ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 2, с. 59–63

УДК 517.984

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЩИХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

А. М. Ахтямов[a,b,*], **Дж. А. Пардаев**[c,**]

[a] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*
[b] *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*
[c] *Джизакский государственный педагогический институт, Джизак, Узбекистан*
**e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru*
***e-mail: pardayev.jasurhon@mail.ru*

Поступила в редакцию 04.07.2019 г.
После доработки 15.07.2019 г.
Принята к публикации 27.07.2019 г.

Рассматривается прямоугольная пластина закрепленная на двух противоположных краях шарнирно. Показано, что одно из закреплений пластины на двух других краях определяется с точностью до перестановки закреплений на этих краях однозначно по пяти собственным частотам. Показано также, что четырех собственных частот для такого восстановления не достаточно. Приведен соответствующий контрпример. Ранее было показано, что общие краевые условия на двух краях прямоугольной пластины могут быть однозначно определены по 9 собственным частотам. Метод, использованный ранее, основывался на восстановлении матрицы с точностью до линейных преобразований строк. Такая матрица восстанавливается с точностью до линейных преобразований строк по вектору, определяемому с точностью до постоянного множителя и составленному из 10 миноров четвертого порядка такой матрицы. Метод, применяемый в настоящей работе, основан на восстановлении упругих канонических краевых условий, для которых допускается, что коэффициенты жесткости упругих закреплений могут быть равны нулю или бесконечности.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, граничная обратная задача, краевые условия, собственные частоты

DOI: 10.31857/S0572329920010031

1. Введение. Первые систематические исследования по идентификации краевых условий начались в 90-х годах 20 века в работах З.Б. Оганисяна (см., например, [1–3]). З.Б. Оганесяном исследовались несколько задач идентификации условий закрепления распределенных механических систем: задача идентификации краевых условий круговой пластины [1], задача идентификации краевых условий прямоугольной пластины [2], задача идентификации краевых условий на обоих концах стержня [3]. В работах [4–6] изучались аналогичные задачи. В них восстанавливались канонические краевые условия. В [7, 8] изучалась идентификация краевых условий, в которых неизвестны все их коэффиценты. Подобные задачи впервые начали изучаться в этих работах и сводятся к идентификации (с точностью до линейных преобразований строк) матрицы из коэффициентов краевых условий по ее минорам. Настоящая работа посвящена идентификации общих видов закреплений прямоугольной пластины на двух противоположных сторонах. Ранее было показано, что 8 неизвестных коэффициентов упругих закреплений для одного из видов канонических краевых условий восстанавливаются с точностью до перестановки закреплений на противоположных концах однозначно по девяти собственным частотам. В работе [8] было показано, что различные виды и параметры общих закреплений могут быть восстановлены по девяти собственным частотам. В частности, в работе было показано, что краевые условия

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) - \alpha\Phi''(0) = 0, \quad \Phi(a) = 0, \quad \Phi'(a) - \beta\Phi''(a) = 0$$

восстанавливаются по двум собственным частотам.

В настоящей работе рассматривается прямоугольная пластина закрепленная на двух противоположных краях шарнирно. Показано, что общий вид и параметры закреплений пластины на двух других краях восстанавливаются, с точностью до перестановки закреплений на этих краях, однозначно по пяти собственным частотам.

2. Постановка задачи. Если толщина h однородной пластины постоянна (цилиндрическая жесткость $D = \text{const}$), то уравнение свободных колебаний прямоугольной пластины имеет следующий вид (см., например, [9] или [10]):

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Подстановка $w = \varphi(x_1, x_2)\cos(\omega t - \chi)$ приводит к уравнению

$$\Delta\Delta\varphi + \rho h\omega\varphi = 0$$

Если на двух противоположных сторонах пластины реализуются условия свободного опирания

$$\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, b,$$

то формы колебаний описываются следующими функциями:

$$\varphi(x_1, x_2) = \Phi_m(x_1)\sin\frac{m\pi x_2}{b}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

где $\Phi_m(x_1)$ удовлетворяют уравнению

$$\Phi_m^{IV}(x_1) - \frac{2m^2\pi^2}{b}\Phi_m''(x_1) + \left(\frac{m^4\pi^4}{b^4} - \gamma_m\right)\Phi_m(x_1) = 0 \tag{2.1}$$

с общими видами закреплений

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij}L_i\Phi_m(x_1), \quad \text{при } x_1 = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=5}^{8} b_{ij}L_i\Phi_m(x_1), \quad \text{при} \quad x_1 = a$$

где $\gamma_m = \dfrac{\rho h\omega_m^2}{D}$,

$$L_1\Phi_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 [\Phi_m(x_1)]_{x_1=0}, \quad L_2\Phi_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 [\Phi_m'(x_1)]_{x_1=0}$$

$$L_3\Phi_m = \left[\Phi_m''(x_1) - \nu\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\Phi_m(x_1)\right]_{x_1=0}$$

$$L_4\Phi_m = \left[\Phi_m'''(x_1) - (2-\nu)\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\Phi_m'(x_1)\right]_{x_1=0}$$

$$L_5\Phi_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 [\Phi_m(x_1)]_{x_1=a}, \quad L_6\Phi_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 [\Phi_m'(x_1)]_{x_1=a}$$

$$L_7\Phi_m = \left[\Phi''_m(x_1) - \nu\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \Phi_m(x_1)\right]_{x_1=a}$$

$$L_8\Phi_m = \left[\Phi'''_m(x_1) - (2-\nu)\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \Phi'_m(x_1)\right]_{x_1=a}$$

Фундаментальную систему решений уравнения (2.1) при $m = 1$ образуют следующие функции

$$y_1(x) = \cos\left(\sqrt{\sqrt{\gamma_{1k}} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}}\right), \quad y_2(x) = \sin\left(\sqrt{\sqrt{\gamma_{1k}} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}}\right)$$

$$y_3(x) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{\sqrt{\gamma_{1k}} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}}\right), \quad y_4(x) = \operatorname{sh}\left(\sqrt{\sqrt{\gamma_{1k}} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}}\right)$$

Ранее в работе [5] было показано, что различные случаи закрепления прямоугольной пластины (упругие и неупругие) на двух противоположных краях прямоугольной пластины можно однозначно восстановить по девяти собственным значениям. Суть метода состояла в восстановлении матрицы

$$C = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{Vmatrix}$$

с точностью до линейных преобразований строк. Такая матрица восстанавливается с точностью до линейных преобразований строк по вектору, определяемому с точностью до постоянного множителя и составленному из 10 миноров четвертого порядка матрицы C. Поэтому в этом методе для восстановления матрицы требовалось 9 собственных частот.

В настоящей статье предлагается другой метод, основанный на представлении краевых условий в следующем каноническом виде:

$$\begin{gathered} c_1L_1y - L_4y = 0, \quad c_2L_2y - L_3y = 0 \\ c_3L_5y + L_8y = 0, \quad c_4L_6y + L_7y = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

При этом предполагается, что c_j $(j = 1,2,3,4)$ могут обращаться в нуль или бесконечность. Так, $c_j = \infty$ $(j = 1,2,3,4)$ означает, что реализуется закрепление (заделка)–(заделка).

3. Построение решения и примеры. Собственными значениями задачи являются корни характеристических определителей:

$$\Delta(\gamma_1) = \begin{vmatrix} c_1L_1y_1 - L_4y_1 & c_1L_1y_2 - L_4y_2 & c_1L_1y_3 - L_4y_3 & c_1L_1y_4 - L_4y_4 \\ c_2L_2y_1 - L_3y_1 & c_2L_2y_2 - L_3y_2 & c_2L_2y_3 - L_3y_3 & c_2L_2y_4 - L_3y_4 \\ c_3L_5y_1 + L_8y_1 & c_3L_5y_2 + L_8y_2 & c_3L_5y_3 + L_8y_3 & c_3L_5y_4 + L_8y_4 \\ c_4L_6y_1 + L_7y_1 & c_4L_6y_2 + L_7y_2 & c_4L_6y_3 + L_7y_3 & c_4L_6y_4 + L_7y_4 \end{vmatrix}$$

Если расписать подробно этот определитель, получим достаточно громоздкое выражение, которое составляет пять страниц. Оно содержит как слагаемые без множителей c_j $(j = 1,2,3,4)$, так и слагаемые с множителями c_j $(j = 1,2,3,4)$, c_1c_2, c_1c_3, c_1c_4, c_2c_3, c_2c_4, c_3c_4, $c_1c_2c_3$, $c_1c_3c_4$, $c_2c_3c_4$, $c_1c_2c_3c_4$.

К сожалению, решение системы пяти уравнений $\Delta(\gamma_{1m}) = 0$ ($m = 1, 2, 3, 4.5$) методом подстановки приводит к алгебраическому уравнению выше пятой степени. Поэтому эта система уравнений не может быть решена в радикалах (аналитически). Однако она может быть решена численно на конкретных примерах.

Перед демонстрацией примеров покажем, что четырех собственных частот не достаточно для однозначного восстановления закреплений на двух противоположных краях прямоугольной пластины.

Контрпример. Пусть собственными значениями задачи (1)–(2) с $\nu = \frac{1}{3}$, $m = 1$, $a = 1$ и $b = \pi$ являются следующие значения $\gamma_{11} = 47.930$, $\gamma_{12} = 901.12$, $\gamma_{13} = 44329$, $\gamma_{14} = 183458$. Решив систему уравнений $\Delta(\gamma_{1j})$, $j = 1,2,3,4$, получим 24 решения, большинство из которых содержит комплексные и отрицательные числа. Однако есть среди них и решения с положительными числами:

$$\begin{gathered}\{c_1 = 7.3091,\ c_2 = 1.9908,\ c_3 = 0.22964,\ c_4 = 4.0100\}\\ \{c_1 = 0.22965,\ c_2 = 4.0100,\ c_3 = 3.4819,\ c_4 = 1.9911\}\\ \{c_1 = 3.0000,\ c_2 = 4.0000,\ c_3 = 1.0000,\ c_4 = 2.0000\}\\ \{c_1 = 1.0000,\ c_2 = 2.0000,\ c_3 = 3.0000,\ c_4 = 4.0000\}\end{gathered} \tag{3.1}$$

Таким образом, имеется четыре решения, удовлетворяющие физическому смыслу задачи.

Как показывают численные исследования, пяти собственных частот уже достаточно для восстановления вида и параметров закрепления на двух противоположных краях прямоугольной пластины.

Пример 1. Пусть собственными значениями задачи (1)–(2) с $\nu = \frac{1}{3}$, $m = 1$, $a = 1$ и $b = \pi$ являются следующие значения $\gamma_{11} = 47.930$, $\gamma_{12} = 901.12$, $\gamma_{13} = 44329$, $\gamma_{14} = 183458$, $\gamma_{15} = 95860$. Решив систему уравнений $\Delta(\lambda_j)$, $j = 2,3,4,5$, получим еще 24 решения, большинство из которых содержит комплексные и отрицательные числа. Однако есть среди них и решения с положительными числами. Их всего два:

$$\begin{gathered}\{c_1 = 1.0000,\ c_2 = 2.0000,\ c_3 = 3.0000,\ c_4 = 4.0000\}\\ \{c_1 = 3.0000,\ c_2 = 4.0000,\ c_3 = 1.0000,\ c_4 = 2.0000\}\end{gathered} \tag{3.2}$$

Пересечением решений (3.1) и (3.2) является единственное решение (3.2). Оно и является решением, отвечающим физическому смыслу задачи. Упругие закрепления с коэффициентами жесткстей 1, 2, 3, 4 восстанавливаются с точностью до перестановок закреплений на противоположных краях.

Пример 2. Пусть собственными значениями задачи (1)–(2) с $\nu = \frac{1}{3}$, $m = 1$, $a = 1$ и $b = \pi$ являются следующие значения $\gamma_{11} = 18.873\times10^6$, $\gamma_{12} = 538.44$, $\gamma_{13} = 14874$, $\gamma_{14} = 89756$, $\gamma_{15} = 174744$. Решив систему уравнений $\Delta(\lambda_j)$, $j = 1,2,3,4$, получим еще 24 решения, большинство из которых содержит комплексные и небольшие отрицательные числа. Однако есть среди них и такое:

$$\begin{gathered}\{c_1 = -7.6028\times10^{-23},\ c_2 = -6.8337\times10^{-23}\\ c_3 = -4.2899\times10^{25},\ c_4 = 2.9238\times10^{23}\}\\ \{c_1 = -5.5150\times10^{25},\ c_2 = -3.7874\times10^{23}\\ c_3 = -5.8543\times10^{-23},\ c_4 = -5.2671\times10^{-23}\}\end{gathered}$$

Решив систему уравнений $\Delta(\lambda_j)$, $j = 2,3,4,5$, получим еще 24 решения, большинство из которых содержит комплексные и небольшие отрицательные числа. Однако есть среди них и такие:

$$\{c_1 = 2.4623\times10^6,\ c_2 = 0.11968,\ c_3 = 2.5221,\ c_4 = 2736.1\}$$

$$\{c_1 = 2.5221,\ c_2 = 2736.2,\ c_3 = 2.4623\times10^6,\ c_4 = 0.11969\}$$

$$\{c_1 = -3.0620\times10^{-19},\ c_2 = -1.7473\times10^{-20}$$

$$c_3 = -2.4929\times10^{24},\ c_4 = -5.8345\times10^{21}\}$$

$$\{c_1 = -2.3505\times10^{24},\ c_2 = -5.3911\times10^{21},$$

$$c_3 = -3.3482\times10^{-19},\ c_4 = -1.9070\times10^{-20}\}$$

Вычисления проводились с точностью до 30 значащих цифр. Поэтому с большой степенью точности можно считать, что пересечением этих решений являются следующие решения: $c_j = \infty$, $j = 1,2$, $c_j = 0$, $j = 3,4$ и $c_j = 0$, $j = 1,2$, $c_j = \infty$, $j = 3,4$. Следовательно, реализуется закрепление (заделка)–(свободный край) и (свободный край)–(заделка).

4. Заключение. Таким образом, численные исследования, проведенные в статье, показывают, что виды и параметры закреплений на двух противоположных краях прямоугольной пластины определяются однозначно по пяти собственным частотам. Показано также, что четырех собственных частот для однозначной идентификации закреплений на двух противоположных краях прямоугольной пластины не достаточно.

5. Благодарности. Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию на 2019-2022 годы (№ 0246-2019-0088) и при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 18-51-06002-Аз_а, 18-01-00250-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнуни В.Ц., Оганисян З.Б.* Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний // Известия НАН РА, серия “Механика”. 1991. Т. 44. № 5. С. 9–16.
2. *Оганисян З.Б.* Об одной задаче восстановления граничных условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний // Ученые записки ЕГУ. 1991. № 1. С. 45–50.
3. *Оганисян З.Б.* Об одной задаче восстановления граничных условий на концах стержня при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний. “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем” (научные труды конференции). Ереван. 1997. С. 159–162.
4. *Сергиенко И.В.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. НАН Украины, Институт кибернетики им. В.М. Глушкова. Киев: Наукова думка, 2009. 639 с.
5. *Халилов С.А., Минтюк В.Б.* Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе упрощенной модели // Авіційно-космічна техніка и технологія. 2003. Вып. 2. С. 6–10.
6. *Ахтямов А.М., Шагиев В.Р.* Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21. № 1. С. 21–26.
7. *Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V.* Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Probl. Sci. and Eng-ng. 2004. V. 12. № 4. P. 393–408.
8. *Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Тайхер М., Ямилова Л.С.* Об одном методе определения по собственным частотам условий закрепления прямоугольной пластины // Известия РАН. МТТ. 2007. № 1. С. 100–113.
9. *Strutt W. (Lord-Rayleigh)* The theory of Sound. V. 1. L.: Macmillan 1926. = Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 500 с.
10. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.