

УДК 539.3

## ДИНАМИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОВОДА ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

© 2019 г. Р. Ш. Гимадиев

*Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия*  
*e-mail: gimadiev@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.09.2018 г.

После доработки 12.09.2018 г.

Принята к публикации 18.09.2018 г.

Разработана математическая модель динамики деформирования провода воздушной линии электропередачи в пространственной постановке, уравнения решаются на основе метода конечных разностей по явной схеме. В отдельных случаях точность вычислений сравнивается с полученными аналитическими решениями. Проведено численное исследование нагружения линии электропередачи под совместным воздействием ветровой и весовой нагрузки. Предложен численный метод расчета обрыва проводов и движение частей после обрыва. Выявлен механизм появления колебательного движения типа “пляски проводов” при действии переменной ветровой нагрузки. Исследуется процесс теплопроводности и динамики деформирования линии при растапливании обледенения провода нагревом, изучаются переходные процессы деформирования линии электропередачи.

*Ключевые слова:* линия электропередачи, динамика деформирования, численный эксперимент, теплопроводность, обледенение, пляска проводов

DOI: 10.1134/S0572329919040044

**Введение.** В связи с относительной дешевизной воздушных линий электропередач по сравнению с кабельными и учитывая большие расстояния воздушные линии (ВЛ) находят широкое применение. Провода ВЛ подвергаются значительным механическим нагрузкам. Они постоянно нагружены собственным весом. Среди причин дополнительных механических нагрузок можно выделить действие ветровых нагрузок и гололедно-изморозевые отложения. Эти причины увеличивают нагрузки на провода, а также могут обуславливать такие опасные формы динамических колебательных процессов, как вибрация и пляска проводов. Пляска проводов вызывается сочетанием весовых и ветровых нагрузок особого профиля. Механические нагрузки могут вызывать повреждения линий электропередач, что уменьшает надежность электроснабжения и требует затрат на восстановление ВЛ.

Для повышения надежности воздушных ВЛ используются типовые технические решения, а также предлагаются новые технические решения для изучения явления гололеда и пляски проводов и борьбы с ними [1–4, 14–16].

Проблема изучения механических повреждений проводов ВЛ, как с применением экспериментальных, так и теоретических подходов моделирования процессов нагружения, и нахождения методов повышения надежности является весьма актуальной.

Теоретическому изучению механических нагрузок на ВЛ посвящен ряд работ [5–10], использующих различные подходы к моделированию формы и натяжений в проводах, их можно условно разбить на две группы: 1) на основе конечных формул, как

без учета, так и с учетом растяжимости проводов; 2) базирующиеся на численном интегрировании уравнений движения.

К первой группе относятся традиционные подходы, полученные в предположении статического нагружения. Нагрузка, обусловленная собственным весом провода считается равномерно распределенной. Так в [4, 5] полагают, что провод нерастяжим и имеет форму параболы (при длине пролета до 800 м) или форму цепной линии (при длине пролета более 800 м. В работе [7] получены конечные формулы для расчета статического напряженно-деформированного состояния ВЛ с учетом ее растяжения. Преимуществом этих подходов, является простота их использования. Однако они не позволяют исследовать динамику нагружения проводов ВЛ.

Вторая группа подходов к расчету механического нагружения ВЛ позволяет исследовать динамику нагружения ВЛ. Эти подходы основаны на математическом моделировании движения проводов ВЛ под действием нагрузок с использованием уравнений движения абсолютно гибкой системы [5–10]. Уравнения движения представляют собой нелинейные уравнения в частных производных, которые дополняются начальными и граничными условиями. Этот подход связан составлением математической модели, ее программированием и проведением численных экспериментов. Он является существенно более трудоемким, чем первый подход. В качестве тестирования программ могут служить разработки первой группы.

Представляет практический интерес, на основе разработанных моделей исследовать динамическое поведение провода при воздействии совместно весовой и ветровой нагрузки, деформирование провода при растапливании обледенения нагревом и поведение ВЛ в режиме “пляски провода”.

Низкочастотные колебания ВЛ электропередачи рассматривались в работах [3, 14–16].

**1. Постановка задачи.** Моделирование динамики ВЛ электропередачи проводится по модели абсолютно гибкой системы. Под абсолютно гибкими системами мы будем понимать физические объекты, которые пренебрежимо слабо воспринимают изгибные напряжения, т.е. работают только на растяжение и сжатие. К ним можно отнести: протяженные линии передачи энергии, линии оптико-волоконной связи, тросы находящиеся в потоке жидкости [12] и т.д. Опоры ВЛ принимаются абсолютно жесткими.

Абсолютно гибкая система в поле силы тяжести с линейной плотностью  $\rho_0(s)$ , перемещается в пространстве под действием распределенной погонной нормальной нагрузки  $F_n$  и распределенной погонной касательной нагрузки  $F_t$ . Деформация гибкой системы характеризуется степенью удлинения  $\lambda = ds/ds_0 = 1 + e$ , где  $ds_0$  и  $ds$  – длины элементов гибкой системы в недеформированном и деформированном состоянии,  $e$  – относительное удлинение. Для элемента гибкой системы с массой  $dm$  в соответствии с законом сохранения массы имеем  $dm = \rho_0 ds_0 = \rho ds$ .

**2. Метод и построение решения.** Векторное уравнение, описывающее движение упругой весовой гибкой системы под действием погонных нагрузок  $F_n$ ,  $F_t$ , натяжением  $T$ , в поле силы тяжести с ускорением свободного падения  $g$  имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \partial T / \partial s_0 + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t + \mathbf{g} \rho_0 \quad (2.1)$$

Рассмотрим векторное уравнение движения в проекциях на оси декартовой системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , ускорение  $g$  направлено вниз вдоль оси  $Ox_3$ , рис. 1.

Пусть угол между элементом  $ds$  гибкой системы и осями координат  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  составляет соответственно  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Распределенная касательная нагрузка с интенсивностью  $F_t$  действует вдоль элемента  $ds$  гибкой системы. Действующий вектор нормальной нагрузки с интенсивностью

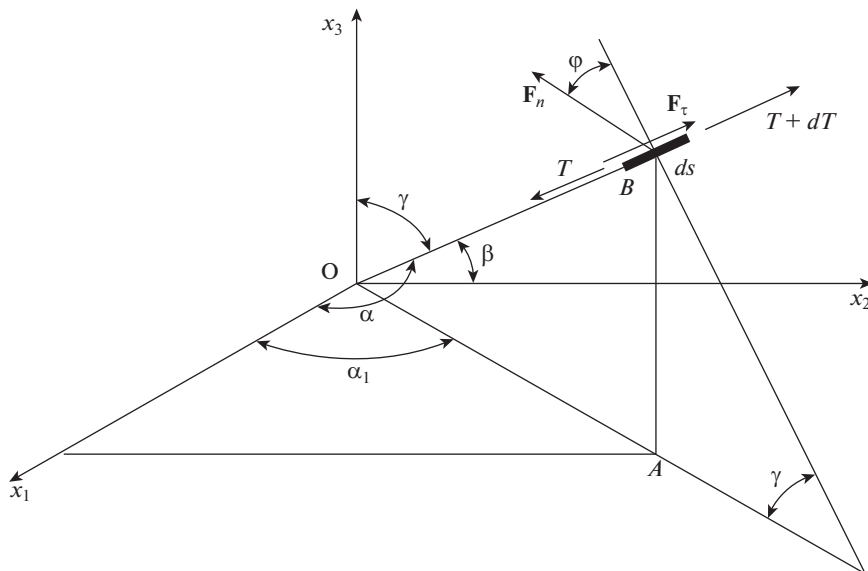


Рис. 1

$F_n$  составляет угол  $\varphi$  к плоскости  $OAB$ . Дополнительно введем угол  $\alpha_1$  — между осью  $Ox_1$  и плоскостью  $OAB$ . Учитывая, что

$$|F_n| = F_n, \quad |F_\tau| = F_\tau, \quad |T| = T, \quad |g| = g, \quad \partial^2 r / \partial t^2 = \partial v / \partial t$$

и проектируя векторное уравнение движения на декартовы оси координат имеем

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \cos \alpha) - F_n \lambda \cos \varphi \cos \gamma \cos \alpha_1 + F_\tau \lambda \cos \alpha$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \cos \beta) - F_n \lambda \cos \varphi \cos \gamma \sin \alpha_1 + F_\tau \lambda \cos \beta$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \cos \lambda) + F_n \lambda \cos \varphi \sin \gamma + F_\tau \lambda \cos \gamma - \rho_0 g$$

где  $v_1, v_2, v_3$  — проекции скорости элементов на координатные оси.

Так как  $(\partial x_1)^2 + (\partial x_2)^2 + (\partial x_3)^2 = (\lambda \partial s_0)^2$ , то

$$\cos \alpha = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_1}{\partial s_0}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_2}{\partial s_0}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_3}{\partial s_0}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_2}{\partial s_0} \right) / \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_1}{\partial s_0} \right) = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha / \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}$$

$$\sin \alpha_1 = \cos \beta / \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}$$

В дальнейшем индекс нуль в координате  $s_0$  будем опускать и будем понимать  $s$  как лагранжеву координату (т.е. связанную с гибкой системой).

Учитывая

$$\cos \alpha = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_1}{\partial s}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_2}{\partial s}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_3}{\partial s}$$

тогда уравнения движения гибкой системы в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  примут вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{T}{\lambda} \frac{\partial x_1}{\partial s} \right) - F_n \cos \varphi \cos \alpha_1 \frac{\partial x_3}{\partial s} + F_\tau \frac{\partial x_1}{\partial s} \\ \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{T}{\lambda} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) - F_n \cos \varphi \sin \alpha_1 \frac{\partial x_3}{\partial s} + F_\tau \frac{\partial x_2}{\partial s} \\ \rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{T}{\lambda} \frac{\partial x_3}{\partial s} \right) + F_n \lambda \cos \varphi \sin \gamma + F_\tau \frac{\partial x_3}{\partial s} - \rho_0 g \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения движения в вертикальной плоскости  $Ox_1x_2$ , ось  $Ox_2$  направлена вертикально. В этом случае для (2.2) надо положить

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad \sin \gamma = \cos \beta = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_2}{\partial s}$$

и провести замену индексов  $2 \rightarrow 1$  и  $3 \rightarrow 2$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{T}{\lambda} \frac{\partial x_1}{\partial s} \right) - F_n \frac{\partial x_2}{\partial s} + F_\tau \frac{\partial x_1}{\partial s} \\ \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{T}{\lambda} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) + F_n \frac{\partial x_1}{\partial s} + F_\tau \frac{\partial x_2}{\partial s} - \rho_0 g \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – проекции вектора скорости  $\mathbf{V}$  на оси координат  $x_1, x_2$ .

Уравнения движения (2.3) можно записать и в компактной форме

$$\rho_1 \frac{\partial v_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{T}{\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial s} \right) + (-1)^k F_n \frac{\partial x_{3-k}}{\partial s} + F_\tau \frac{\partial x_k}{\partial s} - \rho_1 g (k-1) \quad (2.4)$$

где  $k = 1, 2$ ;  $\rho_1$  – линейная плотность.

Составляющие аэродинамических сил, действующих на гибкую систему определяются по формулам [12]

$$F_n = \frac{\rho U_\infty^2}{2} d (c_n \sin^2 \alpha + c_\tau \sin \alpha), \quad F_\tau = \frac{\rho U_\infty^2}{2} d c_\tau \cos^2 \alpha \quad (2.5)$$

где  $U_\infty$  – скорость невозмущенного потока;  $\rho$  – плотность среды;  $\alpha$  – угол атаки элемента гибкой системы;  $d$  – условный диаметр;  $c_n = 1.8446$ ,  $c_\tau = 0.0554$  – аэродинамические коэффициенты обтекания, как для тросов.

Поперечные колебания гибких систем влияют на нормальные составляющие погонных усилий  $F_n$ ; при движении элемента гибкой системы против потока эта составляющая увеличивается, а по потоку – уменьшается. С учетом этого пересчет можно вести по формуле [13]

$$F_n(s, t) = F_n^0(s, t) [1 - \mu V_n / U_\infty]^2 \text{sign}[1 - \mu V_n / U_\infty] \quad (2.6)$$

где  $V_n$  – нормальная составляющая скорости элемента гибкой системы;  $\mu$  – коэффициент аэродинамического демпфирования, этот коэффициент существенно влияет на динамику нагружения.

Уравнения движения (2.2) решаются в безразмерном виде, введя следующие безразмерные параметры:

$$\bar{v}_k = v_k/U_\infty, \quad f_n = 2F_n/(\rho U_\infty^2 L_0), \quad f_\tau = 2F_\tau/(\rho U_\infty^2 L_0), \quad \bar{\rho} = \rho L_0/M_0$$

$$\bar{T} = T/T_0, \quad \bar{E} = E/T_0, \quad \tau = tU_\infty/L_0, \quad \bar{g} = gL_0/U_\infty^2$$

где  $v_k$  – скорость элемента провода;  $L_0$  – длина пролета провода;  $M_0 = \rho_0 L_0$  – масса пролета провода;  $E$  – приведенный модуль упругости материала провода;  $T_0 = \rho U_\infty^2 L_0^2/2$  – характерное натяжение провода;  $t$  – время;  $A_N = \rho L_0^3/(2M_0)$  – параметр Ньютона. Ниже в обозначениях черточки над параметрами опускаем.

Уравнения дополняются физическими соотношениями  $T = T(e)$ ,  $e \geq 0$  при растяжении и  $e < 0$  при сжатии (в частности при линейном законе  $T = Ee$ ), кинематическими соотношениями

$$\partial x_k / \partial \tau = v_k \quad (2.7)$$

и геометрическим соотношением

$$(\partial x_1 / \partial s)^2 + (\partial x_2 / \partial s)^2 + (\partial x_3 / \partial s)^2 = \lambda^2, \quad \lambda = 1 + e \quad (2.8)$$

Начальные и граничные условия для провода запишутся в виде

$$x_k(0, s) = f_k(s), \quad v_k(0, s) = \varphi_k(s), \quad x_k(\tau, 0) = f_k^\circ(\tau), \quad v_k(\tau, 0) = \varphi_k^\circ(\tau)$$

$$x_k(\tau, s_1) = f_k^s(\tau), \quad v_k(\tau, s_1) = \varphi_k^s(\tau), \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

**3. Разностная схема решения задачи.** Система уравнений (2.2), (2.5)–(2.9) решается методом конечных разностей, в рассмотрение вводится дискретная область

$$s_i = i\Delta s, \quad \tau_n = n\Delta\tau \quad (n = 0, 1, \dots, \tau/\Delta\tau - 1, i = 1, 2, \dots, s/\Delta s)$$

Используя для аппроксимации производных центральные разности на сдвинутой на полшага сетке и явную конечно-разностную схему, уравнения (2.2) в безразмерном виде представим как

$$v_{1,i}^{n+1/2} = v_{1,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta\tau A_N}{\rho_0 \Delta s} \left\{ \left[ T_{i+1/2}^n \frac{x_{1,i+1}^n - x_{1,i}^n}{\Delta s \lambda_{i+1/2}^n} - T_{i-1/2}^n \frac{x_{1,1}^n - x_{1,i-1}^n}{\Delta s \lambda_{i-1/2}^n} \right] \right.$$

$$- \frac{1}{2\Delta s} [(f_n)_{i+1/2}^{n-1/2} (x_{3,i+1}^n - x_{3,i}^n) + (f_n)_{i-1/2}^{n-1/2} (x_{3,i}^n - x_{3,i-1}^n)] \cos\varphi \sin\alpha_1$$

$$\left. + \frac{1}{2\Delta s} [(f_\tau)_{i+1/2}^{n-1/2} (x_{1,i+1}^n - x_{1,i}^n) + (f_\tau)_{i-1/2}^{n-1/2} (x_{1,i}^n - x_{1,i-1}^n)] \right\}$$

$$v_{2,i}^{n+1/2} = v_{2,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta\tau A_N}{\rho_0 \Delta s} \left\{ \left[ T_{i+1/2}^n \frac{x_{2,i+1}^n - x_{2,i}^n}{\Delta s \lambda_{i+1/2}^n} - T_{i-1/2}^n \frac{x_{2,1}^n - x_{2,i-1}^n}{\Delta s \lambda_{i-1/2}^n} \right] \right.$$

$$- \frac{1}{2\Delta s} [(f_n)_{i+1/2}^{n-1/2} (x_{3,i+1}^n - x_{3,i}^n) + (f_n)_{i-1/2}^{n-1/2} (x_{3,i}^n - x_{3,i-1}^n)] \cos\varphi \sin\alpha_1$$

$$\left. + \frac{1}{2\Delta s} [(f_\tau)_{i+1/2}^{n-1/2} (x_{2,i+1}^n - x_{2,i}^n) + (f_\tau)_{i-1/2}^{n-1/2} (x_{2,i}^n - x_{2,i-1}^n)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
v_{3,i}^{n+1/2} = v_{3,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta\tau A_N}{\rho_0 \Delta s} & \left\{ \left[ T_{i+1/2}^n \frac{x_{3,i+1}^n - x_{3,i}^n}{\Delta s \lambda_{i+1/2}^n} - T_{i-1/2}^n \frac{x_{3,i}^n - x_{3,i-1}^n}{\Delta s \lambda_{i-1/2}^n} \right] \right. \\
& + \frac{1}{2} [\lambda_{i+1/2}^n (f_n)_{i+1/2}^{n-1/2} + \lambda_{i-1/2}^n (f_n)_{i-1/2}^{n-1/2}] \cos \alpha \sin \gamma \\
& \left. + \frac{1}{2\Delta s} [(f_\tau)_{i+1/2}^{n-1/2} (x_{3,i+1}^n - x_{3,i}^n) + (f_\tau)_{i-1/2}^{n-1/2} (x_{3,i}^n - x_{3,i-1}^n)] \right\} - \Delta\tau \cdot g
\end{aligned} \quad (3.1)$$

здесь

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x_{1,i+1}^n - x_{1,i}^n}{\Delta s \lambda_{i+1/2}^n} + \frac{x_{1,i}^n - x_{1,i-1}^n}{\Delta s \lambda_{i-1/2}^n} \right] \\
\cos \beta &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x_{2,i+1}^n - x_{2,i}^n}{\Delta s \lambda_{i+1/2}^n} + \frac{x_{2,i}^n - x_{2,i-1}^n}{\Delta s \lambda_{i-1/2}^n} \right] \\
\cos \gamma &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x_{3,i+1}^n - x_{3,i}^n}{\Delta s \lambda_{i+1/2}^n} + \frac{x_{3,i}^n - x_{3,i-1}^n}{\Delta s \lambda_{i-1/2}^n} \right]
\end{aligned}$$

Результаты решения задачи на шаге интегрирования  $n$  служат в качестве начальных и граничных условий для следующего шага интегрирования.

Явная расчетная схема наряду с достоинством имеет и недостаток: появляются высокочастотные осцилляции решения за фронтом волн. Для сглаживания решений используется корректировка скоростей элементов:

$$\bar{v}_k = v_k + \beta \partial^2 v_k / \partial s^2 \quad (3.2)$$

где  $\beta$  – коэффициент корректировки скоростей, который выбирается на основе численных экспериментов.

В разностном представлении корректировка (3.2) имеет вид

$$\bar{v}_{k,i}^{n+1/2} = v_{k,i}^{n+1/2} + \beta (v_{k,i+1}^{n+1/2} - 2v_{k,i}^{n+1/2} + v_{k,i-1}^{n+1/2}) / \Delta s^2 \quad (3.3)$$

Физическое соотношение принимается в виде формулы Кельвина–Фойгта

$$T = E \cdot e + \eta \cdot \dot{e} \quad (3.4)$$

где  $\dot{e}$  – скорость деформации,  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения в материале.

Разрыв линии ВЛ происходит, когда натяжение в элементе  $i$  в момент времени  $\tau_n$  превышает допустимое натяжение разрыва в материале  $T_i^n \geq [T]$ , или разрыв происходит в результате механического повреждения. Пусть разрыв линии произошел в элементе между узлами  $i_l$  и  $i_r = i_l + 1$ , и натяжение между этими узлами мгновенно принимает нулевое значение  $T(i_l) = 0$ . Для расчета по формуле (3.1) добавляем расширенную сетку для левого пролета  $i_{l+1}$  и для правого пролета  $i_{r-1}$  соответственно

$$v_{k,i_{l+1}}^{n+1/2} = v_{k,i_l}^{n+1/2} \quad v_{k,i_{r-1}}^{n+1/2} = v_{k,i_r}^{n+1/2} \quad (3.5)$$

Таким образом получаем гладкие решения вторых производных для узлов (3.1) с  $i = 2$  по  $i = i_l$  для левого пролета и с  $i = i_r$  по  $i = \text{int}(s/\Delta s)$  для правого пролета.

Координаты узловых точек разностной сетки, или кинематические соотношения записываются в виде

$$x_{k,i}^{n+1} = x_{k,i}^n + \Delta\tau \bar{v}_{k,i}^{n+1/2} \quad (3.6)$$

Необходимым условием сходимости численного решения по явной схеме к решению дифференциального уравнения является условие Куранта–Фридрихса–Леви. Для материала с линейной характеристикой упругости  $E$  это условие запишется в виде  $\Delta t \leq \Delta s \sqrt{\rho_0/E}$ , или

$$\Delta t = \alpha_k \Delta s \sqrt{\rho_0/E} \quad (3.7)$$

где  $\alpha_k$  – коэффициент Куранта.

И так сквозные расчеты проводятся по формулам (3.1)–(3.7). В алгоритме динамической задачи шаг интегрирования (3.7) обеспечивают устойчивость решения. Аэродинамическое демпфирование среды (2.6) и внутреннее трение в материале (3.4) улучшают устойчивость численного алгоритма.

Равновесное состояние гибкой системы получается как предельное решение динамической задачи. Выбор коэффициента корректировки скоростей и коэффициента устойчивости численного решения осуществляется путем проведения численных экспериментов на модельных задачах. Для численных расчетов динамики ВЛ можно использовать результаты моделирования динамики ленточных парашютов в потоке [13, с. 52–61]: коэффициент  $\mu$  в формуле (2.6) выбирается в диапазоне 0.1–0.2; а  $\beta = (0.015–0.03)\Delta s^2$  в формуле (3.3) и  $\alpha_k = (0.5+1)$  в формуле (3.7).

**4. Результаты тестовых исследований.** Рассмотрим по отдельности действие ветровой нагрузки и силы веса.

**4.1. Влияние ветровой нагрузки.** Ветровая нагрузка интенсивностью  $p$  действует в горизонтальной плоскости  $Ox_1x_2$ . Перепад давления, возникающий за счет ветра, действует по нормали к деформируемой линии и распределяется равномерно. При этом деформированное состояние линии с двумя закрепленными концами определяется следующими приближенными формулами [11]

$$r = l/(2 \sin \varphi), \quad \varphi = (3pl/E)^{1/3} [1 + (3pl/E)^{2/3}/60] \\ T = pr, \quad x_1 = r[1 - \sqrt{1 - (l/(2r))^2}], \quad (4.1)$$

где  $l$  – длина пролета;  $2\varphi$  – центральный угол дуги окружности;  $r$  – радиус окружности;  $T$  – натяжение;  $x_1$  – максимальный прогиб.

Относительная погрешность приближенного решения (4.1) составляет:

$$\delta < 6(\varphi^4/7!)(1 - \varphi^2/20)^{-1}$$

Решение (4.1) используем для тестовой отработки влияния ветровой нагрузки в численных расчетах.

Расчеты по (4.1): пусть линейная плотность электрических проводов равна  $\rho = 0.5$  [кг/м], а плотность обледенения  $\rho_0 = \rho$ . Общая плотность составляет  $\rho = 1.0$  [кг/м];  $l = 160$  [м];  $E = 80734 \cdot g$  [Н] – модуль упругости; диаметр провода  $d = 0.01553$  [м]; скорость ветра  $V_\infty = 20$  м/с; погонная ветровая нагрузка  $p = \rho_a V_\infty^2 d/2$  [Н/м]. Расчеты по (4.1) дают:  $\varphi = 0.132$ ;  $r = 3.793$ ,  $x_1 = 0.03309375$ , а численные расчеты по (3.1)–(3.7) при  $\tau = 24.7$  дают  $x_1 = 0.03310$ , фиг. 2а. Относительная погрешность составляет менее  $\theta = 0.007\%$ . При этом погрешность самого приближенного решения не превышает величины  $\delta = 0.004 \times 10^{-2}\%$ . Максимальный прогиб  $x_1 = 0.0543$  при  $\tau = 0.29$ .

**4.2. Влияние веса.** А для анализа точности численных расчетов влияния веса, который действует вдоль оси  $Ox_3$  в плоскости  $Ox_2x_3$  можно использовать решение [7]. Уравнение деформированной цепной линии определяется по

$$x_3 = \rho_0 g [(1 + \varepsilon)/(E\varepsilon)](x_2^2 - lx_2)/2 \quad (4.2)$$

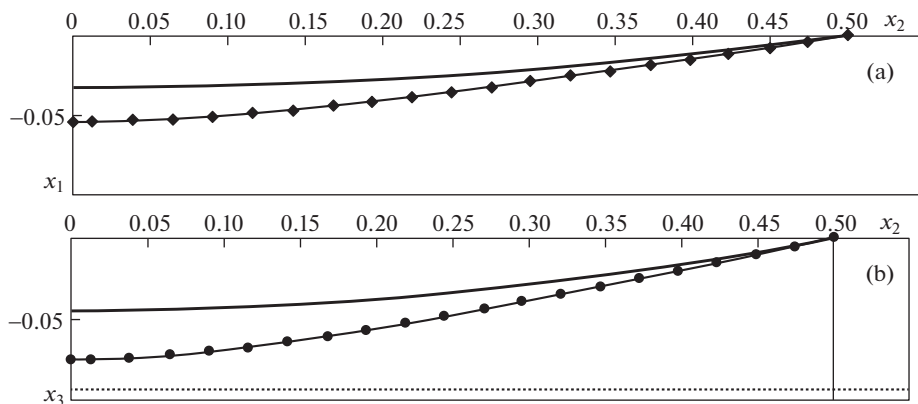


Рис. 2

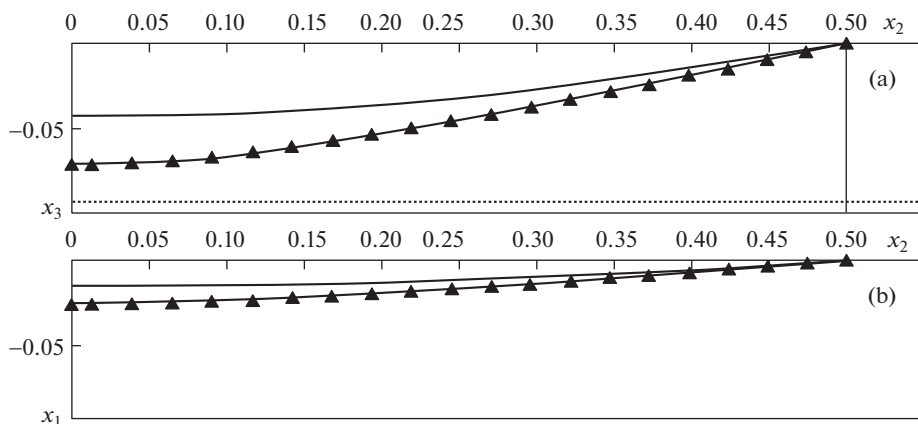


Рис. 3

Максимальный прогиб в середине пролета составляет

$$x_3 = -l^2 \rho_0 g [(1 + \varepsilon)/(E\varepsilon)]/8 \quad (4.3)$$

где относительное удлинение определяется выражением

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\gamma/2 + [(\gamma/2)^2 - (\gamma/3)^3]^{1/2}} + \sqrt[3]{\gamma/2 - [(\gamma/2)^2 - (\gamma/3)^3]^{1/2}} \quad (4.4)$$

при параметре  $\gamma = (\rho_0 g)^2 l^2 / (24E^2)$ .

Расчеты по (4.3), (4.4) дают  $\gamma = 0.16365 \times 10^{-6}$  и  $\varepsilon = 0.0054798$  и  $x_3 = -0.04546$ .

На фиг. 2б расчеты по (3.1)–(3.7)  $x_3 = -0.04540$  при времени  $\tau = 32.6$ . При этом относительная погрешность ошибки по сравнению с точным решением составляет  $\theta \approx 0.12\%$ . Максимальный прогиб  $x_3 = 0.0753$  реализуется в момент времени  $\tau = 0.21$ .

**4.3. Расчет пространственной формы ВЛ под воздействием совместной ветровой и весовой нагрузки.** Начальное состояние гибкой системы в момент времени  $\tau = 0$  примем в виде прямой линии (что приближает к оптимальному весу ВЛ). Из этого состояния



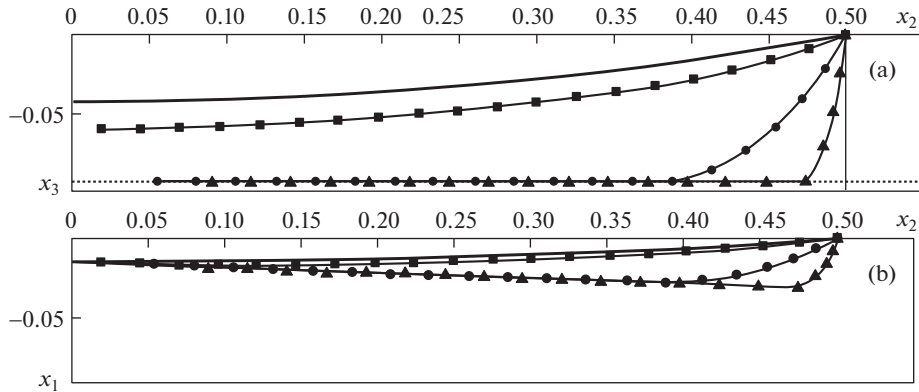


Рис. 4

система деформируется до значения максимальных прогибов в вертикальной плоскости  $x_3 = -0.0717$  (рис. 3,а) и  $x_1 = -0.0279$  в горизонтальной плоскости (рис. 3,б) при времени  $\tau = 0.204$ . По истечении времени  $\tau = 40.75$  система выходит на равновесное состояние и максимальные прогибы составляют  $x_3 = -0.0433$  и  $x_1 = -0.0169$ , рис. 3а, 3,б.

**4.4. Движения ВЛ после разрыва в середине пролета.** В алгоритме расчета движения ВЛ после разрыва используются следующие допущения: а) при установившемся режиме воздействия ветровой и весовой нагрузки обрыв провода для примера происходит по середине пролета; б) в момент падения на землю воздействие ветровой нагрузки на провод прекращается; в) при падении на землю происходит частично упругий удар и в расчетах принято, что кинетическая энергия отскока составляет 36% от энергии вертикального удара. На рис. 4а, 4,б приводятся результаты расчета движения после разрыва провода по середине пролета в моменты времени  $\tau = 40.85$ ; 41.87; 50.93.

**4.5. Влияние порыва ветра.** Низкочастотные колебания ВЛ электропередачи (частоты порядка 1 Гц) происходят из-за порыва ветра. Колебания могут проявляться с амплитудой выше метра [14–16]. В этих работах отмечается, что механизм появления колебаний не всегда ясен.

Рассмотрим порыв ветра, который действует в горизонтальной плоскости  $Ox_1x_2$  с синусоидальным законом изменения

$$p(\tau) = q_0 d |\sin(\pi n / \delta)| \quad (4.5)$$

где  $q_0$  – скоростной напор при скорости ветра  $V_0$ ,  $d_{пров}$  – диаметр провода,  $n = \tau / \Delta\tau$ ,  $\tau$  – текущее время,  $\Delta\tau$  – шаг интегрирования,  $n / \delta = 1, 2, 3 \dots$  – точки нули синусоиды.

На рис. 5а, 5б, 5,д приводятся результаты расчета движения средней точки пролета в соответствии с алгоритмом (3.1)–(3.7). Начальное состояние пролета при времени  $\tau = 0$  принята в виде прямой линии. Из этого состояния под действием силы веса провода реализуется переходный процесс до формы равновесного состояния (рис. 5,а). Максимальный прогиб равен  $x_3 = -4.54 \times 10^{-2}$ . При времени  $\tau = 4$  действует порыв ветра в соответствии (4.5). Колебания средней точки провода приводится в горизонтальной плоскости, рис. 5,б.

Рассмотрим следующий вариант, давление ветра меняется по закону (4.5) при времени  $\tau \geq 4$  и совпадает с движением при скорости элементов провода  $v_{x_{ij}} \leq 0$ , а при движении элемента провода  $v_{x_{ij}} > 0$  равен нулю. То есть порыв ветра способствует раскачиванию провода в горизонтальной плоскости  $Ox_1x_2$ . Эти результаты расчета приво-

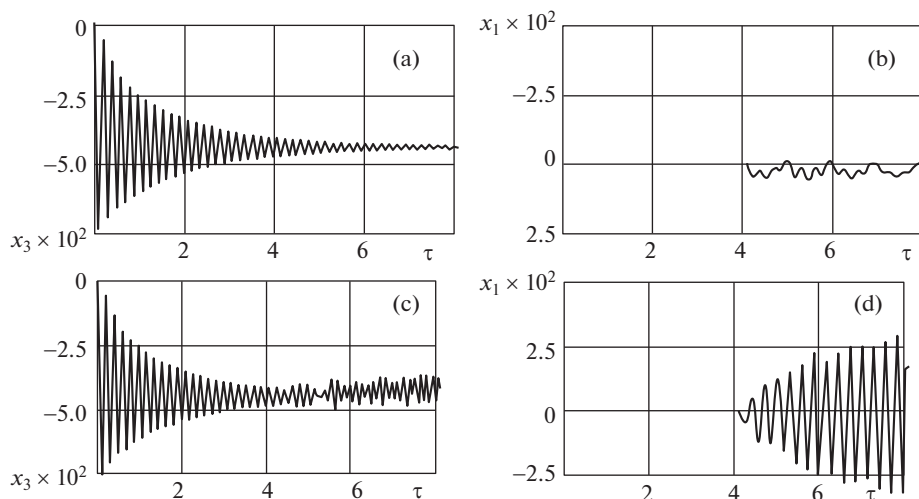


Рис. 5

дятся на рис. 5,d. Амплитуда колебаний в плоскости  $Ox_1x_2$  возрастает. Эти колебания отражаются на колебаниях провода в вертикальной плоскости  $Ox_2x_3$  и способствуют возникновению колебаний типа “пляски проводов”.

**5. Термоупругая задача ВЛ.** В осенне-зимне-весенний период создаются благоприятные условия для образования гололедных отложений на линиях электропередачи. Для борьбы с этим опасным явлением разрабатываются и используются различные технологии, в том числе основанные на нагревании проводов с целью плавки гололеда [1, 2].

При образовании гололеда масса провода увеличивается и система переходит в новое равновесное деформированное состояние. При включении нагрева провод еще больше провисает за счет температурного удлинения. После прогрева обледенение сбрасывается, температура падает до температуры окружающей среды, и форма провода переходит снова в равновесное состояние, которое соответствует нагружению только весом самого провода.

5.1. Безразмерное уравнение теплопроводности для линейного элемента имеет вид

$$u_t = u_{ss} + f \quad (5.1)$$

где  $0 < s < 1$ ,  $0 < t < t_k$ ,  $f$  — плотность тепловых источников.

5.2. Уравнение теплопроводности в разностном представлении

Пусть  $\varphi_i^j = f_i^j$ ,  $s_i = i \cdot h$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $h = 1/N$  — шаг разбиения по лагранжевой координате,  $N$  — число разбиений пролета,  $t_j = j \cdot \tau$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, L$ ,  $\tau = t_k/L$  — шаг интегрирования по времени,  $L$  — число разбиений временного интервала. Для (5.1) имеем

$$u_i^{j+1} = \left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right)u_i^j + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + \tau\varphi_i^j \quad (5.2)$$

Устойчивость схемы в сеточной норме для шага интегрирования требует выполнения условия  $\tau = \alpha h^2/2$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

5.3. Аппроксимация граничных условий. Аппроксимацию можно проводить двумя способами. Вариант 1. Для аппроксимации граничных условий воспользуемся квадра-

тичным полиномом Лагранжа по трем точкам отрезка. Для первых производных по времени на концах отрезка имеем

$$u_{0\tau}^{(1)} = \frac{1}{2\tau}(-3u_0^{j+1} + 4u_1^j - u_2^j), \quad u_{N\tau}^{(1)} = \frac{1}{2\tau}(3u_N^{j+1} + 4u_{N-1}^j - u_{N-2}^j)$$

а для вторых производных по координате на границах имеем

$$u_{0h}^{(2)} = \frac{1}{h^2}(u_0^j - 2u_1^j + u_2^j), \quad u_{Nh}^{(2)} = \frac{1}{h^2}(u_N^j - 2u_{N-1}^j + u_{N-2}^j)$$

Тогда для границ на шаге интегрирования  $(j + 1)$  имеем

$$\begin{aligned} u_0^{j+1} &= -\frac{2\tau}{3h^2}u_0^j + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{\tau}{h^2}\right)u_1^j - \frac{1}{3}\left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right)u_2^j + 2\tau\varphi_i^j \\ u_N^{j+1} &= \frac{2\tau}{3h^2}u_N^j + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\tau}{h^2}\right)u_{N-1}^j - \frac{1}{3}\left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right)u_{N-2}^j + 2\tau\varphi_i^j \end{aligned} \quad (5.3)$$

Вариант 2. Для границ воспользуемся линейной аппроксимацией

$$\begin{aligned} u_0^{j+1} &= \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right)u_0^j + \frac{\tau}{h^2}(u_2^j - 2u_1^j) + \tau\varphi_0^j \\ u_N^{j+1} &= \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right)u_N^j + \frac{\tau}{h^2}(u_{N-2}^j - 2u_{N-1}^j) + \tau\varphi_N^j \end{aligned} \quad (5.4)$$

**5.4. Тестовые расчеты теплопроводности по двум вариантам.** Для расчетов примем следующие исходные данные: начальная длина провода  $l = 160$  [м]; коэффициент линейного расширения алюминиевого провода составляет  $\alpha_t = 23.8 \times 10^{-6}$  [1/К]; модуль упругости  $E = 6.25 \times 10^{10}$  [Н/м<sup>2</sup>] [4]; диаметр провода  $d = 0.0147$  [м]; плотность материала провода  $\rho = 2700$  [кг/м<sup>3</sup>]; теплоемкость единицы массы  $c = 0.9$  [кДж/(кг · К)]; коэффициент теплопроводности  $k = 209$  [Вт/(м · К)]; К – температура Кельвина. Количество элементов  $N = 50$ .

Теплоизолированный провод разделен на две части. Мгновенно левый пролет нагрет до 200°C (473.15 К), а правый имеет температуру окружающей среды минус 5°C. В безразмерном виде эти температуры составят 1.7322 и 0.9817. Перераспределение температуры по длине и по времени происходит без потери тепла и процесс продолжается до температуры выравнивания до величины  $(1.7322 + 0.9817) \times 0.5 = 1.35695$ , что соответствует 370.65089 К.

Расчеты теплопроводности проводим по (5.2) при аппроксимации граничных условий по варианту 1 и варианту 2 и сравниваем с точным значением 1.35695.

По варианту 1 (аппроксимация граничных условий квадратичным полиномом Лагранжа) численный расчет дает температуру выравнивания 1.36058 за 2.3 с.

По варианту 2 (линейная аппроксимация граничных условий) расчет дает 1.35689. Вариант 2 дает наилучшую сходимость.

**5.5. Линейное тепловое расширение.** Относительное температурное расширение составляет

$$\varepsilon_t = (l_2 - l_1)/l_1 = \alpha_t \Delta u \quad (5.5)$$

где  $l_1$  и  $l_2$  – начальная и конечная длины провода, а  $\Delta u = u_2 - u_1$  – разность температуры,  $\alpha_t$  – коэффициент линейного расширения. Усилие, возникающее в проводе за счет температурного расширения определяется по

$$T = E\varepsilon_t \pi d^2/4 \quad (5.6)$$

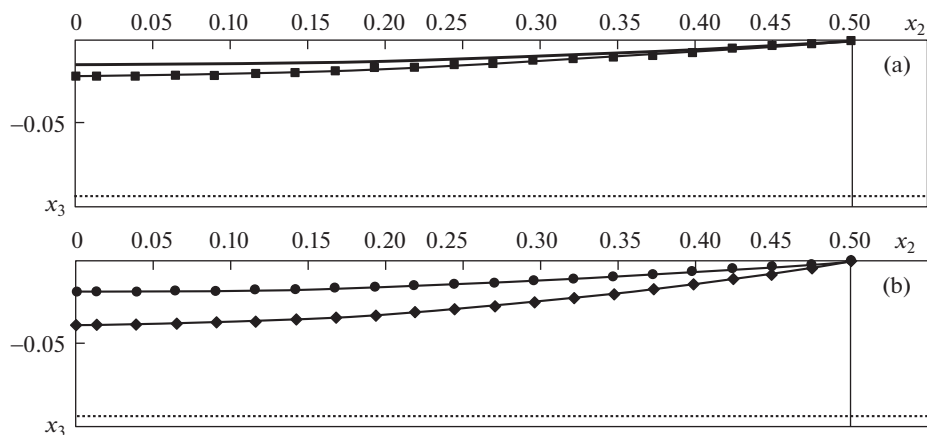


Рис. 6

Расчеты по выше принятым исходным данным дают: относительное температурное удлинение  $\epsilon_t = 24.4 \times 10^{-4}$ , усилие, возникающее в проводе за счет температурного удлинения соответственно  $T = 25.9$  кН.

**5.6. Динамика ВЛ с учетом веса провода, веса обледенения и теплопроводности.** Для примера пусть плотность обледенения равна плотности самого провода  $\rho_0 = \rho$ , на практике может превышать в несколько раз. В соответствии с решением уравнения движения провод под действием только собственного веса при времени  $t = 2.7$  с перемещается до максимального прогиба  $x_3 = 3.4$  м (рис. 6,а – линия —■—,  $x_3 = 0.021253$ ), при этом натяжение составляет  $T = 12$  кН, затем в результате переходного процесса по истечении времени около 30 с самоустанавливается до формы равновесного состояния с максимальным прогибом  $x_3 = 2.3$  м ( $x_3 = 0.01438$ ) м. На эту форму равновесного состояния накладывается равномерная по длине масса обледенения. Система снова выходит на равновесное состояние с массой провода и обледенения, это состояние в момент времени  $t = 51$  с приводится на рис. 6,б (линия —●—). При этом максимальный прогиб составляет  $x_3 = 2.95$  м ( $x_3 = 0.01844$ ) и натяжение  $T = 9.8$  кН. Считается, что в момент времени  $t = 51$  с 1/10 часть пролета мгновенно нагрета до температуры  $150^\circ\text{C}$ , и эта температура держится неизменной на этой части и нагревает остальную часть пролета за счет теплопроводности в течение 5 с. В течение этого времени эта температура успевает распространиться и выровняться до  $150^\circ\text{C}$  по всей длине. При этом происходит удлинение за счет теплового расширения, рис. 6,б (линия —◆—). В конце нагрева прогиб достигает величины  $x_3 = 6.20$  м ( $x_3 = 0.03875$ ), и температурное натяжение в проводе составляет величину 38 кН.

После этого масса обледенения считается сброшенной мгновенно и в течение одной секунды температура выравнивается с температурой окружающей среды, равной минус  $5^\circ\text{C}$ . Рассчитывается дальнейшее движение, система переходит в новое равновесное состояние с максимальным прогибом  $x_3 = 2.3$  м ( $x_3 = 0.01438$ ) и натяжением в проводе 6.2 кН (это равновесное состояние приведено на рис. 6а сплошной линией).

Отметим, что изменение температуры по времени связано со скоростью изменения температуры, а изменение движение элементов провода связано с ускорением. Поэтому в конце нагрева провода температура по длине провода распределяется почти равномерно, а упругие относительные удлинения по длине имеют неустановившийся ха-

ракти, упругие натяжения только со временем выравниваются. Поэтому в конце нагрева более точно можно оценить только температурное натяжение.

**6. Заключение.** Получено уравнение движения деформируемой линии электропередачи в пространственной постановке. Разработан метод расчета динамики линии электропередачи в пространственной постановке. Проведены численные исследования нагружения ВЛ весовой, ветровой и нагрузкой обледенения. Предложен метод расчета обрыва провода и движение частей после обрыва. Разработан метод расчета термоупругой задачи при обледенении и растапливании ВЛ. Выявлен механизм появления колебательного движения типа “пляски проводов” при действии переменной ветровой нагрузки. Достоверность численных расчетов для частных случаев проверяется полученными аналитическими решениями.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минуллин Р.Г., Фардиев И.Ш. Локационная диагностика воздушных линий электропередачи: монография. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2008. 203 с.
2. Узаров Г.Г., Колесников А.А., Башкевич В.Я. Синтез системы управления плавкой отложений на воздушных линиях электропередач, оборудованных информационно-измерительной системой // Вест. Саратов. гос. техн. ун-т. 2008. Т. 3. № 1. С. 120–128.
3. Шевченко Е.В., Удод Т.Е. Разработка методов борьбы с пляской проводов ВЛ для Украины // Металлические конструкции. 2006. Т. 12. № 4. С. 239–247.
4. Бацева Н.Л. Специальные вопросы проектирования электроэнергетических систем и сетей: учебное пособие // Томск: Изд-во Томск. политехн. ун-т, 2008. 254 с.
5. Шевченко Е.В., Митраков В.А., Танасогло А.В. Определение редуцированного натяжения при обрыве провода // Металлические конструкции. 2010. Т. 16. № 3. С. 189–198.
6. Соколов А.И. Нелинейные колебания абсолютно гибкого провода в потоке воздуха // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2008. № 4-1. 5 с.
7. Гимадиев Р.Ш., Динмухаметов Ф.Ф., Галимуллин Н.Р. Расчет пространственной динамики ВЛ при совместном воздействии ветровой и весовой нагрузки // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2010. № 3–4. С. 28–37.
8. Гимадиев Р.Ш., Динмухаметов Ф.Ф. Моделирование разрыва линий передачи энергий // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2008. № 7–8. С. 137–143.
9. Гимадиев Р.Ш., Гимадиева Т.З. Математическое моделирование деформирования линии электропередачи с учетом теплопроводности // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2011. № 9. С. 51–59.
10. Гимадиев Р.Ш. Задача термоупругости линий электропередач // Тез. докл 8-й Межд. науч.-техн. конф. “Инновационные машиностроительные технологии, оборудование и материалы–2017” (МНТК “ИМТОМ-2017” Часть 2, 6–8 декабря 2017, г. Казань. С. 141–145.
11. Гимадиев Р.Ш., Ильгамов М.А. Статическое взаимодействие профиля мягкого крыла с потоком несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Авиационная техника. 1998. № 1. С. 43–48.
12. Девнин С.И. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975. 192 с.
13. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2006. 208 с.
14. McCombe John, Haigh F.R. Overhead Line Practice. 3rd ed. Macdonald, 1966. P. 216–219.
15. Ryan Hugh. High Voltage Engineering and Testing. IET, 2001, p. 192, ISBN 0-85296-775-6.
16. Pansini A.J. Power Transmission and Distribution. Fairmont Press, 2004. P. 204–205. ISBN 0-88173-503-5.