

УДК 629.7

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА (КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОНОВ

© 2019 г. М. В. Левский

*Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова –  
филиал Государственного космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева,  
Королев, Россия  
e-mail: levskii1966@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.11.2018 г.

После доработки 22.11.2018 г.

Принята к публикации 19.12.2018 г.

Рассмотрена и решена динамическая задача разворота твердого тела (например, космического аппарата) из произвольного начального в требуемое конечное угловое положение при наличии ограничений на управление. Время окончания маневра известно. Для оптимизации программы управления разворотом используется квадратичный критерий качества, минимизируемый функционал характеризует энергетические затраты. Построение оптимального управления разворотом основано на кватернионных переменных и принципе максимума Л.С. Понтрягина. Подробно изучены особенности оптимального движения. Ключевые свойства оптимального решения сформулированы в аналитическом виде. Показано, что в случае ограниченного управления момент сил в процессе оптимального разворота параллелен прямой, неподвижной в инерциальном пространстве, и при вращении твердого тела (космического аппарата) направление кинетического момента постоянно относительно инерциальной системы координат. Оптимальное управление представлено в форме синтеза – найдена синтезирующая функция и дана зависимость управляющих переменных от фазовых координат. Получены формализованные уравнения и расчетные выражения для определения оптимальной программы разворота. Также описана конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота (начального и конечного положений и моментов инерции твердого тела). Приводятся пример и результаты математического моделирования движения космического аппарата как твердого тела при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления пространственной ориентацией космического аппарата. Для динамически симметричного твердого тела дается полное решение задачи переориентации в замкнутой форме, управляющие переменные и оптимальная траектория движения как функции времени представлены в аналитическом виде.

*Ключевые слова:* переориентация, кватернион, управляющая функция, квадратичный критерий качества, принцип максимума, релейное управление, краевая задача

DOI: 10.1134/S0572329919050118

**Введение.** В статье решается задача приведения космического аппарата (КА), как твердого тела, в положение заданной ориентации. Исследованию задачи оптимального управления разворотом твердого тела в различных постановках посвящено множество работ [1–19]. В частности, в [1] рассматриваются вопросы оптимального разворо-

та КА по быстродействию и минимуму энергетических затрат; однако искомое решение строилось в рамках исключительно частного случая, когда КА вращается вокруг вектора конечного поворота (так называемое экстенсивное управление ориентацией). В [2] оптимальные управления находились методом совмещенного синтеза на основе алгоритма с прогнозирующей моделью, причем минимизировался функционал обобщенной работы [13, 20]. В известных публикациях [2, 3] выбранная прогнозирующая модель такова, что полученное решение не является принципиально новым – реализуемое при синтезе управление приводит к тому, что КА поворачивается вокруг оси Эйлера, хотя принципы оптимизации и алгоритмы управления различны. В [4] также описывается построение управлений, стабилизирующих вращение КА вокруг оси Эйлера. В то же время разворот в плоскости наименьшего угла разворота во многих практических случаях не является оптимальным, как бы точно он не исполнялся.

Как отмечено многими авторами [6, 7], аналитическое решение задачи оптимального разворота в замкнутой форме, если бы оно было найдено, имело бы большой практический интерес, так как позволяет применять на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА (для осесимметричного КА некоторые решения известны [9–11]). Однако аналитическое решение задачи пространственного разворота для КА с произвольным распределением масс при произвольных граничных условиях по угловому положению КА не найдено; известны лишь некоторые особые случаи решения задачи разворота (например, [7–9]). Поэтому, в общем случае приходится рассчитывать только на приближенное численное решение задачи. При попытке найти численные решения оптимизационных краевых задач для задач оптимального разворота КА некоторые авторы (например, в [12]) столкнулись с трудностями, связанными с неоднородностью оптимальной управляющей функции, которая наиболее типична для задач оптимального быстродействия (задачи оптимального по быстродействию управления ориентацией КА решались неоднократно [7–10]). Численное решение задачи оптимального разворота динамически симметричного КА рассмотрено в [11] (авторы [11] решали краевую задачу принципа максимума путем замены переменных и сведением ее к краевой задаче разворота сферически симметричного тела).

Принятый в статье показатель оптимальности характеризует энергетические затраты на переориентацию КА (при этом КА считается абсолютно твердым телом). Вопросы экономичности при управлении движением КА остаются до сих пор актуальными, поэтому решаемая в статье задача является практически важной. Нахождению и исследованию оптимальной программы управления ориентацией при развороте КА из одного пространственного положения в другое с учетом ограничений на управление посвящена представленная работа. Приведенное ниже решение отличается от всех известных.

**1. Уравнения углового движения и постановка задачи управления.** Динамика углового движения КА как твердого тела описывается уравнениями Эйлера [14]:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1, \quad J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2, \quad J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \quad (1.1)$$

где  $J_i$ ,  $i = 1 \div 3$  – главные центральные моменты инерции аппарата,  $M_i$  – проекции главного момента сил  $\mathbf{M}$  на главные центральные оси эллипсоида инерции аппарата,  $\omega_i$  – проекции вектора  $\boldsymbol{\omega}$  абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса  $\mathbf{E}$ , образованного главными центральными осями эллипсоида инерции аппарата.

Для описания пространственного движения КА используем математический аппарат кватернионов (параметров Родрига–Гамильтона). Движение связанного базиса  $\mathbf{E}$  относительно опорного базиса  $\mathbf{I}$  будем задавать кватернионом  $\Lambda$  [8]. Для определенно-

сти базис  $\mathbf{I}$  считается инерциальным. В этом случае справедливы следующие кинематические уравнения [8]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, & 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, & 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

или в кватернионной форме:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}$$

где  $\lambda_j$ ,  $j = 0 \div 3$  – компоненты кватерниона  $\Lambda$  ( $\text{sqal}\Lambda = \lambda_0$  – скалярная часть кватерниона  $\Lambda$ ;  $\text{vect}\Lambda = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$  – векторная часть кватерниона  $\Lambda$ ;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – орты осей связанного базиса  $\mathbf{E}$ ), причем  $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ ; символ “ $\circ$ ” обозначает умножение кватернионов [8, с. 11–20]. Здесь и далее операция кватернионного умножения на вектор понимается как умножение на кватернион с нулевой скалярной частью; в частности  $\Lambda \circ \boldsymbol{\omega} = \Lambda \circ \Omega$ , где  $\Omega$  – кватернион, у которого  $\text{sqal}\Omega = 0$ ,  $\text{vect}\Omega = \boldsymbol{\omega}$ . Кватернион  $\Lambda$ , задающий текущую ориентацию КА, принят нормированным [8] для удобства ( $\|\Lambda\| = 1$ ).

В условиях космического полета особенность управления заключается в малости возмущающих моментов, обусловленных взаимодействием КА с внешними полями и сопротивлением среды. Управление движением КА относительно центра масс производится путем изменения момента сил  $\mathbf{M}$ . Допустим, что суммарный импульс от возмущающих моментов пренебрежимо мал по сравнению с управляющим импульсом. В этом случае главный момент сил  $\mathbf{M}$  определяется главным образом моментом управления, создаваемым системой исполнительных органов, а переменные  $M_i$ , стоящие в правых частях системы (1.1), – управления. Далее предположим, что область допустимых значений вектора  $\mathbf{M}$  подобна эллипсоиду инерции КА:

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2 \quad (1.3)$$

В начальный и конечный моменты времени угловые скорости равны  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0$  и  $\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T$ . Практическое значение имеют задачи, в которых граничные значения  $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_T = 0$ . Далее считаем, что разворот выполняется из состояния покоя в состояние покоя (относительно опорного базиса); поэтому начальная и конечная скорости равны нулю  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$  (так как опорный базис  $\mathbf{I}$  не вращается, он фиксированный). Граничные условия задачи разворота запишем так:

$$\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_{\text{f}}, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0 \quad (1.5)$$

где  $T$  – время окончания поворотного маневра. Кватернионы  $\Lambda_{\text{in}}$  и  $\Lambda_{\text{f}}$ , задающие ориентацию связанных с КА осей в начальный и конечный моменты времени, имеют произвольные наперед заданные значения, удовлетворяющие условию  $\|\Lambda_{\text{in}}\| = \|\Lambda_{\text{f}}\| = 1$ .

Эффективность управления будем оценивать интегральной величиной

$$G = \int_0^T (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) dt \quad (1.6)$$

Задача оптимального управления пространственным разворотом КА формулируется следующим образом: необходимо перевести КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) и ограничением (1.3) с минимальным значением функционала (1.6). Время  $T$  окончания маневра переориентации КА фиксировано. Решение  $\mathbf{M}(t)$  ищется в классе кусочно-непрерывных функций.

Принятый критерий оптимальности позволяет определить режим вращения КА, при котором КА перейдет из исходного своего положения  $\Lambda_{\text{in}}$  в заданное конечное угловое положение  $\Lambda_f$  с минимальными затратами управляющих ресурсов, и найти соответствующую программу управления. Сформулированная задача управления КА отличается от рассматриваемых ранее задач видом функционала (1.6). Задача оптимального разворота КА за фиксированное время  $T$ , когда качество управления характеризуется функционалом (1.6), достаточно актуальна. Показатель (1.6) отражает вклад управляющих сил в управлении движением за время разворота (подынтегральное выражение в (1.6) отражает энергию управляющих ускорений и, соответственно, за все время разворота  $T$  участие управляющих сил можно оценить величиной (1.6)). Чем меньше значение интеграла (1.6), тем меньше управляющих усилий требуется для выполнения поворотного маневра. Оптимальным будет такой режим управления и такой разворот КА, при котором значение (1.6) минимально. Но поскольку управляющий момент  $\mathbf{M}$  ограничен, то требуемый поворотный маневр может быть выполнен не для всех  $T$ .

**2. Решение задачи оптимального управления разворотом.** В задаче (1.1)–(1.6) управляющими переменными являются моменты  $M_i$ ,  $i = 1 \div 3$ . Будем решать поставленную задачу, используя принцип максимума Л.С. Понтрягина [21]. Пусть  $\varphi_i$  – сопряженные переменные, соответствующие переменным  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , а  $\psi_j$  – сопряженные переменные, соответствующие компонентам кватерниона  $\lambda_j$ ,  $j = 1 \div 3$ . Тогда Гамильтониан  $H$  для задачи (1.1)–(1.6) будет таким

$$H = -(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \\ + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 - \psi_0(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)/2 + \psi_1(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2)/2 + \\ + \psi_2(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3)/2 + \psi_3(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1)/2$$

Сумму слагаемых, включающих сопряженные переменные  $\psi_j$ , обозначим  $H_k$ . Ограничение на фазовые переменные  $\lambda_j$  несущественно, так как оно выполняется при любых движениях КА вокруг центра масс; в силу уравнений (1.2) имеем свойство  $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{const}$ ; а  $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_{\text{in}}\| = 1$ , и поэтому  $\|\Lambda(t)\| = 1$  в любой момент времени  $t \in [0, T]$ . Уравнения для сопряженных функций  $\varphi_i$  и  $\psi_j$  имеют вид [21]:

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i} \quad (i = 1 \div 3), \quad \dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \quad (j = 0 \div 3) \quad (2.1)$$

Сопряженные уравнения для  $\psi_j$  в развернутой форме записываются следующим образом:

$$\dot{\psi}_0 = -(\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3)/2, \quad \dot{\psi}_1 = (\psi_0\omega_1 + \psi_2\omega_3 - \psi_3\omega_2)/2 \\ \dot{\psi}_2 = (\psi_0\omega_2 + \psi_3\omega_1 - \psi_1\omega_3)/2, \quad \dot{\psi}_3 = (\psi_0\omega_3 + \psi_1\omega_2 - \psi_2\omega_1)/2 \quad (2.2)$$

Из уравнений (2.2) следует, что совокупность переменных  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  обладает свойствами кватернионов. Поэтому совокупность переменных  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  принимаем за компоненты кватерниона  $\Psi$ , у которого  $\psi_0$  – скалярная часть;  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  – составляющие векторной части. Тогда, используя алгебру кватернионов, систему (2.2) представим в форме  $2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega$  [8].

Функцию  $H_k$  и первые уравнения (2.1) запишем в виде  $H_k = 0.5(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3)$  и

$$\dot{\varphi}_1 = -\omega_3 n_2 \varphi_2 - \omega_2 n_3 \varphi_3 - r_1/2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\omega_3 n_1 \varphi_1 - \omega_1 n_3 \varphi_3 - r_2/2, \quad \dot{\varphi}_3 = -\omega_2 n_1 \varphi_1 - \omega_1 n_2 \varphi_2 - r_3/2, \quad (2.3)$$

где  $r_1 = \lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3$ ;  $r_2 = \lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1$ ;  $r_3 = \lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2$ ;  $a n_1 = (J_2 - J_3)/J_1$ ,  $n_2 = (J_3 - J_1)/J_2$ ,  $n_3 = (J_1 - J_2)/J_3$  есть постоянные коэффициенты.

Далее считаем, что  $\psi_j \neq Q\lambda_j$  при любом  $t \in [0, T]$ , где  $Q$  – скалярная величина (иначе  $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$  и дальнейшее решение задачи теряет смысл). Полагая, что  $r_1, r_2, r_3$  есть проекции некоторого вектора  $\mathbf{r}$  на оси связанного базиса  $\mathbf{E}$ , запишем  $\mathbf{r} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi)$ , и  $H_k = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}/2$ , где  $\text{vect}(\cdot)$  – операция выделения векторной части кватерниона;  $\tilde{\Lambda}$  – кватернион, сопряженный кватерниону  $\Lambda$  [8]; знак умножения “ $\circ$ ” обозначает скалярное произведение векторов. Необходимые дифференциальные уравнения для составляющих  $r_i$  вектора  $\mathbf{r}$  получаются дифференцированием по времени переменных  $r_i$ ,  $i = 1-3$ , с учетом уравнений (1.2), (2.2).

$$\dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2 \quad (2.4)$$

или в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \quad (2.5)$$

где символ  $\cdot$  обозначает операцию векторного произведения векторов.

Определим условия максимальности гамильтониана. Гамильтониан  $H$  представим в виде

$$H = -(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) + M_1\phi_1/J_1 + M_2\phi_2/J_2 + M_3\phi_3/J_3 + H_{\text{inv}},$$

где  $H_{\text{inv}}$  не зависит явно от управляющих функций  $M_i$  ( $i = 1 \div 3$ ).

Полагаем  $u_i = M_i/\sqrt{J_i}$  и  $\eta_i = \phi_i/\sqrt{J_i}$  ( $i = 1 \div 3$ ). Перейдя к новым управлениям  $u_i$  и вспомогательным переменным  $\eta_i$ , запишем

$$H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} - |\mathbf{u}|^2 + H_{\text{inv}} = |\mathbf{u}||\boldsymbol{\eta}|\cos\delta - |\mathbf{u}|^2 + H_{\text{inv}}$$

где  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ ;  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ ;  $\delta$  – угол между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\eta}$ . Очевидно, функция  $H$  максимальна, если  $\delta = 0$ . Если  $|\mathbf{u}| \leq u_0$ , то максимум функции  $H$  по аргументу  $|\mathbf{u}|$  находится внутри отрезка  $[0, u_0]$  и совпадает с локальным максимумом. Гамильтониан  $H$  – квадратичная функция вектора управления  $\mathbf{M}$ , и локальный максимум определяется необходимыми условиями экстремума  $\partial H/\partial M_i = 0$ , которым удовлетворяют значения

$$M_i = \phi_i/2, \quad i = 1-3 \quad (2.6)$$

Таким образом, оптимальное управление (2.6) имеет место, если  $\phi_1^2/J_1 + \phi_2^2/J_2 + \phi_3^2/J_3 \leq 4u_0^2$ .

Если  $\phi_1^2/J_1 + \phi_2^2/J_2 + \phi_3^2/J_3 > 4u_0^2$ , то точка экстремума функции  $H$  находится за пределами отрезка  $0 \leq |\mathbf{u}| \leq u_0$ , и гамильтониан  $H$  принимает максимальное значение на границе указанного отрезка. В этом случае в оптимальном решении  $|\mathbf{u}| = u_0$ , и максимум функции  $H$  достигается, когда векторы  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\eta}$  имеют одинаковое направление, а значит, оптимальными являются

$$M_i = \frac{u_0\phi_i}{\sqrt{\phi_1^2/J_1 + \phi_2^2/J_2 + \phi_3^2/J_3}}, \quad i = 1 \div 3$$

В результате оптимальные управляющие функции  $M_i$  описываются зависимостью

$$M_i = \begin{cases} \varphi_i/2, & \varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3 \leq 4u_0^2 \\ \frac{u_0\varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3}}, & \varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3 > 4u_0^2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1.1), (1.2), (2.3), (2.4), (2.7). Система уравнений (2.3), (2.4), (2.7) формализует необходимые условия для исходной задачи оптимального управления (1.1)–(1.6). Задача нахождения оптимальной программы управления свелась к решению системы уравнений углового движения КА (1.1), (1.2), сопряженных уравнений (2.3) и уравнений (2.4) при условии, что управляющие функции  $M_i$  вычисляются в соответствии с (2.7). Система уравнений (1.1), (2.3), (2.4), (2.7) позволяет обнаружить закономерности оптимального движения в явном виде.

Найдем характерные свойства решения задачи (1.1)–(1.6). Из (2.5) видно, что вектор  $\mathbf{r}$  является неподвижным относительно инерциального базиса  $\mathbf{I}$  и  $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ . Оптимальная функция  $\mathbf{r}(t)$  связана с кватернионом ориентации  $\Lambda(t)$  зависимостью [8]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где } \mathbf{c}_E = \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} = \text{const}$$

Решение системы уравнений (1.1), (2.3), (2.4), (2.7) существует и оно единственное (при условии  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ ). Значение  $\mathbf{r}(0)$  таково, чтобы в результате интегрирования уравнений (1.1), (1.2), (2.3), (2.4), (2.7) с начальными условиями  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$  для траектории движения  $\Lambda(t)$  выполнялось равенство  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ . В силу того, что  $|\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$ , для удобства перейдем к орту  $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  и дальше будем использовать его. Обозначим  $r = |\mathbf{r}(t)|$ . Учитывая соотношения (2.4) и то, что  $r = \text{const} \neq 0$ , для вектора  $\mathbf{p}(t)$  запишем уравнение  $\dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p}$  или

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 \quad (2.8)$$

где  $p_i$  – компоненты вектора  $\mathbf{p}$  (заметим, что  $r_i = |\mathbf{r}(0)|p_i$ ). Уравнения (1.1), (2.3), (2.8) совместно с равенствами  $r_i = rp_i$  и (2.7) образуют замкнутую систему уравнений.

Краевая задача принципа максимума заключается в определении значения вектора  $\mathbf{p}(0)$  и положительной величины  $r$ , при которых решение системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.3), (2.8) с одновременным выполнением (2.7) удовлетворяет условиям разворота (1.4), (1.5). Из структуры оптимального управления (2.7) видно, что когда  $|\mathbf{u}| < u_0$  будет  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\varphi}$ , и когда  $|\mathbf{u}| = u_0$  будет  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\varphi}$ . Поэтому при любом значении  $\boldsymbol{\varphi}$  для оптимальных векторов  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  удовлетворяется равенство  $\mathbf{M} = h\boldsymbol{\varphi}$ , где  $h$  – скалярная величина. Для сопряженных переменных  $\varphi_i$  оптимальное решение подчиняется уравнениям:

$$\varphi_i = a(t)p_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (2.9)$$

где  $a(t)$  – скалярная функция времени, равная  $a(t) = a(0) - rt/2$  ( $r = \text{const} = |\mathbf{r}(0)|$ ).

Оптимальное значение управляющего момента  $\mathbf{M}$  удовлетворяет соотношениям

$$M_i = m(t)p_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (2.10)$$

в которых скалярная функция  $m(t)$  определяется вектором  $\boldsymbol{\varphi}$  и равна

$$m(t) = \begin{cases} a(t)/2, & a^2(t)(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3) \leq 4u_0^2 \\ \frac{u_0 \text{sign} a(t)}{\sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}}, & a^2(t)(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3) > 4u_0^2 \end{cases}$$

Из (2.8), (2.10) отчетливо видно, что при оптимальном управлении момент сил  $\mathbf{M}$  действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Поэтому при нулевых граничных угловых скоростях  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$  решение системы (1.1),

(2.3), (2.7), (2.8) описывает движение, при котором кинетический момент КА  $\mathbf{L}$  имеет постоянное направление в инерциальной системе координат, причем это решение единственное. Для движения  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , как решения системы (1.1), (2.3), (2.7), (2.8), выполняются равенства:

$$\boldsymbol{\omega}_i = b p_i / J_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (2.11)$$

показывающие связь между векторами  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{p}$ , где  $b$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от времени (то, что равенства (2.11) удовлетворяют уравнениям (2.8) легко проверить, подставив (2.11) в уравнения движения (1.1) с учетом равенств (2.7), (2.9)).

Истинность решений (2.9), (2.11) для системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.3), (2.7), (2.8) (с учетом равенств  $r_i = r p_i$ ) подтверждается последовательной подстановкой соотношений (2.9) в уравнения (2.3) с учетом связей (2.11) для всех  $i = 1, 2, 3$  (равенства (2.11) – прямое следствие системы (1.1), (2.8), (2.10)). Если обозначить  $J_{SC} = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ , то система (2.3) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = (J_{SC}\boldsymbol{\omega}) \times (J_{SC}^{-1}\boldsymbol{\Phi}) - J_{SC}(\boldsymbol{\omega} \times (J_{SC}^{-1}\boldsymbol{\Phi})) - \mathbf{r}/2 \quad (2.12)$$

Правая часть уравнения (2.12) с учетом (2.9), (2.11) и равенств  $r_i = r p_i$  будет следующей

$$\begin{aligned} b\mathbf{p} \cdot (J_{SC}^{-1}a\mathbf{p}) - J_{SC}((J_{SC}^{-1}b\mathbf{p}) \cdot (J_{SC}^{-1}a\mathbf{p})) - \mathbf{r}/2 &= a\mathbf{p} \cdot (J_{SC}^{-1}b\mathbf{p}) - \mathbf{r}/2 = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}/2 = \\ &= -\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Phi} - r\mathbf{p}/2 = -a(t)\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p} - r\mathbf{p}/2 \end{aligned}$$

Левая часть уравнения (2.12) с учетом (2.8), (2.9) такова  $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \dot{a}(t)\mathbf{p} + a(t)\dot{\mathbf{p}} = \dot{a}(t)\mathbf{p} - a(t)\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p}$  и она тождественно равна правой части уравнения (2.12), так как в зависимостях (2.9) скалярная функция  $a(t)$  удовлетворяет условию  $\dot{a}(t) = -r/2$ .

Одним из основных свойств оптимального разворота является следующее: на всем интервале управления  $0 \leq t \leq T$  во время движения КА отношение кинетической энергии вращения  $E_K$  к квадрату модуля кинетического момента КА постоянно. Докажем сделанное утверждение. Найдем  $E_K = b^2(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2$ , и  $E_K/|\mathbf{L}|^2 = (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2$  (из (2.11) имеем  $b^2 = |\mathbf{L}|^2$ ). Для решения (2.11) на всем отрезке времени  $[0, T]$  справедливо равенство:

$$p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const} \quad (2.13)$$

Чтобы убедиться в этом, продифференцируем по времени левую часть указанного равенства с учетом уравнений (2.8) для  $p_i$  и условий оптимальности (2.11) для компонент вектора  $\boldsymbol{\omega}$ .

$$\begin{aligned} p_1\dot{p}_1/J_1 + p_2\dot{p}_2/J_2 + p_3\dot{p}_3/J_3 &= \\ = \omega_1 p_2 p_3 / J_3 - \omega_1 p_2 p_3 / J_2 + \omega_1 p_2 p_3 / J_2 - \omega_2 p_1 p_3 / J_3 + \omega_2 p_1 p_3 / J_3 - \omega_1 p_2 p_3 / J_3 &\equiv 0 \end{aligned}$$

Следовательно,  $E_K/|\mathbf{L}|^2 = \text{const} = (p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3)/2$ , где  $p_{i0} = p_i(0)$ .

Из уравнений (2.8), (2.11) получим следующие уравнения для компонент  $p_i$  вектора  $\mathbf{p}$

$$\dot{p}_1 = |\mathbf{L}| \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} p_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = |\mathbf{L}| \frac{J_3 - J_1}{J_1 J_3} p_1 p_3, \quad \dot{p}_3 = |\mathbf{L}| \frac{J_1 - J_2}{J_1 J_2} p_1 p_2 \quad (2.14)$$

Траектория движения конца вектора  $\mathbf{p}$  в связанной системе координат определяется системой двух уравнений:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \quad p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = C^2 = \text{const}$$

Для векторов  $\mathbf{p}(0)$  и  $\mathbf{p}(T)$  имеем:

$$\Lambda_f \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_f = \Lambda_{in} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in} \quad (2.15)$$

или  $\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_{in}$ , где  $\Lambda_{in} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$  – кватернион разворота.

Используя свойство (2.13) оптимального движения и константу  $C$ , оптимальное управление  $\mathbf{M}$  запишем в виде

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} (\rho/2 - rt/4)\mathbf{p}, & |\rho - rt/2| \leq 2m_0 \\ m_0 \text{sign}(2\rho - rt)\mathbf{p}, & |\rho - rt/2| > 2m_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

где  $r = |\mathbf{r}(0)|$ ;  $\rho = a(0)$ ;  $m_0 = u_0/C$ ;  $C = \sqrt{p_1^2(0)/J_1 + p_2^2(0)/J_2 + p_3^2(0)/J_3}$ .

Таким образом, для динамической системы (1.1), (1.2) управление (2.16) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности для критерия (1.6) при наличии ограничения (1.3). Так как начальная  $\boldsymbol{\omega}(0)$  и конечная  $\boldsymbol{\omega}(T)$  угловые скорости равны нулю, то такое управление и такое вращение КА осуществимо (замкнутая система (1.1), (2.3), (2.4), (2.7) имеет решение), если конечно  $T \geq T_{fast}$ , где  $T_{fast}$  – минимально возможное время разворота КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) при ограничении (1.3). Зависимости (2.9), (2.11), (2.16) – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.3), (2.7), (2.8). Докажем данное утверждение.

Пусть  $\mathbf{q}$  – орт, параллельный моменту  $\mathbf{M}$ , причем в начальный момент времени направления векторов  $\boldsymbol{\phi}$  и  $\mathbf{q}$  совпадают. Тогда  $\boldsymbol{\phi} = f\mathbf{q}$ , где  $f$  – скалярная функция с  $f(0) > 0$ . В окрестности точки  $t = 0$  имеем  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$  и  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ , где  $\mathbf{L} = J_{SC}\boldsymbol{\omega}$  – кинетический момент КА;  $\chi$  – скалярная величина. Подставим  $\boldsymbol{\phi} = f(t)\mathbf{q}$  в уравнения (1.1) с учетом (2.7) и условия  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ .

$$\mathbf{q}\dot{\chi} + \dot{\mathbf{q}}\chi + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q}\chi = m(t)\mathbf{q} \quad (2.17)$$

где скалярная функция  $m(t)$  определяется по выражению

$$m(t) = \begin{cases} \rho/2 - rt/4, & |\rho - rt/2| \leq 2m_0 \\ m_0 \text{sign}(2\rho - rt), & |\rho - rt/2| > 2m_0 \end{cases}$$

Сумма  $\dot{\mathbf{q}}\chi + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q}\chi$  ортогональна орту  $\mathbf{q}$  или равна нулю (всегда  $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ , так как  $|\mathbf{q}| = 1$ ). Уравнение (2.17) будет выполнено в единственном случае, если  $\dot{\chi} = m(t)$  и  $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q}$ . Теперь подставим равенства  $\boldsymbol{\phi} = f(t)\mathbf{q}$  и  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$  в (2.12). Левая часть уравнения (2.12) равна

$$\dot{f}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}f = \dot{f}\dot{\mathbf{q}} - f\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$$

(уравнения (1.1), (2.3) должны выполняться одновременно, поэтому свойство  $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q}$  взято из (2.17)). Правая часть уравнения (2.12) будет такой

$$\chi\mathbf{q} \times (J_{SC}^{-1}f\dot{\mathbf{q}}) - fJ_{SC}((J_{SC}^{-1}\chi\dot{\mathbf{q}}) \times (J_{SC}^{-1}\mathbf{q})) - \mathbf{r}/2 = -f\chi J_{SC}^{-1}\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q} - \mathbf{r}/2 - \mathbf{r}/2 = -f\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} - \mathbf{r}\rho/2$$

Приравнивая левую и правую части уравнения (2.12) получим  $\dot{f}\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{r}\rho/2$ , из чего следуют равенства  $\dot{f} = -r/2$  и  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$  (так как  $f(0) > 0$ , а  $f(T) < 0$ , и поэтому  $\dot{f} < 0$ ). В итоге пришли к выводу – если в какой-либо момент времени  $t$  кинетический момент  $\mathbf{L}$  и вектор  $\boldsymbol{\phi}$  параллельны, то они параллельны на всем интервале управления  $0 < t < T$ . А из-за наличия граничных условий  $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$  и  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  векторы  $\boldsymbol{\phi}$  и  $\mathbf{L}$  параллельны как минимум два раза – в самом начале разворота ( $\mathbf{L} = h\boldsymbol{\phi}$  при  $t \rightarrow 0$ ) и в самом конце маневра ( $\mathbf{L} = -h(T-t)\boldsymbol{\phi}$  при  $t \rightarrow T$ ). Поэтому заключаем, что при оптимальном движении на всем отрезке времени  $t \in [0, T]$  имеет место свойство  $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$ . Отсюда становятся очевидны соотношения (2.9), (2.11).

Доказано, что зависимости (2.9), (2.11) есть единственное решение системы уравнений (1.1), (2.3), (2.7), (2.8) с граничными условиями  $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  (с учетом равенств  $r_i = rp_i$ ).

Из уравнений (2.11) отчетливо видно, что в геометрическом представлении вектор  $\mathbf{p}$  есть ни что иное, как орт оптимального кинетического момента КА  $\mathbf{L}$  в связанной с КА системе координат. Оптимальные функции  $\omega_i(t)$ ,  $\varphi_i(t)$ ,  $p_i(t)$  удовлетворяют равенствам (2.9), (2.11), в которых переменные  $p_i(t)$  являются решением уравнений (2.8). Оптимальное управление вычисляется по формуле (2.16). Оптимальным (в смысле минимума показателя (1.6)) будет разворот КА, при котором направление кинетического момента остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  параллельны). Управление (2.16) оптимально, потому что оно является единственным решением системы уравнений (1.1), (2.3), (2.7), (2.8) (система (2.3), (2.7), (2.8) формализует необходимые условия оптимальности).

Задача построения оптимального управления  $\mathbf{M}(t)$  состоит, главным образом, в нахождении такого вектора  $\mathbf{p}(0)$ , чтобы в результате движения твердого тела из состояния (1.4) в соответствии с уравнениями (1.2), (2.8), (2.11) выполнялись равенства  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  и  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ . Для получения функциональной зависимости управлений от фазовых координат необходимо решить уравнения (2.8), которые для закона (2.11) примут вид (2.14). Общее решение приведенной системы уравнений определить практически невозможно. Трудность заключается в определении граничных значений  $\mathbf{p}(0)$  и  $\mathbf{p}(T)$ , которые связаны между собой выражением (2.15).

Раскроем свойства функций  $b(t)$  и  $m(t)$  (свойства функции  $a(t)$  описаны выше). Для вращения твердого тела с постоянным направлением кинетического момента относительно инерциальной системы координат (независимо от изменения модуля  $|\mathbf{L}|$ ) имеет место равенство

$$\int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt = K_c t_{pr} \quad (2.18)$$

где  $K_c$  – произвольная величина кинетического момента ( $K_c > 0$ );  $t_{pr}$  – прогнозируемое время разворота из положения  $\Lambda_{in}$  в положение  $\Lambda_f$ , т.е. время, когда выполнится равенство  $\Lambda = \Lambda_f$  для решения  $\Lambda(t)$  системы уравнений (1.2), (2.8), (2.11), в которых  $b = K_c$ , а  $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$  (соответствующую теорему можно доказать [18]). Обозначим

$$F = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt \quad (2.19)$$

Если  $b(t) = \text{const} = K_c$ , то  $F = K_c t_{pr}$ . Каждой конкретной величине  $K_c$  соответствует свое значение  $t_{pr}$  (значения  $t_{pr}$  и  $K_c$  связаны обратно-пропорциональной зависимостью). Взяв  $K_c \neq 0$  и моделируя неуправляемое вращение тела (когда  $\mathbf{M} = 0$ ) для соответствующих начальных условий  $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ ,  $\omega_i(0) = K_c p_{i0} / J_i$ , получим прогнозируемое время  $t_{pr}$  и значение константы  $F$ .

Характеристику  $F$  “траектории свободного движения” (как и вектор  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ , задающий направление кинетического момента  $\mathbf{L}$ ) определяют значения  $\Lambda_{in}$ ,  $\Lambda_f$  и  $J_1, J_2, J_3$  и только они одни и никакие другие. Под “траекторией свободного движения” понимается совокупность угловых положений (значений  $\Lambda$ ), принимаемых в ходе неуправляемого вращательного движения абсолютно твердого тела, поскольку последовательность сменяемых положений  $\Lambda$  во время движения, удовлетворяющего уравнениям (1.2), (2.8), (2.11), не зависит от закона изменения функции  $b(t)$  и повторяет угловые положения при вращении с  $b(t) = \text{const}$ . В геометрической интерпретации “траектория свободного движения” есть след изображающей точки  $\Lambda(t)$ , где  $\Lambda(t)$  является ре-

шением системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) при  $M_1 = M_2 = M_3 = 0$  и  $\omega \neq 0$ .

Подстановка (2.11) в уравнения (1.1) с учетом (2.8) дает равенство  $\mathbf{M} = \dot{b}\mathbf{p}$ . Функция  $b(t)$  должна удовлетворять условию  $b(0) = b(T) = 0$ , так как граничные значения  $\omega(0) = \omega(T) = 0$ . На основании свойства симметричности функций  $m(t)$ ,  $b(t)$  (относительно момента времени  $t = T/2$ ), вытекающего из соотношений (2.7), (2.9), а также (2.16), выпишем ключевые особенности оптимальных функций  $m(t)$  и  $b(t)$ :

$$m(0) = -m(T) > 0, \quad b(t) \geq 0, \quad |m(t)| = |m(T-t)|$$

$$\int_0^{T/2} |m(t)| dt = \int_{T/2}^T |m(t)| dt, \quad \int_0^{T/2} b(t) dt = \int_{T/2}^T b(t) dt, \quad b(t) = b(T-t)$$

В зависимости от соотношения значений характеристик разворота  $F$ ,  $m_0$  и  $T$  возможны три варианта оптимального управления и, соответственно, три оптимальных движения:

1) управление с двумя точками переключения функции  $m(t)$ , которое включает четыре участка – вращение с максимальным моментом  $\mathbf{M} = m_0\mathbf{p}$ , направленным по положительному направлению вектора  $\mathbf{p}$ ; затем движение с линейно уменьшающимся по величине (с  $m_0$  до нуля) моментом  $\mathbf{M}$ , направленным по вектору  $\mathbf{p}$  ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} > 0$ ); далее движение с линейно увеличивающимся по величине (с нуля до  $m_0$ ) моментом  $\mathbf{M}$ , но имеющим противоположное с вектором  $\mathbf{p}$  направление ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} < 0$ ); и последняя фаза – вращение с максимально возможным моментом  $\mathbf{M} = -m_0\mathbf{p}$ , направленным противоположно вектору  $\mathbf{p}$ ;

2) вращение с линейно уменьшающимся по модулю (с некоторого  $m(0)$  до нуля) моментом  $\mathbf{M}$ , направленным по положительному направлению вектора  $\mathbf{p}$  ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} > 0$ ), и затем вращение с линейно увеличивающимся по модулю (с нуля до  $m(0)$ ) моментом  $\mathbf{M}$ , но имеющим противоположное с вектором  $\mathbf{p}$  направление ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} < 0$ ); при этом  $m(0) \leq m_0$ ;

3) вращение с максимально возможным моментом  $\mathbf{M} = m_0\mathbf{p}$ , направленным по положительному направлению вектора  $\mathbf{p}$ , а затем вращение с максимально возможным моментом  $\mathbf{M} = -m_0\mathbf{p}$  противоположного направления. Это – релейное управление, и оно соответствует максимальному быстродействию (развороту КА за минимально возможное время).

Описанные типы разворота наглядно отражает рис. 1. Верхняя часть рис. 1 соответствует первому типу оптимального движения (линейное управление с насыщением), когда функция  $m(t)$  имеет две точки переключения (они соответствуют моментам времени  $t = t_1$  и  $t = t_2$ ); средняя часть – второму типу (линейное изменение функции  $m(t)$  с  $m(0)$  до  $-m(0)$ ); и нижняя часть – третьему типу (релейному управлению с одной точкой переключения в момент времени  $t = T/2$ ). Для нулевых граничных угловых скоростей (когда  $\omega(0) = \omega(T) = 0$ ) времена  $t_1$  и  $t_2$  удовлетворяют уравнению  $t_1 + t_2 = T$ . Второй тип управления реализуется в случае, если заданное время  $T$  велико (разворот совершается с относительно малой угловой скоростью). Для всех трех типов управления смена направления силового момента  $\mathbf{M}$  происходит в точке  $t = T/2$ . Если величина момента  $|\mathbf{M}|$  линейно изменяется, то в момент времени  $t = T/2$  момент  $\mathbf{M}$  равен нулю ( $\mathbf{M}(T/2) = 0$ ). Если реализуется релейное управление ( $T$  – минимально возможное значение для заданных условий разворота  $\Lambda_{in}$ ,  $\Lambda_f$ ,  $u_0$ ,  $J_i$ ), то момент времени  $t = T/2$  – точка переключения (в этот момент времени все три управляющие функции  $M_i$  меняют свой знак на обратный). Следует подчеркнуть, что не всегда при заданных значениях  $\Lambda_{in}$ ,  $\Lambda_f$ ,  $u_0$ ,  $J_i$  можно осуществить разворот КА за отведенное время  $T$ . Если соотношение параметров  $F$ ,  $T$ ,  $m_0$  таково, что решение задачи оптимального быстродей-

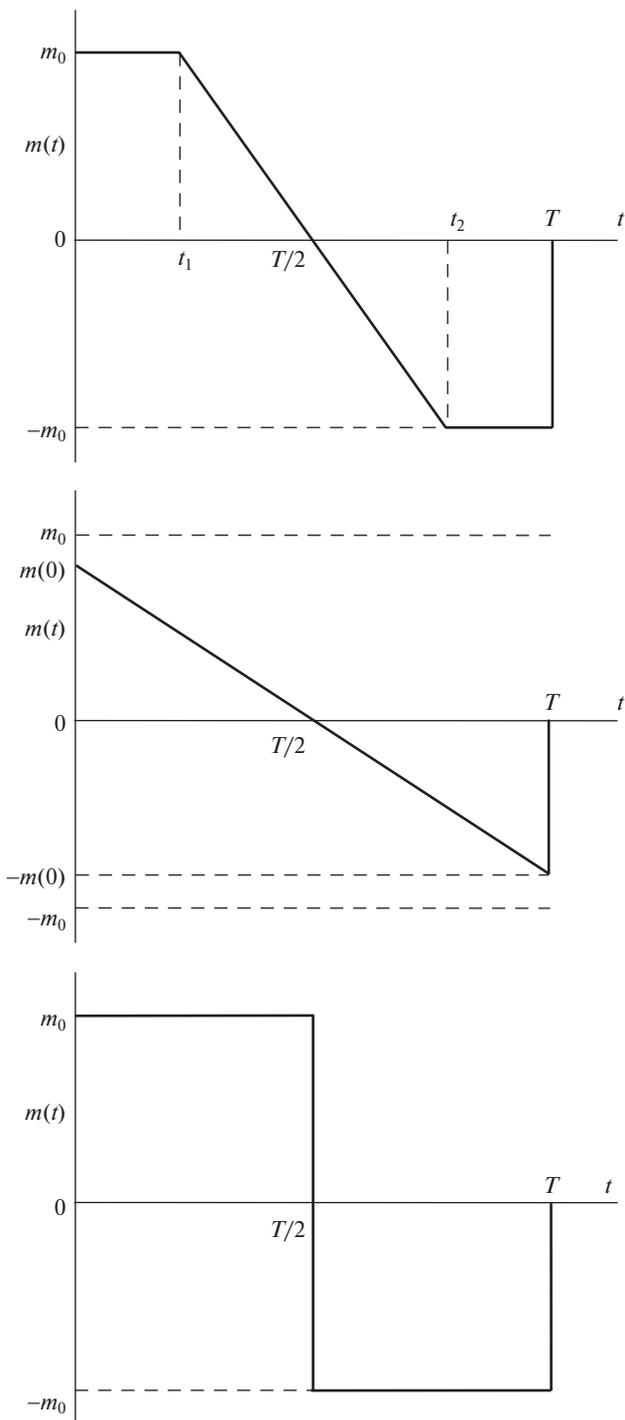


Рис. 1

ствия при ограничении (1.3) дает значение  $T_{\text{fast}} > T$ , где  $T_{\text{fast}} = 2\sqrt{F/m_0}$ ;  $T$  – заданное время разворота, то реализация маневра разворота с такими исходными данными  $\Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda_{\text{f}}$ ,  $m_0$ ,  $J_i$ ,  $T$  невозможна, и поставленная задача оптимального управления (1.1)–(1.6) не имеет решения. Вид функций  $b(t)$ ,  $m(t)$  зависит от числа точек переключения. Исследуем функции  $b(t)$ ,  $m(t)$  для каждого варианта управления разворотом КА.

Если длительность разворота  $T$  и значения  $F$ ,  $m_0$  таковы, что  $m_0 T^2 \geq 6F$ , то оптимальным является второй тип управления с параболическим изменением модуля кинетического момента. В этом случае отсутствуют участки с  $|\mathbf{M}| = \text{const}$ , при этом  $m(0) \leq m_0$  и оптимальными являются функции  $m(t) = m(0)(1 - 2t/T)$  и  $b(t) = m(0)t(1 - t/T)$ , где  $m(0) = 6F/T^2$ . Максимальная величина кинетического момента составляет  $L_{\text{max}} = 3F/2T$ .

Если  $m_0 T^2 = 4F$ , то оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения в момент времени  $t = T/2$ . В этом случае на всем интервале управления  $0 < t < T$  момент  $\mathbf{M}$  максимально возможный  $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$ , а оптимальные функции  $m(t)$  и  $b(t)$  равны  $m(t) = m_0 \text{sign}(T/2 - t)$ ;  $b(t) = m_0(T/2 - |t - T/2|)$ . Максимальное значение  $L_{\text{max}} = m_0 T/2$ .

Если  $4F < m_0 T^2 < 6F$ , то оптимальным является первый тип управления, когда вначале и в конце разворота  $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$ , а между участками с максимальным управляющим моментом (когда  $|\mathbf{M}| = m_0$ ) модуль  $|\mathbf{M}|$  меняется по линейному закону сначала с  $m_0$  до нуля, затем обратно с нуля до  $m_0$ . Моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , соответствующие точкам переключения, таковы:

$$t_1 = (T - \sqrt{3T^2 - 12F/m_0})/2, \quad t_2 = (T + \sqrt{3T^2 - 12F/m_0})/2$$

В этом (самом общем) случае оптимальными являются функции

$$m(t) = m_0(|t - t_2| - |t - t_1|)/(t_2 - t_1), \quad b(t) = \begin{cases} m_0(T/2 - |t - T/2|), & |2t - T| \geq R \\ m_0(t - (t - t_1)^2/R), & |2t - T| < R \end{cases}$$

где  $R = \sqrt{3(T^2 - 4F/m_0)}$ ; максимальное значение модуля  $|\mathbf{L}(t)|$  равно  $L_{\text{max}} = m_0(T/2 - R/4)$ .

Таким образом,  $m_0 T^2 \geq 4F$  – условие осуществимости разворота. Если  $m_0 T^2 < 4F$ , то разворот невозможен за время  $T$ . Значение  $F$  зависит только от значений  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  и  $\Lambda_{\text{in}} = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_{\text{f}}$ .

Интеграл (2.19) для разных программ управления вычисляется по-разному. Для программы управления, когда точка переключения отсутствует, интеграл (2.19) равен  $F = m(0)T^2/6$ , причем  $m(0) \leq m_0$  (т.е. для исполнения такого режима управления должно быть  $F \leq m_0 T^2/6$ ). Для программы управления с одной точкой переключения интеграл (2.19) равен  $F = m_0 T^2/4$ . Для программы управления с двумя точками переключения интеграл (2.19) равен

$$F = m_0(T - 2t_1)^2/6 + m_0 t_1(T - t_1)$$

Последнее уравнение позволяет найти время  $t_1$  при известных значениях  $F$  и  $T$ .

Из вышеприведенных расчетных выражений становится понятным, как время разворота  $T$  и значения  $F$ ,  $m_0$ , однозначно определяемые исключительно условиями разворота (значениями  $\Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda_{\text{f}}$ ,  $u_0$ ,  $J_i$ ), влияют на выбор оптимальной функции  $b(t)$  и программы  $m(t)$ . Значение функционала (1.6) для оптимального управления с двумя точками переключения равно  $G = u_0^2(T - 2R/3)$ ; для релейного управления с одной точкой

переключения  $G = u_0^2 T$ ; а когда  $6F/T^2 \leq m_0$  и точка переключения отсутствует, мы имеем  $G = C^2 m^2(0)T/3$ , где  $m(0) = 6F/T^2$ .

**3. Построение типовой программы оптимального разворота КА.** Функции  $\varphi_i(t)$ ,  $p_i(t)$ ,  $M_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  будут оптимальными тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнениям (2.8), (2.9), (2.16). Определяющим в решении задачи оптимального разворота (при построении оптимального управления  $\mathbf{M}(t)$  и оптимального движения  $\boldsymbol{\omega}(t)$ ) является нахождение начальных условий  $\mathbf{p}(0)$ , интеграла  $F$  и соответствующих максимально возможного момента  $m_0$  и параметров  $\rho$ ,  $r$  (вектор  $\mathbf{p}(0)$  и значение  $F$  зависят исключительно от кватерниона разворота  $\Lambda_{\text{in}} = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_f$  и моментов инерции КА  $J_1, J_2, J_3$ , и не зависят от времени  $T$ ).

Управляющие переменные рассчитываются в соответствии с законом (2.16), для реализации которого необходимо в каждый момент времени  $t$  знать все три переменные  $p_1, p_2, p_3$ . При оптимальном движении компоненты  $p_i$  вектора  $\mathbf{p}$  подчиняются уравнениям (2.14). Система (1.2), (2.11), (2.14) имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел. Для сферически симметричного твердого тела ( $J_1 = J_2 = J_3$ ) решение такое:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad M_i(t) = m(t)p_{i0}, \quad \omega_i(t) = b(t)p_{i0}/J_i$$

где  $v_1, v_2, v_3$  – компоненты векторной части кватерниона разворота  $\Lambda_{\text{in}}$ , а функции  $b(t)$  и  $m(t)$  зависят от соотношения величин  $F = 2J_1 \arccos v_0$ ,  $m_0 = u_0 \sqrt{J_1}$  и  $T$  (как было показано выше). Во время разворота КА вращается вокруг оси Эйлера, поэтому траектория оптимального движения  $\Lambda(t)$  имеет аналитический вид

$$\Lambda(t) = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 s(t)/2J_1}, \quad s(t) = \int_0^t b(t) dt$$

где  $e$  – кватернионная экспонента [8]. Приведенное решение существенно отличается от известного случая [19].

Для динамически симметричного КА (например, когда  $J_2 = J_3$ ) задача оптимального управления разворотом решается до конца (не умаляя общности рассуждений, за ось симметрии принята ось  $OX$  космического аппарата). Оптимальное движение в этом частном, но достаточно распространенном случае представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси  $OX$  и вокруг некоторого направления  $\xi$ , неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол  $\vartheta$ . Угловые скорости относительно осей  $OX$  и  $\xi$  изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, и поэтому справедливо соотношение

$$\Lambda_f = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha/2}$$

где векторы в показателе степени кватернионной экспоненты понимаются как кватернионы с нулевой скалярной частью;  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ ;  $\mathbf{e}_1$  – орт продольной оси КА;  $\alpha, \beta$  – углы поворота КА вокруг продольной оси  $OX$  и вокруг вектора  $\mathbf{p}$  соответственно (считается  $|\alpha| \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ ). Решение  $\mathbf{p}(t)$  системы (1.1), (2.8), (2.16) представим в следующем виде:

$$p_1 = p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos k + p_{30} \sin k, \quad p_3 = -p_{20} \sin k + p_{30} \cos k, \quad \text{а } k = \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt \quad (3.1)$$

где  $p_{i0} = p_i(0)$ ;  $J = J_2 = J_3$ ; продольная угловая скорость  $\omega_1(t)$  определяется из соотношений (2.11) с учетом  $p_1 = \text{const} = p_{10}$ . Зависимость констант  $p_{i0}, \alpha, \beta$  от значений кватер-

нионов  $\Lambda_{\text{in}}$  и  $\Lambda_f$ , задающих начальную и конечную ориентации КА определяется системой уравнений:

$$\alpha = \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta, \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0, \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1$$

$$p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2, \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3 \quad (3.2)$$

где  $v_0, v_1, v_2, v_3$  – компоненты кватерниона разворота  $\Lambda_{\text{in}} = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_f$ ;  $-\pi \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ . Существование решения системы (3.2) для любых значений кватерниона  $\Lambda_{\text{in}}$  доказано в [9]. Оптимальное решение  $M_i(t)$  запишем следующим образом

$$M_1 = m(t)p_{10}, \quad M_2 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma), \quad M_3 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)$$

где  $\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$ , если  $p_{30} \geq 0$ , или  $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$ , если  $p_{30} < 0$ , ( $|p_{10}| \neq 1$ ). Случай  $|p_{10}| = 1$  не рассматривается, так как он соответствует плоскому вращению КА вокруг продольной оси  $OX$ . Программные значения функций  $\omega_i$  (проекции требуемого вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}^*$  на оси связанной системы координат) вычисляются по формулам (3.1) и (2.11). Вид функций  $m(t)$  и  $b(t)$  определяется значениями  $T, m_0$  и  $F$ , которые рассчитываются исходя из условий разворота  $\Lambda_{\text{in}}, \Lambda_f, u_0$  и моментов инерции КА  $J_1, J_2, J_3$ . Оптимальная траектория движения  $\Lambda(t)$  может быть представлена в аналитическом виде

$$\Lambda(t) = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 \sigma / 2} \circ e^{\mu \mathbf{e}_1 / 2}$$

где  $\sigma = J^{-1} \int_0^t b(t) dt$ ;  $\mu = \sigma p_{10} (J - J_1) / J_1$ . Интеграл (2.19) равен  $F = \beta J$ .

Для несимметричного КА ( $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ ) решение системы уравнений (1.2), (2.8), (2.11) находится только численными методами (например, методом последовательных приближений или [22–25]). Определение вектора  $\mathbf{p}_0$  производится путем решения краевой задачи  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \Lambda_{\text{in}}$  с учетом накладываемых на движение связей (2.14). В способе [26] и системе [27] такая задача решена для КА с произвольными моментами инерции (методом итераций). Заметим, что решение  $\mathbf{p}_0$  не зависит от характера изменения модуля кинетического момента, входящего в уравнения (2.14). Поэтому для нахождения оптимального значения  $\mathbf{p}_0$  правомерно принять  $|\mathbf{L}| = \text{const} \neq 0$ . Случай решения  $\mathbf{p}(t)$  системы (2.14) с  $|\mathbf{L}| = \text{const}$  соответствует вращению твердого тела с  $\mathbf{M} = 0$  (поскольку уравнения (2.14) и (2.8) выполняются одновременно).

Для построения оптимальной управляющей функции  $\mathbf{M}(t)$  при развороте КА необходимо знать не только программу изменения координат  $p_i(t)$ , но и значения параметров  $F, m_0$  (а также времена  $t_1$  и  $t_2$ , если оптимальным является управление с двумя точками переключения), определяющих тип оптимальной программы  $m(t)$  и темп приближения к требуемому конечному состоянию (1.5). При оптимальном управлении движение КА относительно центра масс обладает следующими оригинальными свойствами:

$$\Lambda \circ \mathbf{M}(T - t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T - t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\max_{t < T/2} m(t) = -\min_{t > T/2} m(t) = m(0), \quad L_{\text{max}} = \max_{0 < t < T} \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|$$

В момент времени  $t = T/2$  (посередине разворота) наблюдаются следующие отличительные свойства оптимального движения: (а) момент сил  $\mathbf{M}$  меняет свое направление на противоположное; (б) кинетический момент КА достигает максимального значе-

ния  $|\mathbf{L}(T/2)| = L_{\max}$ ; (с) пройденный “путь”  $s(t)$  равен половине целого “пути”  $F$  всего разворота:  $s(T/2) = F/2$ , где

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{L}(t)| dt$$

Решение задачи оптимального разворота (в смысле минимума (1.6)) подчиняется системе уравнений (2.8), (2.9), (2.11), а управляющие переменные  $M_i$  и угловые скорости  $\omega_i$  изменяются согласно законам (2.16), (2.11), соответственно. Значения вектора  $\mathbf{p}_0$  и характеристики  $F$  определяются в результате решения краевой задачи принципа максимума. Константы  $F$ ,  $m_0$  полностью определяют программу движения при оптимальном законе управления пространственным разворотом КА. Программное изменение момента сил  $\mathbf{M}$  описывается зависимостью

$$\mathbf{M} = m(t)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda$$

в которой функция  $m(t)$  известна

$$m(t) = \begin{cases} m_0 \text{sign}(T/2 - t), & m_0 T^2 = 4F \\ m_0(|t - t_2| - |t - t_1|)/(t_2 - t_1), & 4F < m_0 T^2 < 6F \\ 6F(1 - 2t/T)/T^2, & m_0 T^2 \geq 6F \end{cases}$$

Вектор  $\mathbf{p}_0$  и параметры  $m_0$ ,  $F$  определяются исключительно значениями  $u_0$ ,  $\Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda_f$  и  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ , а параметры  $t_1$ ,  $t_2$  зависят еще и от времени  $T$  (напомним,  $m_0 = u_0 / \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$ ).

Заметим, что для варианта, когда отсутствуют участки, на которых  $|\mathbf{M}| = \text{const}$ , управление

$$\mathbf{M} = 6F(1 - 2t/T)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda/T^2$$

остается оптимальным по критерию (1.6) для любой произвольной формы ограничения момента сил  $\mathbf{M}$ , если время разворота  $T$  удовлетворяет условию  $T^2 > 6F/M_0$ , где  $M_0 > 0$  – фиксированная величина, для которой  $R_0 > M_0$ , а значение  $R_0$  численно равно минимальному расстоянию от центра связанной системы координат до внешней границы области допустимых управлений  $U$ . В этом случае будет  $|\mathbf{M}(t)| < M_0$  для любого времени  $t \in [0, T]$ .

В частном случае, когда значения  $m_0$  и  $F$ , рассчитанные исходя из заданных условий разворота  $u_0$ ,  $\Lambda_{\text{in}}$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ , удовлетворяют неравенству  $m_0 T^2 \geq 6F$ , управляющая функция  $\mathbf{M}(t)$  может быть уточнена в каждый текущий момент времени  $t$  по фактическим параметрам движения, используя информацию об угловом положении КА и измерения его угловой скорости. В ходе построения оптимальной программы управления было показано, что если  $t < T/2$ , то  $\mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{L}(t) \geq 0$ , скорость вращения увеличивается, КА ускоряется. Если  $t > T/2$ , то  $\mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{L}(t) \leq 0$ , вращение КА замедляется, угловая скорость  $\omega$  уменьшается до нуля (в момент времени  $t = T/2$  момент  $\mathbf{M}$  равен нулю). На участке разгона направление вектора  $\mathbf{M}$  определяется вектором  $\mathbf{L}_{\text{giv}}$  (в идеале векторы  $\mathbf{L}_{\text{giv}}$  и  $\mathbf{L}$  должны иметь одинаковое направление), где  $\mathbf{L}_{\text{giv}} = 3F\mathbf{p}/2T$  (так как  $m(0) = 6F/T^2$ , а максимальная величина кинетического момента равна  $L_{\max} = m(0)T/4$ ).

Синтезирующую функцию запишем на основе уравнения  $\mathbf{L}_{\text{giv}} = m(0)T\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda/4$ . Терминальное управление определяется законом  $\mathbf{M} = m(t)(\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L}|$ . В результате синтезирующая функция  $\mathbf{M}(\omega, \Lambda)$  (для участка разгона), как зависимость управляющей функции  $\mathbf{M}(t)$  от фазовых переменных  $\omega$  и  $\Lambda$ , выглядит так

$\mathbf{M} = 6F(1 - 2t/T)(\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L}|T^2$ , где  $\mathbf{L}_{\text{giv}}$  вычисляется по правилу  $\mathbf{L}_{\text{giv}} = 3F\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda/2T$ . В момент выполнения равенства  $t = T/2$  момент  $\mathbf{M}$  меняет знак и синтезирующая функция (для участка торможения) будет другой. На этапе гашения кинетического момента она равна  $\mathbf{M} = 6F(1 - 2t/T)\mathbf{L}/|\mathbf{L}|T^2$ . В итоге синтезирующая функция  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\omega}, \Lambda)$  для оптимального управления может быть следующей:

$$M = \begin{cases} 6F(1 - 2t/T)(\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L}|T^2, & t < T/2 \\ 6F(1 - 2t/T)\mathbf{L}/|\mathbf{L}|T^2, & t \geq T/2 \end{cases}$$

Используя обозначения (2.19) и  $s(t)$ , напомним, что в момент изменения направления оптимального момента сил  $\mathbf{M}$  (смены знака формирующей функции  $m(t)$ ) пройденный “путь”  $s$  (за время  $t$ ) равен половине всего “пути”  $F$ , т.е.  $s(T/2) = F/2$ . Это свойство оптимального движения  $\boldsymbol{\omega}(t)$  дает возможность сформировать критерий, позволяющий разделить весь разворот на две части – этапы разгона (когда  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} > 0$ ) и торможения (когда  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} < 0$ ). При оптимальном управлении момент сил  $\mathbf{M}$  меняет свое направление на обратное (функция  $m(t)$  меняет знак) в момент времени  $t$ , при котором выполняется равенство  $s(t) = F/2$ , где  $F$  – известная величина (она рассчитывается по заданным значениям  $J_1, J_2, J_3$  и параметрам разворота  $\Lambda_{\text{in}}$ ). Скалярное произведение векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  и разность  $F/2 - s(t)$  должны быть одного знака (при оптимальном движении). Поэтому закон управления правомерно записать и в такой форме:

$$M = \begin{cases} +6F|1 - 2t/T|(\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L}|T^2, & s(t) < F/2 \\ -6F|1 - 2t/T|\mathbf{L}/|\mathbf{L}|T^2, & s(t) \geq F/2 \end{cases}$$

где  $F$  – постоянный параметр;  $\mathbf{L}_{\text{giv}} = 3F\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda/2T$ ;  $s(t) = \int_0^t |J_{\text{SC}}\boldsymbol{\omega}(t)| dt$ ;  $\mathbf{L} = J_{\text{SC}}\boldsymbol{\omega}$  – кинетический момент КА;  $J_{\text{SC}} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$  – тензор инерции КА.

В момент выполнения равенства  $s(t) = K_{ct_{\text{pr}}}/2$  момент  $\mathbf{M}$  меняет направление на обратное, а в момент времени, когда  $s(t) = K_{ct_{\text{pr}}}$ , угловая скорость равна нулю  $\boldsymbol{\omega} = 0$  (так как к этому времени  $\Lambda(t) = \Lambda_f$  согласно свойству (2.18));  $\text{sign } m(t) = \text{sign}(F/2 - s(t))$ . Синтезирующую функцию  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\omega}, \Lambda)$ , как зависимость момента  $\mathbf{M}$  от фазовых координат  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\Lambda$ , представим в виде:

$$\mathbf{M} = |m(t)|(\mathbf{L}_{\text{tr}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{tr}} - \mathbf{L}|$$

где  $\mathbf{L}_{\text{tr}} = 3(1 + \text{sign}m(t))F\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda/4T$  (понятно, что на этапе гашения кинетического момента наведение происходит в точку  $\mathbf{L} = 0$ ; и поэтому  $\mathbf{L}_{\text{tr}} = 0$ , когда  $m(t) < 0$ ).

Зависимость  $6F(1 - 2t/T)/T^2$  задает программное изменение управляющей функции  $\mathbf{M}(t)$ . Улучшить точность переориентации можно за счет вычисления значения  $m(t)$  в каждый текущий момент времени  $t$  на основании фактических (измеренных в процессе разворота) параметров движения  $\boldsymbol{\omega}_i(t)$  и  $\Lambda(t)$ . Определим закон управления  $\mathbf{M}(t)$  опираясь на имеющиеся параметры движения  $\boldsymbol{\omega}_i(t)$  и  $\Lambda(t)$  и оставшийся “путь”  $s_{\text{rem}}$ , который соответствует завершению разворота от текущего  $\Lambda(t)$  до заданного конечного  $\Lambda_f$  положения. Остаточное значение  $s_{\text{rem}}$  может быть рассчитано по формуле

$$s_{\text{rem}} = F - \int_0^t |J_{\text{SC}}\boldsymbol{\omega}(t)| dt$$

где  $F$  известно (оно равно  $F = K_{ct}$ ). Определим условия смены направления момента  $\mathbf{M}$ . Вычислим пройденный “путь”  $s(t)$  при условии линейного изменения скалярной функции  $m(t)$

$$s(t) = \int_0^t |J_{SC} \boldsymbol{\omega}(t)| dt = m(0) \int_0^t t(1 - t/T) dt = m(0)(t^2/2 - t^3/3T)$$

В момент окончания разворота должно быть  $s(T) = F = m(0)T^2/6$ . В момент времени  $t = T/2$  будет  $s(T/2) = m(0)T^2/12$  (это априорное значение). Функцию  $m(t)$  формируем исходя из того, что  $\dot{m} = \text{const}$  на оставшейся части разворота  $[t, T]$ . Необходимым условием является требование  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  и, соответственно, безусловное выполнение равенства

$$|J_{SC} \boldsymbol{\omega}(t)| + \int_t^T m(t) dt = 0$$

Еще одним условием будет равенство

$$s(t) + \int_t^T |J_{SC} \boldsymbol{\omega}(t)| dt = F$$

Составим систему уравнений, определяющих значение  $m(t)$  в текущий момент времени  $t$ . Из первого условия имеем  $|\mathbf{L}| + (T - t)m + (T - t)^2 \dot{m}/2 = 0$ . Из второго условия находим  $|\mathbf{L}|(T - t) + (T - t)^2 m/2 + (T - t)^3 \dot{m}/6 = F - s(t) = s_{\text{rem}}$ . Два уравнения и две неизвестных. Получили линейную систему уравнений относительно  $m$  и  $\dot{m}$ . Ее решением будет

$$m(t) = 6 \left( F - \int_0^t |J_{SC} \boldsymbol{\omega}(t)| dt \right) / (T - t)^2 - 4 |J_{SC} \boldsymbol{\omega}(t)| / (T - t) \quad (3.3)$$

при этом  $\dot{m} = 6|\mathbf{L}(t)|/(T - t)^2 - 12s_{\text{rem}}(t)/(T - t)^3$  (при оптимальном торможении  $\dot{m} < 0$ ). Здесь  $T - t = t_{\text{rem}}$  – оставшееся время управления (интервал времени, в течение которого требуется завершить маневр переориентации). Момент сил  $\mathbf{M}$  меняет знак, когда  $3s_{\text{rem}}(t) = 2|\mathbf{L}(t)|(T - t)$ . Время  $t_0$  наступления смены направления управляющего момента  $\mathbf{M}$  определяется как  $t_0 = T - 1.5s_{\text{rem}}(t_0)/|\mathbf{L}(t_0)|$ . Величина  $m(t) = \text{const}$  до конца маневра, если  $2s_{\text{rem}}(t) = |\mathbf{L}(t)|(T - t)$ .

Так как  $\mathbf{p}^* = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda$  – оптимальное значение орта требуемого кинетического момента для процесса наведения (оно понимается как “прицелочное” направление, к которому надо стремиться), окончательный вид закона управления можно принять следующим:

$$\mathbf{M} = \begin{cases} m(t)(\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L}|, & m(t) > 0 \ \& \ |\mathbf{L}| < |\mathbf{L}_{\text{giv}}| \\ m(t)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda, & m(t) > 0 \ \& \ |\mathbf{L}| \geq |\mathbf{L}_{\text{giv}}| \\ m(t)\mathbf{L}/|\mathbf{L}|, & m(t) \leq 0 \ \parallel \ |\mathbf{L}_{\text{giv}} - \mathbf{L}| = 0 \end{cases}$$

Здесь значение  $m(t)$  вычисляется в соответствии с правилом (3.3).

Такое уточнение функции  $m(t)$ , задающей модуль управляющего момента  $\mathbf{M}$ , существенно улучшает точность переориентации и повышает надежность выполнения терминальных условий разворота  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ ,  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  (направление управляющего момента  $\mathbf{M}$  по-прежнему определяется кватернионом ориентации  $\Lambda$  связанной системы координат или вектором  $\mathbf{p}(t)$ ). Алгоритм формирования функции  $m(t)$  с неизбежностью включает длительность  $t_{\text{rem}}$ , потому что именно от нее зависит насколько быстро

необходимо увеличивать (или уменьшать) модуль кинетического момента. На заключительной стадии разворота за время  $t_{\text{rem}}$  необходимо полностью (до нуля) погасить кинетический момент.

Формулу (3.3) можно интерпретировать как суперпозицию двух моментов  $m(\mathbf{L})$  и  $m(s_{\text{rem}})$ , рассчитанных независимо для двух требований – необходимости полностью погасить кинетический момент к моменту времени  $T$  (чтобы  $\mathbf{L}(T) = 0$ ) и обеспечению терминального условия  $s(T) = F$  (или  $s_{\text{rem}}(T) = 0$ ). Значения  $m(\mathbf{L})$  и  $m(s_{\text{rem}})$  соответственно равны:  $m(\mathbf{L}) = |J_{\text{SC}}\boldsymbol{\omega}(t)|/(t - T)$ ;  $m(s_{\text{rem}}) = 2(s(t) - F)/(T - t)^2$  (на участке торможения  $m(t) < 0$ ). Тогда функция (3.3) есть линейная комбинация функций  $m(s_{\text{rem}})$  и  $m(\mathbf{L})$  с весовыми коэффициентами  $-3$  и  $4$ , соответственно. Понятно, что если  $|m(s_{\text{rem}})| > |m(\mathbf{L})|$ , то надо торможение делать более неспешным; если  $|m(\mathbf{L})| > |m(s_{\text{rem}})|$ , то торможение надо делать более быстрым с тем, чтобы успеть затормозить и полностью погасить угловую скорость КА к моменту, когда  $s(t) = F$ ; если  $|m(s_{\text{rem}})| = |m(\mathbf{L})|$ , то  $m(t) = m(\mathbf{L}) = m(s_{\text{rem}})$ , а  $\dot{m} = 0$ . Поэтому  $m(t) = 4m(\mathbf{L}) - 3m(s_{\text{rem}})$ . Использование закона (3.3) при формировании управляющей функции  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\omega}, \Lambda)$  позволяет улучшить показатели качества (и точностные характеристики) алгоритма управления ориентацией.

Для динамически симметричного КА значения  $\mathbf{p}_0$ ,  $m_0$  вычисляются значительно проще (расчет характеристики  $F$  и функционала  $G$  также упрощается). В этом частном случае  $|\mathbf{L}| = J_2\dot{\beta}$  и  $F = J_2\beta$ , где  $J_2$  – момент инерции относительно поперечной оси ( $J_2 = J_3$ );  $\dot{\beta}$  – скорость вращения вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$ ;  $\beta$  – угол поворота КА вокруг вектора  $\mathbf{L}$  (из физического смысла  $\beta \geq 0$ ). Чтобы значение оптимизируемого функционала (1.6) было минимальным необходимо выполнить условие  $\beta \leq \pi$  (именно поэтому система (3.2) включает неравенство  $0 \leq \beta \leq \pi$ ). В случае динамической симметрии КА (когда  $J_2 = J_3$ , а  $OX$  – ось симметрии) величина  $s_{\text{rem}}$  вычисляется достаточно точно. Здесь уровень  $s_{\text{rem}}(t)$  определяется без привлечения операции интегрирования модуля кинетического момента и вычисления пройденного “пути”  $s(t)$ , а непосредственно по информации о текущем положении КА  $\Lambda(t)$  путем сравнения его с требуемым положением  $\Lambda_f$ . Выпишем необходимые соотношения:

$$s_{\text{rem}} = \int_t^T |\mathbf{L}(t)| dt = J_2\theta$$

где  $\theta$  – оставшийся угол поворота КА вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ). Значение  $\theta$  находится из кинематических соотношений для прецессии твердого тела вокруг неподвижной оси (в нашем случае неподвижная ось – кинетический момент КА). Очевидно

$$\sin \vartheta = \sqrt{J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2}/|\mathbf{L}|, \quad \sin \frac{\theta}{2} \sin \vartheta = \sqrt{g_2^2 + g_3^2}$$

где  $\vartheta$  – угол между кинетическим моментом  $\mathbf{L}$  и продольной осью КА;  $g_0, g_1, g_2, g_3$  – компоненты кватерниона рассогласования  $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_f$ . Поэтому

$$s_{\text{rem}}(t) = 2J_2 \arcsin(|J_{\text{SC}}\boldsymbol{\omega}(t)|\sqrt{g_2^2 + g_3^2}/\sqrt{J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2})$$

Таким образом, решение задачи оптимального управления (1.1)–(1.6) завершено. Свойства оптимального движения определены; получены основные соотношения и расчетные выражения, необходимые для построения программного движения. Закон управления разворотом сформулирован в форме синтезирующей функции; при этом применяется терминальное управление кинетическим моментом. Задача оптимального разворота решается до конца.

**4. Результаты математического моделирования.** Приведем численный пример решения задачи оптимального управления программным разворотом КА с минимальным значением интеграла (1.6). Рассмотрим разворот на  $180^\circ$  из начального положения  $\Lambda_{\text{in}}$ , при котором оси КА совмещены (совпадают по направлению) с осями опорного базиса  $\mathbf{I}$ , в заданное конечное положение  $\Lambda_f = \Lambda_{\text{giv}}$  с минимальным значением интеграла (1.6). При этом считалось, что начальные и конечные угловые скорости нулевые  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ . Пусть длительность разворота  $T = 200$  с. Значения элементов кватерниона  $\Lambda_{\text{giv}}$ , характеризующего требуемое угловое положение КА, были равны:  $\lambda_0 = 0$ ;  $\lambda_1 = 0.7$ ;  $\lambda_2 = 0.395$ ;  $\lambda_3 = 0.595$ . Определим оптимальную программу управления скоростью вращения  $\boldsymbol{\omega}(t)$  для перевода КА из состояния  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$  в состояние  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ ,  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ . Будем полагать, что инерционные характеристики КА имеют значения:  $J_1 = 118952.3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_2 = 350467.1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_3 = 269497.1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Мощность исполнительных органов характеризуется величиной  $u_0 = 0.1436 \text{ Н}/\sqrt{\text{кг}}$ .

Нахождение расчетного значения вектора  $\mathbf{p}_0$  начинаем с решения той же краевой задачи для динамически симметричного КА с моментами инерции  $J_1$  и  $J$ , где  $J$  – момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему значению между  $J_2$  и  $J_3$  (принцип осреднения используют многие исследователи [28]). Например, примем такое значение

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} (\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1)$$

В предположении динамической симметричности КА решение  $\mathbf{p}_0$  определяется системой (3.2). Полученные из уравнений (3.2) значения  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$  являются начальным приближением к истинному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять системе уравнений (1.2), (1.1), в которых момент сил отсутствует ( $\mathbf{M} = 0$ ), с учетом накладываемых на движение КА ограничений  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda(t_{\text{pr}}) = \Lambda_f$ , а начальные угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}_{\text{ist}}$  определяются вектором  $\mathbf{p}_0$  и углом  $\beta$  по выражениям:

$$\boldsymbol{\omega}_{1\text{st}} = \frac{J\beta}{J_1 T} p_{10}, \quad \boldsymbol{\omega}_{2\text{st}} = \frac{J\beta}{J_2 T} p_{20}, \quad \boldsymbol{\omega}_{3\text{st}} = \frac{J\beta}{J_3 T} p_{30} \quad (4.1)$$

где  $T$  – время разворота. Прогнозирование “свободного” движения осуществляется интегрированием системы уравнений (1.1)–(1.2), описывающих вращение КА, при начальных условиях  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_{\text{st}}$  и с учетом того, что  $\mathbf{M} = 0$ . Степень приближения найденных  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$  к искомому решению характеризуется мерой  $\varepsilon = \text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{\text{pr}} \circ \Lambda_f)$ , где  $\Lambda_{\text{pr}}$  – наиболее близкое к  $\Lambda_f$  положение, полученное в ходе моделирования движения КА около центра масс (согласно уравнений (1.2), (1.1), в которых  $M_i = 0$ ). Вектор  $\mathbf{p}_0$  уточняется до тех пор, пока  $\varepsilon < \varepsilon_{\text{th}}$  ( $\varepsilon_{\text{th}}$  – некоторое близкое к 1 пороговое значение, отражающее точность найденного решения). Как только условие  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{th}}$  достигнуто (прогнозируемая ошибка соответствует требуемой точности), истинные значения  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$ , удовлетворяющие граничным условиям  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda(t_{\text{pr}}) = \Lambda_f$ , будут найдены, и краевая задача решена. Вектор  $\mathbf{p}_0$  уточняется с использованием следующего рекуррентного соотношения

$$\Lambda_{\text{tn}}^{(k+1)} = \Lambda_{\text{tn}}^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{\text{pr}}$$

где  $\Lambda_{\text{tn}}^{(k)}$  – значение кватерниона разворота на  $k$ -й итерации, используемое в системе (3.2). На каждом  $k$ -м шаге итераций обновляются элементы кватерниона разворота  $\Lambda_{\text{tn}}^{(k)}$  (правые части системы (3.2)), и из уравнений (3.2) мы получаем  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$ , а также

соответствующую начальную угловую скорость  $\omega_{st}$  (согласно (4.1)) и прогноз  $\Lambda_{pr}$ . “Свободное” движение прогнозируется интегрированием системы уравнений (1.1), (1.2), описывающей вращение КА с начальными условиями  $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ ,  $\omega(0) = \omega_{st}$  и с учетом того, что  $\mathbf{M} = 0$ . Если  $\varepsilon < \varepsilon_{th}$ , то вычисляется новый кватернион разворота  $\Lambda_{in}^{(k+1)}$  для следующего  $(k + 1)$ -го шага итераций, и процесс уточнения вектора  $\mathbf{p}_0$  повторяется. За начальное приближение в правых частях системы (3.2) берутся элементы кватерниона  $\Lambda_{in}^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$ . Итерационный процесс прекращается, когда  $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ .

Принятая схема итераций аналогична итерационному методу решения уравнения вида  $x = g(x)$  для скалярной функции  $g(x)$  скалярного (одномерного) аргумента  $x$ . В нашем случае аргумент – гиперкомплексное число (кватернион)  $\Lambda_{in}$ . Функцией является кватернионная величина  $\Lambda_{in} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ , где  $\Lambda_f$  – постоянный кватернион (он не зависит от аргумента  $\Lambda_{in}$ );  $\Lambda_{pr}$  зависит от аргумента  $\Lambda_{in}$  через систему уравнений (3.2), (4.1) посредством модели движения (1.1), (1.2) (в уравнениях (1.1) принимается  $M_i = 0$ ). Изменяя  $\Lambda_{in}$ , изменяются вектор  $\mathbf{p}_0$  (в соответствии с (3.2)) и угловые скорости  $\omega_{ist}$ , а значит изменится и значение  $\Lambda_{pr}$ , что вызовет изменение функции  $\Lambda_{in} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ . Как только  $\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f) \geq \varepsilon_{th}$ , итерационный процесс прекращается, а решение  $\mathbf{p}_0$  считается найденным. Так как  $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}^{(k)})| < |\text{vect}\Lambda_{in}^{(k)}|$  для всех  $k$ , то итерационный процесс приближения  $\mathbf{p}_0$  к искомому решению сходится. Аналогичный метод определения значения  $\mathbf{p}_0$  в решении краевой задачи принципа максимума использовался в задаче оптимального по быстродействию управления [5]. Заметим, что это лишь один из возможных (но далеко не единственный) итерационных алгоритмов поиска оптимального вектора  $\mathbf{p}_0$ .

В результате решения краевой задачи разворота из положения  $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$  в положение  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  получили расчетное значение вектора  $\mathbf{p}_0 = \{0.504262; -0.167348; 0.847180\}$ ; интеграл  $F = 606.5 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ . В соответствии с этими данными максимально допустимая величина управляющего момента равна  $m_0 = 65 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Длительность разворота (соотношение параметров  $F$ ,  $m_0$  и  $T$ ) удовлетворяет неравенству  $4F < m_0 T^2 < 6F$ . Поэтому оптимальным является управление с двумя точками переключения, включающее два участка, на которых  $|\mathbf{M}| = \text{const}$ . Реализуется управление с тремя участками изменения момента  $\mathbf{M}$  – интенсивный разгон (когда  $m(t) = \text{const} = m_0$ ), участок с параболическим изменением модуля кинетического момента ( $m(t)$  – линейная функция времени, уменьшающаяся с  $m(t) = m_0$  до  $m(t) = -m_0$ ) и интенсивное торможение (когда  $m(t) = \text{const} = -m_0$ ). Точками переключения являются  $t_1 = 55 \text{ с}$  и  $t_2 = 145 \text{ с}$ .

Результаты математического моделирования динамики оптимального разворота представлены рис. 2–5. На рис. 2 изображены графики изменения угловых скоростей в связанной с КА системе координат  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_3(t)$  по времени (переменные  $\omega_i$  даны в град./с). Рисунок 3 отражает характер изменения компонент кватерниона  $\Lambda(t)$ , определяющего текущую ориентацию КА в процессе совершаемого поворотного маневра:  $\lambda_0(t)$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $\lambda_3(t)$ . На рис. 4 приведена динамика изменения составляющих  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$  вектора  $\mathbf{p}$  во времени (значения  $p_i$ , как и  $\lambda_j$ , – безразмерные величины). Характерным является незначительное изменение проекции  $p_1$ . Значение интеграла (1.6), отражающего экономичность программы  $\mathbf{M}(t)$  управления разворотом, составило  $G = 2.901 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{с}$ . Рисунок 5 демонстрирует поведение модуля кинетического момента КА во время разворота, при этом  $L_{\text{max}} = 5041 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ . Отмечаем, что угловая скорость  $\omega_1$ , соответствующая оси  $OX$  космического аппарата, – знакопостоянна, а характер ее изменения повторяет поведение модуля кинетического момента (в отли-

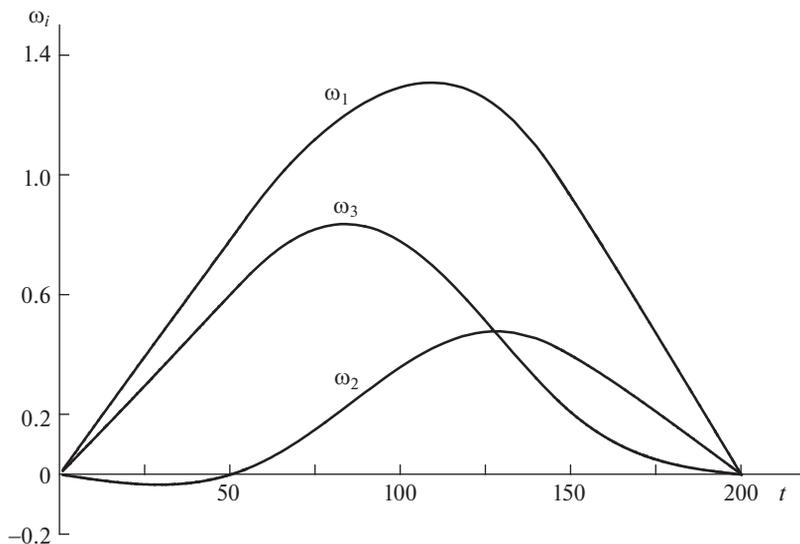


Рис. 2

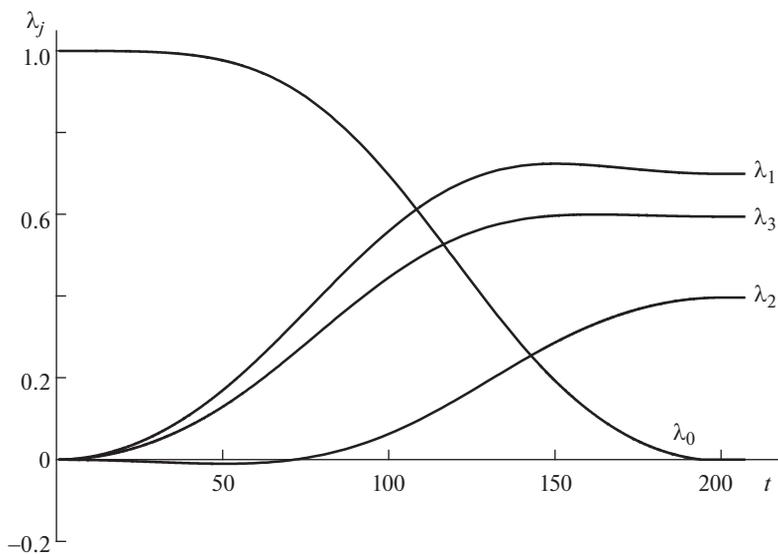


Рис. 3

чие от составляющих угловой скорости  $\omega_2$  и  $\omega_3$ ). Это свидетельствует о том, что ось  $OX$  – продольная ось КА. При оптимальном управлении переменные  $p_i$  и  $\lambda_j$  являются гладкими функциями времени; угловые скорости  $\omega_i$  – гладкие функции времени (за исключением моментов времени  $t = 0$  и  $t = T$ ).

**Заключение.** В статье рассмотрена и решена задача оптимального управления пространственным разворотом твердого тела (в частности, КА) за заданное время. Опти-

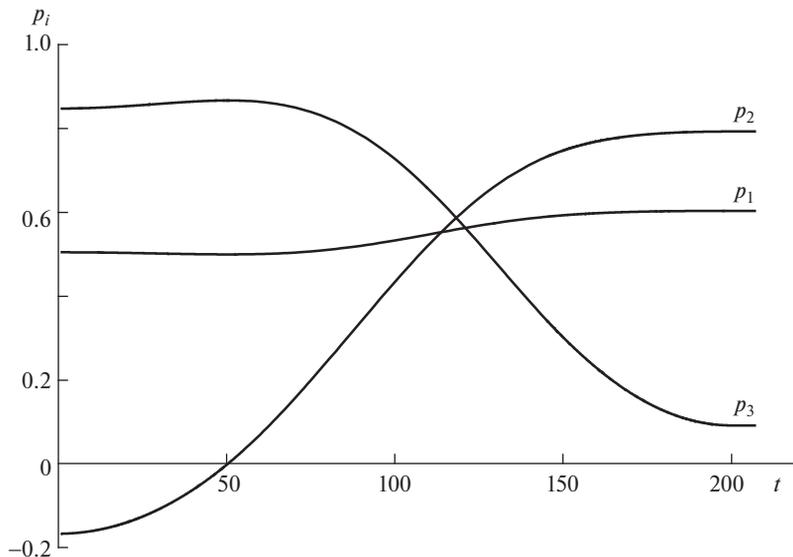


Рис. 4

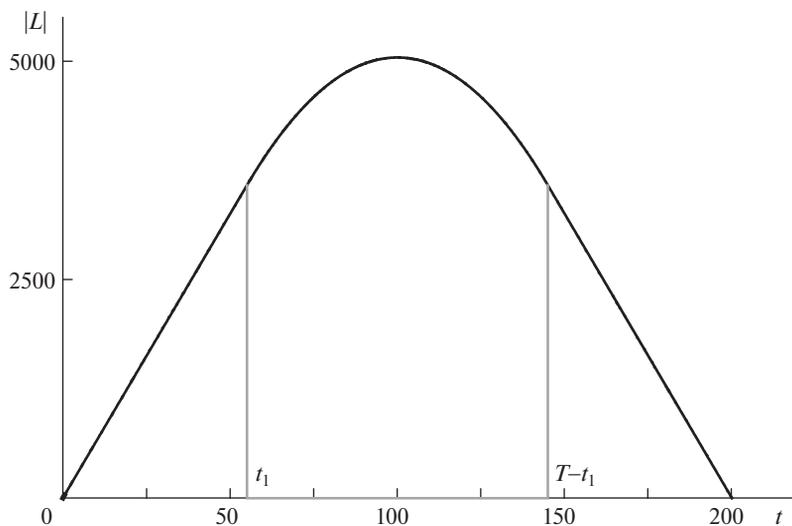


Рис. 5

мизация производится в соответствии с критерием качества, в котором минимизируемый функционал интерпретируется как вклад управляющих сил (по энергетическим затратам) в движение КА к требуемому угловому положению; сформулированная задача управления достаточно актуальна. Для решения поставленной задачи используются условия оптимальности в форме принципа максимума и кватернионы. Определены тип траектории и ключевые свойства оптимального движения: так в процессе всего разворота отношение кинетической энергии вращения к квадрату модуля кине-

тического момента КА есть величина постоянная. Решение (2.16), (2.11) оптимально, потому что оно – единственное; только оно одно (и никакое другое) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Любое отличное от (2.16), (2.11) движение будет заведомо хуже (в смысле минимума интеграла (1.6)), поскольку не является решением системы (2.3), (2.4), (2.7), а значит, не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Показано, что на всем интервале переориентации КА совершает вращение по траектории “свободного движения”. Отличительной особенностью рассмотренного оптимального управления является отсутствие интервалов времени, на которых  $|\mathbf{M}| = \text{const} = 0$ . Момент сил действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. В первой половине разворота направления управляющего момента и кинетического момента КА совпадают, а во второй половине разворота управляющий момент и кинетический момент КА имеют противоположные направления. В зависимости от заданных условий разворота – начального и конечного положений КА, длительности разворота и моментов инерции КА – оптимальным является один из трех вариантов управления: релейное управление, при котором управляющий момент имеет максимально возможную величину на всем интервале управления; вращение при отсутствии интервалов времени с постоянным модулем управляющего момента; управление с двумя точками переключения, при котором вначале и в конце разворота модуль управляющего момента имеет постоянное и максимально возможное значение (участки интенсивного разгона и интенсивного торможения), а между участками интенсивного разгона и интенсивного торможения модуль кинетического момента изменяется по параболическому закону. Описывается процедура реализации оптимального режима управления пространственным разворотом КА.

Задача оптимального управления решена в форме синтеза. Синтез оптимального управления проведен до конца (найден синтезирующая функция). Синтезирующая функция, как зависимость управляющих переменных от фазовых координат, построена с учетом выполнения терминальных условий разворота. Даны выражения для расчета ключевых характеристик маневра переориентации. Определены условия осуществимости разворота для заданного времени  $T$ , исходя из начального и конечного положений и инерционных характеристик КА. Описан алгоритм численного решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота (начального и конечного положений) и моментов инерции КА. Для динамически симметричного КА представлено законченное решение задачи переориентации в замкнутой форме и записана система уравнений (в аналитическом виде), из которой непосредственно находится решение краевой задачи принципа максимума и вычисляются необходимые константы закона управления; при этом оптимальные значения параметров закона управления могут быть определены устройством [29]. Приводятся пример и данные математического моделирования, иллюстрирующие динамику движения КА во время оптимального разворота.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 343 с.
2. Зубов Н.Е. Оптимальное управление терминальной переориентацией КА на основе алгоритма с прогнозирующей моделью // Космич. исслед. 1991. Т. 29. Вып. 3. С. 340–351.
3. Ваньков А.И. Адаптивное робастное управление угловым движением КА с использованием прогнозирующих моделей // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 4–5. С. 13–21.
4. Ермошина О.В., Крищенко А.П. Синтез программных управлений ориентацией КА методом обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 155–162.
5. Левский М.В. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.

6. *Liu S., Singh T.* Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers // *Journal of Guidance*. 1996. V. 20. № 2. P. 394–397.
7. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of time-optimal attitude maneuvers // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
8. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
9. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // *Космич. исслед.*, 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
10. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
11. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2007. № 2. С. 152–165.
12. *Li F., Vainum P.M.* Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1990. V. 13. № 1. P. 38–45.
13. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.
14. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с.
15. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. 1986. 515 p.
16. *Byers R., Vadali S.* Quasi-closed-form solution to the time-optimal rigid spacecraft reorientation problem // *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1993. V. 16. № 3. P. 453–461.
17. *Levskii M.V.* Control of spacecraft spatial turn with minimal value of the way functional // *Actual problems of aviation and aerospace systems*. 2009. V. 14. № 1. P. 81–94.
18. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // *Изв. РАН. МТТ*. 2009. № 2. С. 7–24.
19. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически симметричного твердого тела // *Изв. РАН. МТТ*. 2012. № 2. С. 16–27.
20. *Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского.* М.: Наука, 1987. 712 с.
21. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
22. *Lastman G.* A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems // *International Journal of control*. 1978. V. 27. № 4. P. 513–524.
23. *Enrico Bertolazzi, Francesco Biral, Mauro Da Lio.* Symbolic-numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. V. 185. Issue 2. 15 January 2006. P. 404–421.
24. *Sanjeev Kumar, Vinay Kanwar, Sukhjit Singh.* Modified efficient families of two and three-step predictor-corrector iterative methods for solving nonlinear equations // *Journal of Applied Mathematics*, 2010. V. 1. № 3. P. 153–158.
25. *Tianmin Han, Yuhuan Han.* Solving large scale nonlinear equations by a new ODE numerical integration method // *Journal of Applied Mathematics*. 2010. V. 1. № 3. P. 222–229.
26. *Левский М.В.* Способ управления разворотом космического аппарата и система для его реализации. Патент на изобретение РФ № 2114771 // *Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”*. 1998. № 19. Опубликовано 10.07.1998. С. 234–236.
27. *Левский М.В.* Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // *Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”*. 1994. № 2. Опубликовано 20.01.1994. С. 49–50.
28. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
29. *Левский М.В.* Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // *Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”*. 2000. № 8. Опубликовано 20.03.2000. С. 148.