

УДК 539.3

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

© 2019 г. Д. А. Пожарский

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: pozharda@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.03.2018 г.

После доработки 01.09.2018 г.

Принята к публикации 26.09.2018 г.

Изучены трехмерные задачи о периодических цепочках эллиптических трещин, ориентированных вдоль одной из осей координат, лежащих в плоскости, которая перпендикулярна плоскостям изотропии трансверсально изотропного упругого неограниченного тела. При помощи интегрального преобразования Фурье задачи сведены к интегро-дифференциальным уравнениям, ядра которых представлены в виде рядов и не содержат квадратур. Для решения использован регулярный асимптотический метод В.М. Александрова с введением основного безразмерного параметра, характеризующего относительную удаленность соседних трещин друг от друга. Границы применимости метода зависят от параметров анизотропии и расположения трещин, метод эффективен для относительно удаленных друг от друга трещин. Получены асимптотики для коэффициента интенсивности напряжений, отнесенного к случаю одной трещины. Сделаны расчеты параметров асимптотических решений для разных трансверсально изотропных материалов.

Ключевые слова: периодическая система трещин, трансверсально изотропный материал, асимптотический метод

DOI: 10.1134/S0572329919030139

Введение. Многие современные материалы можно отнести к трансверсально изотропным (5 независимых упругих параметров) [1, 2]. Ранее была получена функция Грина в квадратурах для трансверсально изотропного неограниченного тела с трещиной, когда плоскости изотропии перпендикулярны плоскости трещины [3] (случай назван “нетрадиционным”; в более простом случае, когда плоскости изотропии параллельны плоской трещине нормального отрыва, функция Грина с точностью до множителя совпадает с известной для изотропного материала). Было показано [4], что, используя метод теории обобщенных функций, удается освободиться от квадратур в этой функции Грина, служащей ядром интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) задачи о трещине. В “нетрадиционной” контактной задаче для трансверсально изотропного полупространства (плоскости изотропии перпендикулярны площадке контакта) [5] также удалось освободиться от квадратур в функции Грина для нормального контакта [6] (в случае касательных нагрузок функция Грина сводится к однократному сингулярному интегралу). Метод [4, 6] освобождения от квадратур в функциях Грина для пространства и полупространства распространен для произвольной анизотропии (21 независимый упругий параметр) [7, 8], а также для ортотропного полупространства (9 независимых параметров) [9].

Полученное в свободной от квадратур форме ядро ИДУ [4] используется ниже при исследовании задач о периодической системе трещин в трансропном теле: такой вид ядра существенно облегчает применение регулярного асимптотического метода [10, 11], основанного на разложении гладкой части ядра в ряд по степеням малого параметра. Ранее изучались периодические системы трещин (разрезов) в упругой плоскости [12], изотропном пространстве [10, 13]. Для численного решения ИДУ рассматриваемого типа может применяться вариационный метод [14]. Изучалась возможность искривления трещины нормального разрыва в анизотропной плоскости [15].

1. Постановка задачи. Рассмотрим трансропное упругое пространство с плоскостями изотропии $z = \text{const}$. Закон Гука имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_y &= (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_z &= A_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= A_{66} \frac{\partial u_x}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = A_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = A_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

В случае изотропного материала в формулах (1.1) следует положить (G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона)

$$A_{11} = A_{33} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad A_{13} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad A_{44} = A_{66} = G \quad (1.2)$$

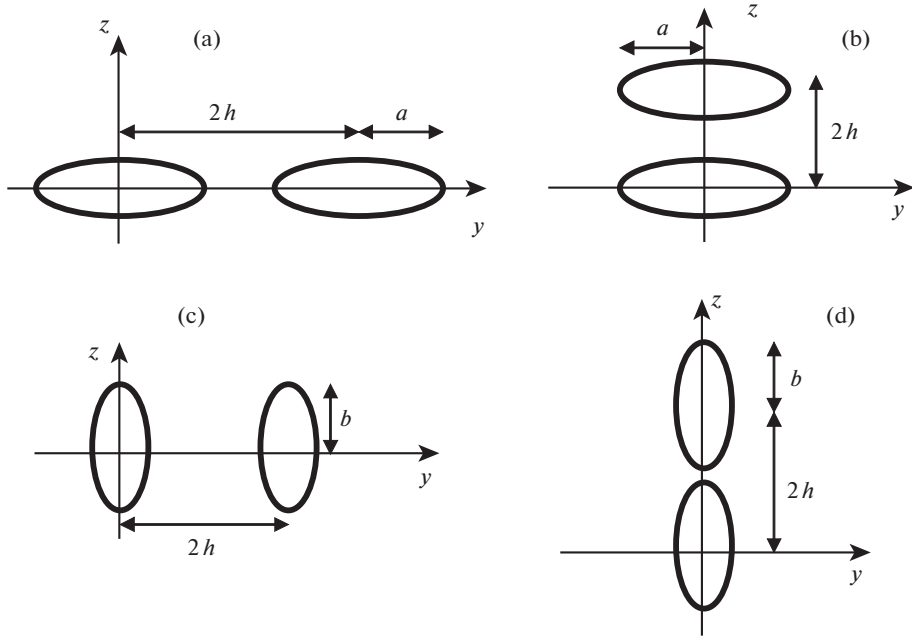
Пусть в плоскости $x = 0$ имеется периодическая система одинаковых эллиптических трещин нормального отрыва (разрезов), расположенных в направлении оси y или z и вытянутых вдоль одной из этих осей (возможны четыре случая a–d, см. фиг. 1). Расстояние между центрами соседних эллипсов равно $2h$. К берегам разрезов приложена заданная нагрузка $\sigma_x(\pm 0, y, z) = -q(y, z)$, задачи симметричны относительно плоскости $x = 0$. При известных упругих параметрах A_{ij} , полуосях эллипсов a и b и периоде $2h$ требуется определить величину раскрытия берегов разрезов $u_x(\pm 0, y, z) = \pm u(y, z)$ и найти коэффициент интенсивности напряжений (КИН) на контуре трещин.

При помощи двойного интегрального преобразования Фурье [3] и методики освобождения от квадратур [4] сведем задачи к ИДУ

$$\begin{aligned} -\Delta \iint_{\Omega} u(y_0, z_0) K(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 &= 2\pi \frac{\gamma_3^2}{A_{66}} q(y, z) + \iint_{\Omega} u(y_0, z_0) \cdot \\ \cdot F_i(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0, \quad (y, z) \in \Omega &= \left\{ \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь для случаев a и c ($i = 1$, цепочки трещин вдоль оси y)

$$F_1(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta [K(y + 2hn, z) + K(y - 2hn, z)] \quad (1.4)$$



Фиг. 1

а для случаев b и d ($i = 2$, цепочки трещин вдоль оси z)

$$F_2(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta [K(y, z + 2hn) + K(y, z - 2hn)] \quad (1.5)$$

Главная часть ядра имеет вид ([4], см. первую формулу (1.16), где следует исправить опечатку – вставить множитель $-(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$]⁻¹ под знаком интеграла)

$$K(y, z) = \frac{m_2 h_1^2 \zeta_2 - m_1 h_2^2 \zeta_1 - 4(m_2 - m_1) z^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}{(m_2 - m_1) y^2 \zeta_1 \zeta_2 (y^2 + z^2)} \quad (1.6)$$

$$\zeta_n = \sqrt{\gamma_n^2 y^2 + z^2} \quad (n = 1, 2, 3)$$

$$m_k = \frac{A_{11} \gamma_k^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \quad h_k = (m_k + 1) \gamma_3^2 y^2 + 2z^2 \quad (k = 1, 2), \quad \gamma_3^2 = \frac{A_{44}}{A_{66}}$$

Параметры γ_1^2, γ_2^2 являются корнями характеристического уравнения

$$\gamma^4 A_{11} A_{44} - \gamma^2 [A_{11} A_{33} - A_{13} (A_{13} + 2A_{44})] + A_{33} A_{44} = 0$$

Справедливо важное тождество

$$m_1 m_2 = 1 \quad (1.7)$$

Предельный переход от ядра (1.6) к ядру для изотропного случая осуществляется при $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1, \gamma_3 = 1$ с учетом соотношений (1.2). При этом следует положить

$$m_k = 2(1 - \nu) \gamma_k^2 - (1 - 2\nu)$$

и воспользоваться значениями пределов

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{m_2 - m_1} = \frac{y^2}{4(1-\nu)R},$$

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \frac{m_2 \zeta_2 - m_1 \zeta_1}{m_2 - m_1} = R + \frac{y^2}{4(1-\nu)R} \quad (R = \sqrt{y^2 + z^2})$$

В результате получим известное ядро ($\gamma_3 = 1$) [10]:

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} K(y, z) = \frac{1}{(1-\nu)R}$$

2. Асимптотический метод. Для решения ИДУ (1.3)–(1.5) применим регулярный асимптотический метод [10, 11]. Далее для простоты ограничимся случаем $q(y, z) = q_0 = \text{const}$. При $a \geq b$ (случаи а и б) введем безразмерные обозначения по формулам

$$y' = \frac{y}{a}, \quad z' = \frac{z}{a}, \quad \lambda = \frac{h}{a}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad q_0' = \frac{\gamma_3^2}{A_{66}} q_0, \quad u'(y', z') = \frac{u(y, z)}{a} \quad (2.1)$$

и т.д. При $b \geq a$ (случаи с и d) в формулах (2.1) следует заменить a на b , а b – на a . Штрихи далее опускаем. Безразмерный параметр λ характеризует относительное расстояние между соседними трещинами.

В обозначениях (2.1) в формулах (1.4), (1.5) для гладких частей ядер ИДУ следует заменить h на λ , применить оператор Лапласа Δ , вынести λ^{-3} за скобки и затем разложить функции в скобках в ряды Тейлора по переменным y/λ и z/λ . Для удобства почленного дифференцирования в формулах (1.4), (1.5) можно, учитывая соотношения (1.7), представить функцию (1.6) в форме

$$K(y, z) = \frac{[(m_1 + m_2 + 2)\gamma_3^2 y^2 + 4z^2]\gamma_3^2 \left(\frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} \right) + \frac{4z^2}{m_2 - m_1} \left[\frac{1}{y^2} + \frac{\gamma_3^2 - 1}{y^2 + z^2} \right]}{(m_2 - m_1)(y^2 + z^2)} \cdot \left(\frac{m_2 - m_1}{\zeta_1 \zeta_2} + 4\zeta_3 \left(\frac{1}{y^2 + z^2} - \frac{1}{y^2} \right) \right)$$

В результате получим ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$F_k(y, z) = \frac{A_k \zeta(3)}{4\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \quad (k = 1, 2), \quad \zeta(3) \approx 1.202 \quad (2.2)$$

$$A_1 = \frac{8\gamma_3^2}{m_2 - m_1} \left(\frac{m_2 + 1}{\gamma_1} - \frac{m_1 + 1}{\gamma_2} \right) + \frac{m_1 + m_2 + 2}{m_2 - m_1} \gamma_3^4 \left(\frac{1}{\gamma_2^3} - \frac{1}{\gamma_1^3} \right) - 8\gamma_3$$

$$A_2 = \frac{4[(m_1 + 1)\gamma_2^2 - (m_2 + 1)\gamma_1^2]\gamma_3^2 + 3(m_2\gamma_1^4 - m_1\gamma_2^4)}{m_2 - m_1} + \gamma_3^4$$

где $\zeta(s)$ – ζ -функция Римана.

Разложения вида (2.2) для функций

$$F_k(y - y_0, z - z_0), (y, z), (y_0, z_0) \in \Omega \quad (k = 1, 2)$$

абсолютно сходятся при

$$\begin{aligned} \lambda &> \max(1, \varepsilon \gamma_{\min}^{-1}) \text{ (случай a)}, \quad \lambda > \gamma_{\min}^{-1} \text{ (случай c)} \\ \lambda &> \gamma_{\max} \text{ (случай b)}, \quad \lambda > \max(1, \varepsilon \gamma_{\max}) \text{ (случай d)} \\ \gamma_{\min} &= \min(1, |\gamma_1|, |\gamma_2|, |\gamma_3|), \quad \gamma_{\max} = \max(1, |\gamma_1|, |\gamma_2|, |\gamma_3|) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Неравенства (2.3) показывают, что область применимости регулярного асимптотического метода зависит не только от расположения трещин, но и от параметров анизотропии.

Разложение (2.2) при $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1$, $\gamma_3 = 1$ в точности совпадает с разложением для изотропного случая ([10], см. формулы (18.16), (18.17), где следует перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$). Именно, используя значения пределов

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}{m_2 - m_1} &= \frac{1}{2(1 - \nu)}, \quad \lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \frac{m_2 \gamma_1^2 - m_1 \gamma_2^2}{m_2 - m_1} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \\ \lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \frac{m_2 \gamma_1^4 - m_1 \gamma_2^4}{m_2 - m_1} &= \frac{-\nu}{1 - \nu} \end{aligned}$$

и им подобных, получим известный результат ($\gamma_3 = 1$):

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} A_k = \frac{1}{1 - \nu} \quad (k = 1, 2)$$

В таблице даны значения параметров γ_{\max} , γ_{\min}^{-1} , A_1 , A_2 вида (2.2), (2.3) для ряда известных трансверсально изотропных материалов, упругие параметры которых A_{ij} были измерены экспериментально ([1], с. 22–23). Для материалов 3, 4, 9, 15, 16, 18, 19 и 23 из таблицы значения γ_1^2 и γ_2^2 (а также m_1 и m_2) являются комплексно сопряженными.

Асимптотическое решение ИДУ (1.3), (2.1) с ядром (2.2) будем искать в виде ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$u(y, z) = \sum_{k=0}^4 \frac{u_k(y, z)}{\lambda^k} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \quad (2.4)$$

Подставляя представления (2.2) и (2.4) в ИДУ (1.3), (2.1) и приравнявая члены при одинаковых степенях λ , получим цепочку ИДУ для последовательного определения функций $u_k(y, z)$. Левые части этих уравнений такие же, как в (1.3), а правые части постоянные. Для таких уравнений известны точные решения [3], получаемые с использованием представления ядра (1.6) в форме двукратного интеграла Фурье. В результате для случаев а ($k = 1$) и б ($k = 2$) найдем ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$u(y, z) = \sqrt{1 - y^2 - \frac{z^2 q_0}{\varepsilon^2 R_1}} \left(1 + \frac{\varepsilon A_k \zeta(3)}{3 R_1 \lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right) \quad (k = 1, 2) \quad (2.5)$$

$$R_1 = \frac{1}{4(m_2 - m_1)\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{D_1 d\varphi}{\zeta_{11} \zeta_{21} \cos^2 \varphi}$$

$$D_1 = m_2 h_{11}^2 \zeta_{21} - m_1 h_{21}^2 \zeta_{11} - 4(m_2 - m_1) \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \zeta_{11} \zeta_{21} \zeta_{31}$$

$$h_{k1} = (m_k + 1) \gamma_3^2 \cos^2 \varphi + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi \quad (k = 1, 2),$$

$$\zeta_{n1} = \sqrt{\gamma_n^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \quad (n = 1, 2, 3)$$

Аналогичное решение для случаев с ($k = 1$) и d ($k = 2$) имеет вид ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$u(y, z) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{\varepsilon^2} - z^2} \frac{q_0}{R_2} \left(1 + \frac{\varepsilon A_k \zeta(3)}{3R_2 \lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right) \quad (k = 1, 2) \quad (2.6)$$

$$R_2 = \frac{1}{4(m_2 - m_1)\varepsilon^3} \int_0^{2\pi} \frac{D_2 d\varphi}{\zeta_{12} \zeta_{22} \cos^2 \varphi}$$

$$D_2 = m_2 h_2^2 \zeta_{22} - m_1 h_2^2 \zeta_{12} - 4(m_2 - m_1) \sin^2 \varphi \zeta_{12} \zeta_{22} \zeta_{32}$$

$$h_{k2} = (m_k + 1) \gamma_3^2 \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \quad (k = 1, 2),$$

$$\zeta_{n2} = \sqrt{\gamma_n^2 \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \quad (n = 1, 2, 3)$$

Подынтегральные выражения в формулах (2.5) и (2.6) для R_1 и R_2 содержат устранимые особенности при $\varphi = \pi/2$.

Для круговых трещин ($\varepsilon = 1$) значения $R_1 = R_2 = R_*$ приведены в предпоследнем столбце табл. 1.

Для случая одной трещины формула для КИН на ее контуре получена Фабрикантом [3]. На основе решений (2.5), (2.6) КИН для системы трещин, отнесенный к КИН для случая одной трещины, получим в виде ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$K_{kn} = 1 + \frac{\varepsilon A_k \zeta(3)}{3R_n \lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \quad (k, n = 1, 2) \quad (2.7)$$

где $k = n = 1$ для случая а, $k = 2, n = 1$ для случая б, $k = 1, n = 2$ для случая с и $k = n = 2$ для случая д.

При полиномиальной нагрузке на берегах трещин, а также в случае увеличения асимптотической точности в формулах (2.2), (2.5)–(2.7), возникает необходимость решения ИДУ вида (снова используем размерные обозначения)

$$-\Delta \iint_{\Omega} u(y_0, z_0) K(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = \frac{2\pi \gamma_3^2}{A_{66}} Q_m(y, z), \quad (2.8)$$

$$(y, z) \in \Omega = \left\{ \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

которое отличается от уравнения (1.3) лишь правой частью, являющейся заданным полиномом степени m . Точное решение ИДУ (2.8) имеет следующую структуру:

$$u(y, z) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}} U_m(y, z) \quad (2.9)$$

где $U_m(y, z)$ – полином степени m с неопределенными коэффициентами, которые можно найти путем подстановки (2.9) в (2.8), тождественно удовлетворяя уравнению (2.8).

Доказательство проведем методом математической индукции. Представим ядро (1.6) двойным интегралом Фурье [4]

$$K(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D \exp(-iz\xi - iy\eta) d\xi d\eta}{(m_2 - m_1) \xi^2 \zeta_1^* \zeta_2^* (\xi^2 + \eta^2)} \quad (2.10)$$

$$D = m_2 (h_1^*)^2 \zeta_2^* - m_1 (h_2^*)^2 \zeta_1^* - 4(m_2 - m_1) \eta^2 \zeta_1^* \zeta_2^*$$

$$h_k^* = (m_k + 1) \gamma_3^2 \varepsilon^2 + 2\eta^2 \quad (k = 1, 2), \quad \zeta_n^* = \sqrt{\gamma_n^2 \varepsilon^2 + \eta^2} \quad (n = 1, 2, 3)$$

Таблица 1.

№	Материал	γ_{\max}	γ_{\min}^{-1}	A_1	A_2	R_*	K_0
1	Al ₂ O ₃	1.669	1.586	0.2627	0.2717	1.908	1.06
2	BaTiO ₃	5.313	5.010	0.06032	-0.09960	0.1980	0.617
3	Be	1.106	1	0.3237	0.3913	2.172	1.10
4	Cd	1.029	1.229	0.2795	0.4718	2.929	0.710
5	CdS	1.785	1.707	0.2321	0.3485	2.376	1.09
6	Co	1.808	1.674	0.1802	0.4292	2.699	1.17
7	GaS	2.018	4.215	0.07088	$2.342 \cdot 10^{-3}$	0.1798	0.278
8	GaSe	1.814	3.156	0.1097	0.01768	0.3856	0.410
9	InSe	1	1.384	0.2105	0.05447	0.9306	0.567
10	Mg	1.432	1.408	0.3114	0.3467	2.231	1.03
11	MoS ₂	1.532	3.278	0.01523	$-1.816 \cdot 10^{-3}$	0.1179	0.320
12	NbSe ₂	1.157	1.621	0.1324	0.02405	0.6257	0.586
13	SiC	1.691	1.621	0.2203	0.1778	1.412	1.01
14	Ti	1.326	1.257	0.3122	0.6851	3.605	1.17
15	TiB ₂	1.336	1.119	0.8843	1.212	8.112	0.531
16	Zn	1	1.266	0.2319	0.1076	1.035	0.528
17	ZnO	1.510	1.506	0.3041	0.3712	2.410	1.03
18	Бедренная кость сырая бычья	2.280	1.728	0.1573	0.4589	2.843	1.45
19	Бедренная кость человека	2.039	1.894	0.05231	0.3913	2.840	1.17
20	Бетон, состарен циклами нагрев-охлаждение	1.047	1	0.3099	0.3429	2.029	1.06
21	Бетон, состарен химически	1.125	1	0.3474	0.4498	2.426	1.15
22	Гнейс влажный	1.621	1.638	0.2333	0.07913	1.144	0.778
23	Гнейс сухой	1	1.365	0.2256	0.08747	0.8883	0.463
24	Графит	10.25	54.87	$4.758 \cdot 10^{-3}$	$-1.458 \cdot 10^{-4}$	$9.301 \cdot 10^{-4}$	0.0109
25	Древесина (ель Дугласа)	3.713	2.855	-0.5898	0.1547	1.863	1.47
26	Керамика PZT-4	1.095	1.203	0.3554	0.2633	1.961	0.866
27	Композит (60% волокон)	4.724	1.452	0.03790	1.174	5.578	4.07
28	Сапфир	1.528	1.526	0.2679	0.2565	1.816	0.996
29	Углеволокно	2.737	1	0.2704	6.623	18.74	4.68
30	Эпоксидное стекло	2.915	1.638	0.1970	0.4605	2.787	1.96
31	Эпоксидный графит	4.564	1.343	0.1035	1.442	6.284	4.29

После подстановки (2.9) в ИДУ (2.8) с ядром (2.10) сперва применяется оператор Лапласа под знаком интеграла, затем берется интеграл по области Ω . Для случая $Q_0(y, z) = q_0, U_0(y, z) = u_0$ используется формула [3]

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{b^2}} \exp[i(z_0\xi + y_0\eta)] dy_0 dz_0 = \\ & = \frac{2\pi ab}{a^2\eta^2 + b^2\xi^2} \left(\frac{\sin \sqrt{a^2\eta^2 + b^2\xi^2}}{\sqrt{a^2\eta^2 + b^2\xi^2}} - \cos \sqrt{a^2\eta^2 + b^2\xi^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

переход к полярным координатам ρ, φ

$$b\xi = \rho \cos \varphi, \quad a\eta = \rho \sin \varphi \quad (2.12)$$

и интегралы

$$\int_0^{\infty} \cos(\rho\theta) \cos \rho d\rho = 0, \quad \int_0^{\infty} \cos(\rho\theta) \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho = \frac{\pi}{2} \quad (\theta < 1) \quad (2.13)$$

Пусть результат (2.9) справедлив, когда $U_m(y, z)$ – полином степени m . Тогда после подстановки (2.9) в ИДУ (2.8) с ядром (2.10) интегралы по области Ω вычисляются при помощи m -кратного почленного дифференцирования формулы (2.11) по ξ и η . Для полинома $U_{m+1}(y, z)$ требуется еще раз продифференцировать формулу (2.11). Перед проведением $(m+1)$ -го дифференцирования сделаем замену (2.12), переходя к дифференцированию по ρ и φ , например (аналогично для производной по η)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = b \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - b \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.14)$$

Затем, после добавления оператора (2.14) в уравнение (2.8), (2.10), следует член с экспонентой проинтегрировать по частям по ρ для первого слагаемого в правой части (2.14) и продифференцировать по φ для второго слагаемого. Эти операции сводят случай $U_{m+1}(y, z)$ к случаю $U_m(y, z)$, увеличивая степень результата на 1. При этом важно, что подынтегральная функция

$$\frac{Dd\xi d\eta}{\xi^2 \zeta_1^* \zeta_2^* (\xi^2 + \eta^2)}$$

в ядре (2.10) не зависит от ρ .

В качестве примера рассмотрим случай

$$Q_1(y, z) = q_0 + q_1 y + q_2 z, \quad U_1(y, z) = u_0 + u_1 y + u_2 z \quad (2.15)$$

Пусть для определенности $a \geq b$. Используя обозначения (2.1), (2.5), а также

$$q_1' = \frac{\gamma_3^2 a}{A_{66}} q_1, \quad q_2' = \frac{\gamma_3^2 a}{A_{66}} q_2, \quad u_0' = \frac{u_0}{a}$$

(штрихи далее опускаем), значения интегралов (2.13) и

$$\int_0^{\infty} \sin(\rho\theta) \sin \rho d\rho = 0, \quad \int_0^{\infty} \sin(\rho\theta) \left(\frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho} \right) d\rho = \frac{\pi\theta}{2} \quad (\theta < 1)$$

найдем связь между коэффициентами полиномов (2.15):

$$u_0 R_1 = q_0, \quad \frac{3u_1}{4(m_2 - m_1)\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{D_1 \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\zeta_{11} \zeta_{21}} = q_1, \quad \frac{3u_2}{4(m_2 - m_1)\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{D_1 d\varphi}{\zeta_{11} \zeta_{21}} = q_2$$

3. Выводы. Использованный метод имеет смысл при $\lambda > 1$, но является эффективным при $\lambda \geq 1.4$ (при этом, как показывает численный анализ, погрешность формулы (2.7) для материалов из таблицы не превышает 5%), если только указанные интервалы не противоречат условиям (2.3). Аналогичный результат установлен для цепочки трещин в однородном теле ([10], с. 138). Для большинства материалов из таблицы интервалы (2.3) включают значения $\lambda < 2$. Например, для системы круговых трещин ($\epsilon = 1$) в титане при $\lambda = 1.4$ по формуле (2.7) найдем $K_{11} = K_{12} = 1.013$, $K_{21} = K_{22} = 1.028$. При увеличении эксцентриситета эллипсов (уменьшении ϵ) значения Q_1 и Q_2 возрастают, а значения КИН (2.7) стремятся к 1. Для материалов из таблицы при $\lambda \geq 2$ взаимодействие трещин проявляется весьма слабо, значение приведенного КИН близко к 1. В некоторых случаях (при $A_k < 0$, такие значения в таблице встречаются трижды) КИН для цепочки трещин может оказаться даже меньше, чем для одиночной трещины. Например, для древесины при $\epsilon = 1$, $\lambda = 2.9$ получим $K_{11} = K_{12} = 0.995$.

При сближении трещин (λ близко к 1 в случаях а и d; λ близко к ϵ в случаях b и c) КИН должен существенно возрастать в наиболее опасной точке, лежащей на оси цепочки трещин. Здесь можно воспользоваться рекомендацией, данной для цепочки в однородном теле ([10], с. 139), и для получения первого приближения решить более простую плоскую задачу о цепочке полосовых равномерно нагруженных трещин (возможны 2 случая ориентации полос перпендикулярных плоскостям изотропии, известны приближенные решения для одной полосовой трещины [4]).

Сравним КИН для цепочек круговых трещин в неограниченном упругом теле, расположенных параллельно и перпендикулярно плоскостям изотропии. Для первого случая ИДУ и его асимптотическое решение получается заменой в соответствующих формулах для изотропного материала [10] множителя $G/(1 - \nu)$ на [1]

$$\theta_* = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)A_{11}} \quad (\operatorname{Re} \gamma_{1,2} > 0)$$

При постоянной нагрузке на берегах трещин, используя формулы (2.1), (2.5), (2.6), найдем отношение КИН для цепочки круговых трещин перпендикулярных плоскостям изотропии к КИН для цепочки трещин параллельных плоскостям изотропии в виде

$$K_* = K_0 \left(1 + \frac{A_k \zeta(3)}{3R_* \lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right) \left(1 + \frac{\zeta(3)}{6\pi \lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right)^{-1}, \quad K_0 = \frac{\pi \gamma_3^2 \theta_*}{2A_{66} R_*}$$

Значения K_0 даны в последнем столбце таблицы. При $K_0 > 1$ и достаточно больших значениях λ опаснее трещины, перпендикулярные плоскостям изотропии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00017) и Минобрнауки РФ (проект 9.8082.2017/БЧ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic materials. Dordrecht: Springer, 2006. 435 p.
2. Pan E., Chen W. Static Green's functions in anisotropic media. N.Y. etc.: Cambridge Univ. Press, 2015. 356 p.
3. Fabrikant V.I. Non-traditional crack problem for transversely-isotropic body // Europ. J. Mech. A: Solids. 2011. V. 30. P. 902–912.
4. Артамонова Е.А., Пожарский Д.А. О полосовом разрезе в трансверсально изотропном упругом теле // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 5. С. 768–777.
5. Fabrikant V.I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2011. V. 64. № 2. P. 151–170.

6. *Давтян Д.Б., Пожарский Д.А.* Действие полосового штампа на трансверсально изотропное полупространство // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 783–794.
7. *Fabrikant V.I.* Relationship between contact and crack problems for generally anisotropic bodies // Int. J. Eng. Sci. 2016. V. 102. P. 27–35.
8. *Fabrikant V.I.* Relationship between green's functions of tangential contact and crack problems for generally anisotropic bodies // ZAMM. 2016. V. 96. № 12. P. 1423–1433.
9. *Пожарский Д.А.* Контактная задача для ортотропного полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 100–108.
10. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
11. *Alexandrov V.M., Pozharskii D.A.* Three-dimensional contact problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
12. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
13. *Андрейкив А.Е.* Пространственные задачи теории трещин. Киев: Наук. думка, 1982. 345 с.
14. *Гольдштейн Р.В., Спектор А.А.* Вариационный метод исследования пространственных смешанных задач о плоском разрезе в упругой среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 276–285.
15. *Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И.* О возможности искривления трещины нормального разрыва в анизотропной плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 173–184.