J.W. Gibbs, New York: Longmans, Green and Co., 1928. P. 108–248.
12. *Hashin Z.* Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface // J. Mech. Phys. Solids. 1991. V. 39. № 6. P. 745–762.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
14. *Sammarata R.C.* Surface and interface stress effects in thin films // Progr. Surf. Sci. 1994. V. 46. № 1. P. 1–38.
15. *Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karimhaloo B.L.* Eshelby formalism for nanoinhomogeneities // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 2005. V. 461. № 2062. P. 3335–3353.
16. *Duan H.L., Wang J., Karimhaloo B.L.* Theory of elasticity at the nanoscale // Adv. in Appl. Mech. 2008. V. 42. P. 1–68.
17. *Herve E., Zaoui A.* n-Layered inclusion-based micromechanical modeling // Int. J. Eng. Sci. 1993. V. 31. № 1. P. 1–10.
18. *Yi X., Duan H.L., Karimhaloo B.L., Wang J.* Eshelby formalism for multi-shell nano-inhomogeneities // Arch. Mech. 2007. V. 59. № 3. P. 259–281.
19. *Гольдштейн П.В., Городцов В.А., Устинов К.Б.* Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физ. мезомех. 2010. Т. 13. № 5. С. 127–138.
20. *Устинов К.Б.* О влиянии поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(5). С. 2541–2542.