ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 2, с. 22–27

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ СЖАТИИ-СТОКЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОНКОГО ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

© 2020 г. Р. Р. Шабайкин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: rr.shabaykin@outlook.com

Поступила в редакцию 07.04.2019 г.
После доработки 30.05.2019 г.
Принята к публикации 06.06.2019 г.

В данной работе получено решение аналога задачи Прандтля о сжатии-стоке идеально жесткопластического материала в асимптотически тонком сферическом слое с учетом инерционных эффектов. Рассмотрены различные режимы сдавливания, характеризующие переход от квазистатического процесса к динамическому.

Ключевые слова: идеально жесткопластическое тело, задача Прандтля, сжатие, растекание, асимптотические разложения, осесимметричная задача, число Эйлера, динамика

DOI: 10.31857/S0572329920010213

1. Введение. Ввиду своей применимости в теории обработки металлов давлением, классическая задача Прандтля [1] получила многочисленные обобщения. Например, в [2] обобщено решение Прандтля на случай линейной зависимости максимального касательного напряжения от среднего давления и случай сжатия слоя наклонными шероховатыми плитами, а также плитами, изогнутыми в виде концентрических окружностей. В монографии [3] предложено решение задачи о вдавливании стержня из сжимающейся шероховатой втулки, в статье [4] проанализированы процессы течения пластического материала по упруго деформируемым поверхностям. Решение с учетом многослойности и термодиффузии приведено в работе [5], а случай сжимаемого материала рассмотрен в [6].

Отдельно выделим обобщения, связанные с динамической постановкой. Так в [7] установлена важность учета инерционных сил при моделировании высокоскоростных пластических течений. В работах [8–10] построено аналитическое решение динамической задачи Прандтля. В работе [11] рассмотрена задача о сдавливании идеально-пластического диска шероховатыми плитами при учете инерционных сил. В [12] получено решение плоской динамической задачи теории пластичности при условии степенного упрочнения.

Подробный обзор можно найти в монографиях и учебниках [2, 3, 13].

2. Постановки задачи. Пусть течение происходит в области Ω_t, представляющей собой тонкий слой между абсолютно жесткими концентрическими сферами. Данная область занята несжимаемым идеально жесткопластическим материалом с пределом текучести σ_s.

В сферической системе координат (r,θ,φ) (θ – полярный угол), связанной с центром сфер координаты точек Ω_t описываются неравенствами

$$\Omega_t = \{R(t) < r < R(t) + h(t); 0 \le \theta < \pi; 0 \le \varphi < 2\pi\}, \quad h \ll R \tag{2.1}$$

Внешняя сфера неподвижна, а внутренняя радиально расширяется с постоянной скоростью V, выдавливая материал через сток $\theta = \pi$. Условие непротекания имеет вид:

$$v_r\big|_{r=R} = V, \quad v_r\big|_{r=R+h} = 0 \tag{2.2}$$

Как известно [14], условия на касательную компоненту скорости на указанных в (2.2) границах не задаются.

Система уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности включает два уравнения равновесия, критерий пластичности Мизеса–Генки, два независимых условия соосности девиаторов напряжений и скоростей деформации, а также условие несжимаемости:

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + \frac{1}{r}\left(s_{r\theta,\theta} + 3s_{rr} + s_{r\theta}\mathrm{ctg}\theta\right) = \rho_m\left(v_{r;t} + v_r v_{r,r} + \frac{1}{r}v_\theta v_{r,\theta} - \frac{1}{r}v_\theta^2\right) -$$

$$-\frac{1}{r}p_{,\theta} + s_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\left(s_{\theta\theta,\theta} + 3s_{r\theta} + \left(s_{rr} + 2s_{\theta\theta}\right)\mathrm{ctg}\theta\right) =$$

$$= \rho_m\left(v_{\theta;t} + v_r v_{\theta,r} + \frac{1}{r}v_\theta v_{\theta,\theta} - \frac{1}{r}v_\theta v_r\right)$$

$$s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{rr}s_{\theta\theta} + s_{r\theta}^2 = \sigma_s^2/2 \equiv \tau_s^2$$

$$s_{rr}\left(v_{\theta,\theta} + v_r\right)/r = s_{\theta\theta}v_{r,r}, \quad s_{rr}\left(v_{\theta,r} + \left(v_{r,\theta} - v_\theta\right)/r\right) = 2s_{r\theta}v_{r,r}$$

$$v_{r,r} + \left(2v_r + v_{\theta,\theta} + v_\theta\mathrm{ctg}\theta\right)/r = 0 \tag{2.3}$$

Помимо выполнения кинематических условий (2.2) на границах контакта потребуем достижение касательным напряжением своего максимального вдоль радиального направления значения:

$$\left|s_{r\theta}\right|_{r=R} = \left|s_{r\theta}\right|_{r=R+h} = m(\theta)\tau_s, \quad 0 < m \le 1 \tag{2.4}$$

где m – шероховатость пресса. Обозначим через $\alpha = h/R \ll 1$ малый геометрический параметр и проведем разложение всех входящих в систему (2.3) функций в степенные ряды по α, рассматривая безразмерные коэффициенты рядов как функции безразмерных координат θ, $\rho = (r-R)/h$ и $\tau = V \cdot t/h$.

$$v_\theta(r,\theta,t) = V(\alpha^{-1}v_\theta^{\{-M\}} + \ldots + v_\theta^{\{0\}} + \alpha v_\theta^{\{1\}} + \ldots)$$

$$v_r(r,\theta,t) = V(v_r^{\{0\}} + \alpha v_r^{\{1\}} + \ldots), \quad s_{\beta\gamma}(r,\theta,t) = \tau_s(s_{\beta\gamma}^{\{0\}} + \alpha s_{\beta\gamma}^{\{1\}} + \ldots) \tag{2.5}$$

$$p(r,\theta,t) = \tau_s(\alpha^{-1}p^{\{-N\}} + \ldots + p^{\{0\}} + \alpha p^{\{1\}} + \ldots)$$

Наличие в (2.5) членов с N и M связано со стремлением v_θ и p к бесконечности при $\alpha \to 0$. Система (2.3) с граничными условиями (2.2), (2.4) допускает последовательное асимптотическое интегрирование [10]. Учитывая $v_{x;t} = v_{x,\alpha}\dot{\alpha} + v_{x,\rho}\dot{\rho} + v_{x,\tau}\dot{\tau}$, и принимая во внимание, что производные по времени выражены как эволюционные функции следующим образом:

$$\dot{\alpha} = -\frac{V}{h}\alpha(\alpha+1), \quad \dot{\rho} = -V\frac{1-\rho}{h}, \quad \dot{\tau} = \frac{V}{h}(1+\tau)$$

получаем что в уравнениях движения возникнет величина $\rho_m V^2/\tau_s$ равная обратному числу Эйлера. Как и геометрический параметр она полагается малой, но в отличие от последнего не изменяется в процессе прессования. Это позволяет разбить процесс на стадии с учетом соизмеримости представленных параметров:

$$\mathrm{Eu}^{-1} = O(\alpha^{\beta}) = C_{\beta}\alpha^{\beta}, \quad C_{\beta} = O(1) \tag{2.6}$$

Для показателя β интерес представляет следующий диапазон: $0 < \beta \le 2$. Он включает в себя два целочисленных значения $\beta = \{1; 2\}$, для которых ниже будет производится поиск решения.

Также нетрудно показать, что первые значащие члены разложения по степеням α возникнут при α^{-1}. Таким образом, можно положить $M = N = 1$, а система, соответствующая данной степени, будет иметь вид:

$$p_{,\rho}^{\{-1\}} = 0, \quad v_{\theta,\rho}^{\{-1\}} = 0$$

откуда следует независимость данных функций от радиальной координаты

$$p^{\{-1\}} = \overline{\overline{p}}^{\{-1\}}(\theta, \tau), \quad v_{\theta}^{\{-1\}} = \overline{\overline{v}}_{\theta}^{\{-1\}}(\theta, \tau)$$

3. Случай $\beta = 2$. При данном значении β система, составленная из коэффициентов при α^0, не отличается от квазистатического случая и имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} = 0 \\
-p_{,\theta}^{\{-1\}} + s_{r\theta,\rho}^{\{0\}} = 0 \\
(s_{rr}^{\{0\}})^2 + (s_{\theta\theta}^{\{0\}})^2 + s_{rr}^{\{0\}} s_{\theta\theta}^{\{0\}} + (s_{r\theta}^{\{0\}})^2 = 1 \\
s_{rr}^{\{0\}} v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} = s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \\
s_{rr}^{\{0\}} v_{\theta,\rho}^{\{0\}} - s_{rr}^{\{0\}} v_{\theta}^{\{-1\}} = 2 s_{r\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \\
\mathrm{ctg}\theta\, v_{\theta}^{\{-1\}} + v_{r,\rho}^{\{0\}} + v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} = 0
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Из второго и шестого уравнений системы (3.1) получаем выражение для касательных напряжений и скорости:

$$\begin{gathered}
s_{r\theta}^{\{0\}} = \rho\, p_{,\theta}^{\{-1\}} + \overline{\overline{s}}_{r\theta}^{\{0\}}(\theta, \tau) \\
v_r^{\{0\}} = -\rho(\mathrm{ctg}\theta\, v_{\theta}^{\{-1\}} + v_{\theta,\theta}^{\{-1\}}) + \overline{\overline{v}}_r^{\{0\}}(\theta, \tau)
\end{gathered}$$

Подставив данные выражения в граничные условия (2.2), (2.4), найдем

$$\begin{gathered}
p^{\{-1\}} = \overline{p}^{\{-1\}}(\tau) - 2\int_0^{\theta} k_1 \cdot \mu(\varepsilon)\, d\varepsilon \\
s_{r\theta}^{\{0\}} = k_1(1 - 2\rho)\mu(\theta) \\
v_{\theta}^{\{-1\}} = -\mathrm{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta} = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} \\
v_r^{\{0\}} = 1 - \rho
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $k_1 = \pm 1$. Остальные функции находятся из системы (3.1) с точностью до констант интегрирования:

$$s_{rr}^{\{0\}} = k_2 \frac{\sin^2\theta \sqrt{1 - (1 - 2\rho)^2 \mu^2(\theta)}}{\sqrt{(1 - \cos\theta)(1 - \cos^3\theta)}}$$

$$s_{\theta\theta}^{\{0\}} = -k_2 \frac{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1-(1-2\rho)^2\mu^2(\theta)}}{\sqrt{1-\cos^3\theta}}$$

$$v_\theta^{\{0\}} = \frac{-k_1}{k_2\sin^2\theta\mu(\theta)}\sqrt{(1-\cos\theta)(1-\cos^3\theta)}\sqrt{1-(1-2\rho)^2\mu^2(\theta)} + \rho\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} + \overline{\overline{v}}_\theta^{\{0\}}(\theta,\tau) \quad (3.3)$$

$$p^{\{0\}} = s_{rr}^{\{0\}} + \overline{\overline{p}}^{\{0\}}(\theta,\tau) \quad (3.4)$$

Процессу растекания соответствует $k_2 = -1$, а для правильной выпуклости профиля скорости следует положить $k_1 = 1$.

Чтобы найти неизвестные функции $\overline{\overline{p}}^{\{0\}}$ и $\overline{\overline{v}}_\theta^{\{0\}}$ рассмотрим следующее по α приближение для второго и шестого уравнений системы (2.3) (заведомо нулевые слагаемые опущены):

$$-\rho p_{,\theta}^{\{-1\}} - p_{,\theta}^{\{0\}} + s_{r\theta,\rho}^{\{1\}} + s_{\theta\theta,\theta}^{\{0\}} + 3s_{r\theta}^{\{0\}} + (s_{rr}^{\{0\}} + 2s_{\theta\theta}^{\{0\}})\mathrm{ctg}\theta = C_2(v_\theta^{\{-1\}} + v_\theta^{\{-1\}}v_{\theta,\theta}^{\{-1\}})$$

$$2v_r^{\{0\}} - \rho\,\mathrm{ctg}\theta v_\theta^{\{-1\}} + \mathrm{ctg}\theta v_\theta^{\{0\}} + v_{r,\rho}^{\{1\}} - \rho v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} + v_{\theta,\theta}^{\{0\}} = 0$$

Поскольку явное аналитическое выражение неизвестных функций представляет значительные сложности, исследуем лишь их “отклонение” от решения в квазистатическом случае (верхний индекс ks), которое удовлетворяет однородной системе. Почленно вычитая уравнения, учитывая, что все найденные до этого функции совпадают с квазистатическим случаем, получим что

$$s_{r\theta,\rho}^{\{1\}} - s_{r\theta,\rho}^{\mathrm{ks}\{1\}} = \overline{\overline{p}}_{,\theta}^{\{0\}} - \overline{\overline{p}}_{,\theta}^{\mathrm{ks}\{0\}} + C_2(v_\theta^{\{-1\}} + v_\theta^{\{-1\}}v_{\theta,\theta}^{\{-1\}})$$

откуда с учетом теперь уже нулевых граничных условий получим выражение

$$\begin{aligned}\overline{\overline{p}}^{\{0\}} &= \overline{\overline{p}}^{\mathrm{ks}\{0\}} - \frac{C_2}{2}\int\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\Big/\cos^3\frac{\theta}{2}d\theta = \\ &= \overline{\overline{p}}^{\mathrm{ks}\{0\}} + C_2\left(2\ln\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\right) + \overline{p}^{\{0\}}(\tau)\end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражение для скорости $\overline{\overline{v}}_\theta^{\{0\}}$ совпадет с квазистатическим случаем, с точностью до функции $\overline{v}_\theta^{\{0\}}(\tau)$, возникающие при интегрировании.

4. Случай $\beta = 1$. При таком параметре β система, соответствующая α^0, будет отличаться от (3.1) уравнениями движения, в правой части которых возникнут инерционные слагаемые (заведомо нулевые слагаемые опущены):

$$-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} = C_1(v_\theta^{\{-1\}})^2$$

$$-p_{,\theta}^{\{-1\}} + s_{r\theta,\rho}^{\{0\}} = C_1(v_\theta^{\{-1\}} + v_\theta^{\{-1\}}v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} + (1+\tau)v_{\theta,\tau}^{\{-1\}}) \quad (4.1)$$

Поскольку уравнение неразрывности не изменилось, выражения для $v_\theta^{\{-1\}}$ и $v_r^{\{0\}}$ останутся прежними. Из второго уравнения (4.1) получим

$$s_{r\theta}^{\{0\}} = \rho\left(p_{,\theta}^{\{-1\}} + \frac{C_1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\Big/\cos^3\frac{\theta}{2}\right) + \overline{\overline{s}}_{r\theta}^{\{0\}}(\theta,\tau)$$

откуда с учетом граничного условия (2.4) найдем

$$p^{\{-1\}} = \overline{p}^{\{-1\}}(\tau) + C_1\left(2\ln\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\right) - 2\int_0^\theta k_1\cdot\mu(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad (4.2)$$

$$s_{r\theta}^{\{0\}} = k_1(1-2\rho)\mu(\theta). \quad (4.3)$$

Также не изменятся функции $s_{rr}^{\{0\}}$, $s_{\theta\theta}^{\{0\}}$ и $v_{\theta}^{\{0\}}$, а выражение для давления примет вид:

$$p^{\{0\}} = s_{rr}^{\{0\}} - C_1 \rho \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \overline{\overline{p}}^{\{0\}}(\theta, \tau) \tag{4.4}$$

На данной стадии сжатия, для вычисления величины $\overline{\overline{p}}^{\{0\}}$ необходим явный вид функции $v_{\theta}^{\{0\}}$, который как было сказано выше, в общем случае аналитически не выражается.

5. Анализ результатов. Полученные решения (3.2)–(3.4), (4.3) не отличаются от квазистатического случая [15], за исключением функции давления, где возникает слагаемое $C_\beta \left(2 \ln \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2}\right) + \overline{p}^{\{\beta-2\}}(\tau)$ в членах при α^{-1} и α^0 в режимах $\beta = 1$ и $\beta = 2$ соответственно. Естественно требовать, чтобы давление на границах слоя совпадало с атмосферным $p_{\text{atm}}^{\{0\}}$ (здесь полагается, что p_{atm} — величина порядка α^0), однако данное слагаемое при $\theta \to \pi$ стремится к бесконечности. Таким образом, если слой полностью занимает область, невозможно удовлетворить данное граничное условие, не нарушив асимптотичность ряда в смысле Пуанкаре [16]. Напротив, если слой (1.1) лежит в секторе $\theta \in [0; \theta_0]$, то с учетом граничного условия уравнения (4.2) и (3.4, 3.5) примут вид:

$$p^{\{-1\}} = C_1 \left(2 \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \Big/ \cos \frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sec^2 \frac{\theta}{2} - \sec^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \right) - 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \mu(\varepsilon)\, d\varepsilon, \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered} p^{\{0\}} = s_{rr}^{\{0\}} - s_{rr}^{\{0\}}\Big|_{\theta=\theta_0} + \overline{\overline{p}}^{\text{ks}\{0\}} - \overline{\overline{p}}^{\text{ks}\{0\}}\Big|_{\theta=\theta_0} + \\ + C_2 \left(2 \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \Big/ \cos \frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sec^2 \frac{\theta}{2} - \sec^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \right) + p_{\text{atm}}^{\{0\}}. \end{gathered} \tag{5.2}$$

При этом область $\theta = \theta_0$ представляет собой зону краевого эффекта, где найденное решение не применимо.

Уравнения (5.1), (5.2) отличаются от квазистатического случая наличием выпуклого вверх слагаемого $2 \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \Big/ \cos \frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sec^2 \frac{\theta}{2} - \sec^2 \frac{\theta_0}{2} \right)$, которое увеличивает суммарную силу, действующую на сферы со стороны слоя.

Уравнение (2.6) устанавливает критерий применимости квазистатического приближения: $\frac{\rho_m V^2}{\tau_s} \ll \frac{h^2}{R^2} \ll 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prandtl L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastiche Gleichgewicht // ZAMM. 1923. Bd. 3. H. 6. S. 401–406. = *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 102–113.
2. *Nadai A.* Theory of Flow and Fracture of Solids. N.Y.: Wiley, 1950. = *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 648 с.
3. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: ClarendonPress, 1950. = *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.
4. *Кийко И.А.* О воздействии сжатого пластического тонкого слоя на упругие поверхности // Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр. 1961. № 6. С. 1082–1085.

5. *Победря Б.Е., Гузей И.Л.* Математическое моделирование деформирования композитов с учетом термодиффузии // Математическое моделирование систем и процессов. 1998. № 6. С. 82–91.
6. *Кийко И.А.* Обобщение задачи Л. Прандтля об осадке полосы на случай сжимаемого материала // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2002. № 4. С. 47–52.
7. *Ильюшин А.А.* Труды. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009. 526 с.
8. *Быковцев Г.И.* О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 6. С. 140–142.
9. *Кийко И.А., Кадымов Б.А.* Обобщения задачи Л. Прандтля о сжатии полосы // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 4. С. 50–56.
10. *Георгиевский Д.В.* Асимптотическое интегрирование задачи Прандтля в динамической постановке // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 97–105.
11. *Георгиевский Д.В., Шабайкин Р.Р.* Квазистатическое и динамическое сдавливание плоского круглого идеальнопластического слоя жесткими плитами // Изд-во ТвГТУ Тверь. Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела. 2017. С. 56–63.
12. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.
13. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
14. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
15. *Георгиевский Д.В.* Сжатие-сток асимптотически тонкого идеально жесткопластического сферического слоя // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 6. С. 65–68.
16. *Кравченко В.Ф., Несененко Г.А., Пустовойт В.И.* Асимптотики Пуанкаре решений задач нерегулярного тепло- и массопереноса. М.: Физматлит, 2006. 419 с.