

УДК 531

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВАН-ДЕР-ПОЛЯ.
ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

© 2020 г. В. Ф. Журавлёв

*Институт проблем механики, РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия
e-mail: Zhurav@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 26.12.2017 г.
После доработки 26.12.2017 г.
Принята к публикации 15.01.2018 г.

Уравнения Ван-дер-Поля, описывающие автоколебания в квазилинейном одномерном осцилляторе, обобщаются на случай, когда порождающий изотропный осциллятор имеет произвольное число степеней свободы. Конкретно рассмотрены двумерный (плоский) и трехмерный (пространственный) случаи. В отличие от классической задачи, в которой стабилизировалась заданная амплитуда колебаний, в общем случае можно стабилизировать не только энергию колебаний, но и площадь плоской эллиптической траектории, ее ориентацию в пространстве, частоту колебательного процесса и пр.

Указаны технические приложения соответствующих моделей.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, бесплатформенная инерциальная навигационная система

DOI: 10.31857/S0572329920010249

1. Одномерный осциллятор Ван-дер-Поля. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля в форме, приведенной, например, в [1]

$$\ddot{q} + q = \mu(1 - q^2)\dot{q} \quad (\mu > 0) \quad (1.1)$$

здесь μ – малый параметр, что позволяет решать это уравнение, как это часто и делают, методом осреднения.

Для целей дальнейшего изложения нам удобно интерпретировать уравнение (1.1), как уравнение линейного пружинного осциллятора в одномерном пространстве (рис. 1) с наложенной на него обратной связью формализованной нелинейной правой частью уравнения (1.1). В [1] приведено и решение этого уравнения, в частности, показано, что уравнение имеет два стационарных решения: неустойчивое $q = 0$, и асимптотически устойчивое

$$q = 2 \cos(t - t_0) \quad (1.2)$$

t_0 – произвольная постоянная.

Единственной причиной введения обратной связи в одномерном случае является стремление обеспечить периодический процесс, несмотря на неизбежное присутствие в реальных системах диссипативных сил.

Отметим, что вид обратной связи

$$\mu(1 - q^2)\dot{q} \quad (1.3)$$



Рис. 1

выбранный Ван-дер-Полем и используемый в различных последующих работах, по нелинейным методам, где это уравнение используется в качестве примера, для технических приложений не является лучшим. Вместо него следовало бы писать

$$\mu(1 - q^2 - \dot{q}^2)\dot{q} \tag{1.4}$$

Действительно, при $\mu = 0$ уравнение (1.1) имеет первый интеграл $q^2 + \dot{q}^2 = \text{const}$ и, следовательно, при $\mu \neq 0$ он меняется медленно в отличие от переменной q^2 , являющейся во всех случаях быстро меняющейся. Это не только упрощает решение, но и улучшает качество управления.

Покажем это. Вместо уравнения (1.1) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -q + \mu(1 - q^2 - p^2)p \end{aligned} \tag{1.5}$$

При $\mu = 0$ решение системы (1.5) есть

$$q = r \cos \varphi, \quad p = -r \sin \varphi, \quad \varphi = t - t_0. \tag{1.6}$$

Используя это решение для перехода к новым переменным $(q, p) \rightarrow (r, \varphi)$, найдем

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu(1 - r^2)r \sin^2 \varphi \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Получили систему с одной медленной переменной – r и одной быстрой – φ . Осреднение по быстрой переменной дает $\dot{r} = \mu(1 - r^2)r/2$, откуда и следуют два стационарных решения $r = 0$ (неустойчивое) и $r = 1$ (асимптотически устойчивое).

Известны многочисленные технические приложения модели одномерного осциллятора (1.1), в частности так может быть описана модель лампового генератора (правда, переменная q в этом случае не является пространственной переменной и играет роль анодного напряжения в электронной лампе).

2. Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля. В таком осцилляторе (рис. 2) также вместо обратной связи типа (1.3) будем пользоваться обратной связью (1.4), которая в двумерном случае приобретает вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 &= \mu(1 - q_1^2 - q_2^2 - \dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2)\dot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 + q_2 &= \mu(1 - q_2^2 - q_1^2 - \dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2)\dot{q}_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Или, в более краткой записи

$$\ddot{q} + q = \mu(1 - q^2 - \dot{q}^2)\dot{q}, \quad q = (q_1, q_2)^T$$

В плоскости (q_1, q_2) свободный осциллятор ($\mu = 0$) описывает эллиптическую траекторию. Также как и в одномерном случае, обратная связь должна фиксировать значение удвоенной полной энергии.

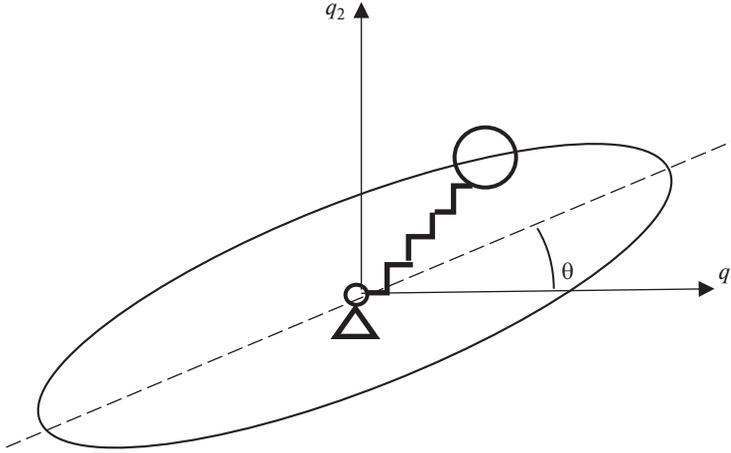


Рис. 2

Задачи управления в системе (2.1) гораздо содержательнее, чем в системе (1.1). Помимо управления амплитудой плоских колебаний можно управлять площадью описываемого эллипса, отношением его полуосей и наклоном большой полуоси к оси q_1 . Для того, чтобы понять, как это сделать, рассмотрим систему (2.1) в более общем виде

$$\ddot{q} + q = Aq + B\dot{q} \quad (2.2)$$

Линейные по координатам и скоростям обратные связи задаются подлежащими определению квадратными матрицами A и B . В наиболее общем виде эти матрицы выглядят так

$$A = C + N + H, \quad B = D + \Gamma + G \quad (2.3)$$

$$C = c \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad N = n \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad H = h \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{vmatrix}$$

$$D = d \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \gamma \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G = g \begin{vmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{vmatrix}$$

где C – симметрическая матрица потенциальных сил сферического типа (скалярная матрица), N – кососимметрическая матрица циркулярных сил, H – симметрическая матрица потенциальных сил гиперболического типа, D – симметрическая матрица диссипативных сил сферического типа, Γ – кососимметрическая матрица гироскопических сил, G – симметрическая матрица диссипативных сил гиперболического типа. Матрицы H и G имеют след, равный нулю (девиаторы), силы, определяемые этими матрицами, для целей управления траекторией осциллятора не используются.

От уравнений (2.2) перейдем к уравнениям в фазовых переменных, используя в качестве замены переменных общее решение однородной части системы в (2.2)

$$(q, \dot{q}) \rightarrow x : \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos t + x_3 \sin t \\ x_2 \cos t + x_4 \sin t \\ -x_1 \sin t + x_3 \cos t \\ -x_2 \sin t + x_4 \cos t \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Таблица 1

| | C | N | D | Γ |
|----------------------|--------|--------|-------|------------|
| прецессия (e_1) | 0 | 0 | 0 | $\gamma/2$ |
| амплитуда (e_2) | 0 | 0 | $d/2$ | 0 |
| квадратура (e_3) | 0 | $-n/2$ | 0 | 0 |
| частота (e_4) | $-c/2$ | 0 | 0 | 0 |

Полагая правые части системы малыми, и применяя осреднение по времени, найдем

$$\dot{x} = X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-Q_1 \sin t, -Q_2 \sin t, Q_1 \cos t, Q_2 \cos t)^T dt \quad (2.5)$$

Правые части этой системы для перечисленных выше сил в (2.2) таковы

$$\begin{aligned} C : X(x) &= \frac{c}{2}(-x_3, -x_4, x_1, x_2) \\ N : X(x) &= \frac{n}{2}(-x_4, x_3, x_2, -x_1) \\ D : X(x) &= \frac{d}{2}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \Gamma : X(x) &= \frac{\gamma}{2}(x_2, -x_1, x_4, -x_3) \end{aligned} \quad (2.6)$$

В работах [2, 4] для системы (2.2) приведен базис инфинитезимальных эволюций ее фазового состояния в окрестности нулевой квадратуры ($K = q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 = 0$), соответствующей прямолинейным колебаниям в плоскости (q_1, q_2). Компоненты этого базиса позволяют выяснить, какие трансформации претерпевает эллиптическая траектория свободного двумерного осциллятора под воздействием перечисленных сил

$$\begin{aligned} \text{a. Группа вращений: } e_1 &= (x_2, -x_1, x_4, -x_3)^T \\ \text{b. Группа растяжений: } e_2 &= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \\ \text{c. Группа сдвигов: } e_3 &= (x_4, -x_3, -x_2, x_1)^T \\ \text{d. Группа трансляций: } e_4 &= (x_3, x_4, -x_1, -x_2)^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

Базис является, как легко проверить, ортогональным, поэтому, проецируя на него силы (2.6), находим следующую таблицу локальных эволюций.

Из табл. 1 следует, что потенциальные сферические силы (матрица этих сил C) приводит только к изменению частоты колебаний. Циркулярные силы (матрица N) вызывают вариацию квадратуры (разрушение прямолинейной формы колебаний). Амплитуду изменяют скоростные силы сферического типа (матрица D). К прецессии приводят гироскопические силы (матрица Γ).

Указанная таблица позволяет сформировать управление указанными эволюциями. Как следует из таблицы, для управления частотой генерируемых колебаний следует приложить позиционные силы сферического типа

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Если требуется стабилизировать частоту установившихся автоколебаний (в безразмерной форме системы (2.1) эта частота равна единице) следует положить

$$c = \mu_1 \left(1 - \frac{T}{\Pi}\right), \quad T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad (2.9)$$

Через T и Π обозначены отдельно, кинетическая и потенциальная энергии осциллятора.

Для стабилизации равной нулю квадратуры K , опять же следуя таблице, следует приложить циркулярные силы

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \mu_2 \frac{K}{E} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(n = \mu_2 \frac{K}{E}, \quad K = q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2\right) \quad (2.10)$$

Стабилизация полной энергии колебаний (амплитуды) достигается приложением диссипативных сил сферического типа

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \mu_3(1 - E) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}, \quad (d = \mu_3(1 - E)) \quad (2.11)$$

Наконец, управление прецессией осуществляется приложением гироскопических сил

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Коэффициент γ выбирается в зависимости от целей управления. Если необходимо обеспечить заданную прецессию формы колебаний с угловой скоростью ω , то

$$\gamma = \mu_4(\omega - \dot{\theta}) \quad (2.13)$$

θ — есть угол наклона главной полуоси эллипса формы колебаний к оси абсцисс. Этот угол вычислен в [4]:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}{2(x_1 x_2 + x_3 x_4)} \quad (2.14)$$

Двумерные уравнения Ван-дер-Поля (2.2) с учетом стабилизации значения полной энергии и квадратуры, а также с управлением прецессией и частотой, приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{q}_1 + q_1 = d(1/2 - E)\dot{q}_1 - n(K/E)q_2 - \gamma\dot{q}_2 + cq_1 \\ \dot{q}_2 + q_2 = d(1/2 - E)\dot{q}_2 + n(K/E)q_1 + \gamma\dot{q}_1 + cq_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

В уравнениях (2.15) перейдем от переменных (q_1, q_2) переменным (S, K) по формулам

$$\begin{aligned} S &= 2E - 1/2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - 1/2 \\ K &= q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

После осреднения по времени получаем уравнения на два порядка меньше исходных

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -dS(2S + 1) - 4n \frac{K^2}{2S + 1} \\ \dot{K} &= -2K(dS + n) \end{aligned} \quad (2.17)$$

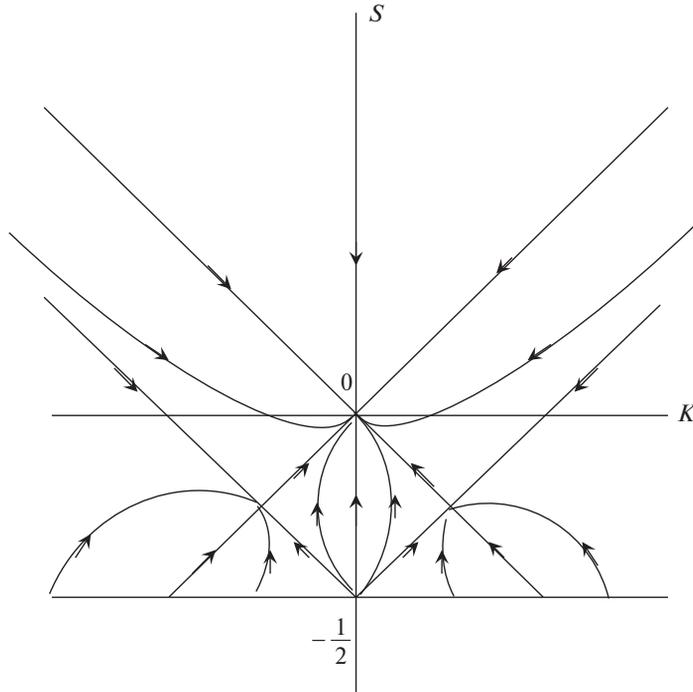


Рис. 3

Фазовый портрет системы (2.17) приведен на рис. 3. Имеются асимптотически устойчивая особая точка ($K = 0, S = 0$), означающая установившееся значение равной нулю квадратуры и равной $1/4$ энергии колебаний.

Изложенная модель двумерного осциллятора Ван-дер-Поля находит техническое применение в качестве модели волнового твердотельного гироскопа [2, 5].

3. Трехмерный осциллятор Ван-дер-Поля (рис. 4). Обобщение уравнения (1.1) на трехмерный случай выглядит так

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + q_1 = \mu(1 - 2E)\dot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 + q_2 = \mu(1 - 2E)\dot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 + q_3 = \mu(1 - 2E)\dot{q}_3 \end{cases}$$

$$2E = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

$$K_1 = q_2\dot{q}_3 - \dot{q}_2q_3, \quad K_2 = q_1\dot{q}_3 - \dot{q}_1q_3, \quad K_3 = q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1q_2$$

Трехмерный изотропный осциллятор обладает тем свойством, что описываемая им эллиптическая траектория, также как и в случае маятника Фуко, неподвижна в инерциальном пространстве (рис. 4). Оси (I_1, I_2, I_3), образованные большой, и малой полуосями эллипса и перпендикуляром к ним не вращаются относительно звезд, как бы ни вращалась система (q_1, q_2, q_3), жестко связанная с подвижным объектом. Это дает возможность использовать трехмерный осциллятор Ван-дер-Поля в качестве бесплат-

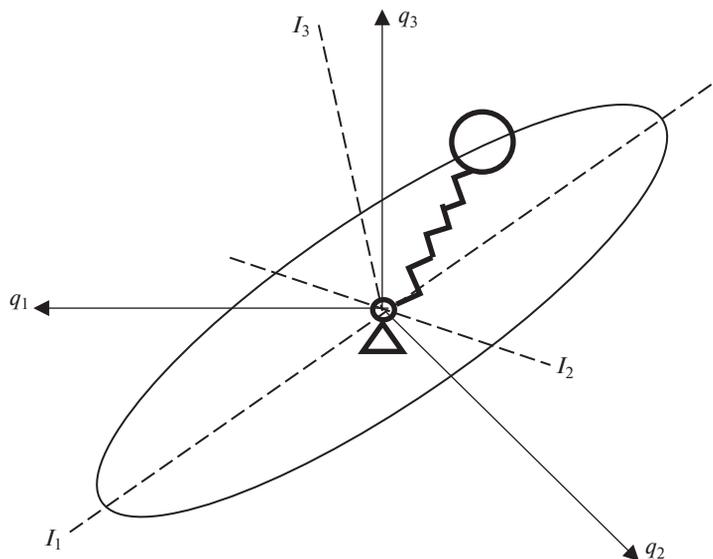


Рис. 4

форменной инерциальной навигационной системы [3]. В такой системе нет необходимости иметь на борту три гироскопа и интегрировать уравнения Пуассона для получения информации об относительной ориентации осей (I_1 , I_2 , I_3) и (q_1 , q_2 , q_3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Обморшев А.Н.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.
2. *Журавлёв В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа. МТТ. № 3. 1993. С. 6–19.
3. *Журавлёв В.Ф.* Решение уравнений линейного осциллятора относительно матрицы инерциального триэдра // Доклады РАН. 2005. Т. 404. № 4. С. 491–495
4. *Журавлёв В.Ф.* Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с внешним управлением // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
5. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2017.