

УДК 531.55

## ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ СФЕРОИДА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ

© 2020 г. Л. Д. Акуленко<sup>a,\*</sup>, Д. Д. Лещенко<sup>b,\*\*</sup>, Е. С. Палий<sup>c,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup>Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

<sup>c</sup>Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

\*e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

\*\*e-mail: leshchenko\_d@ukr.net

\*\*\*e-mail: eschernyakova@gmail.com

Поступила в редакцию 15.04.2019 г.

После доработки 18.07.2019 г.

Принята к публикации 04.10.2019 г.

В нестандартной постановке рассматривается движение относительно центра масс сфероида с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Момент сил, действующих на тело со стороны вязкой жидкости в полости, определен по методике, развитой в работах Ф.Л. Черноуьско. В результате оригинальных асимптотического и численного расчетов получены решения, описывающие эволюцию движения тела на бесконечном интервале времени с асимптотически малой погрешностью.

*Ключевые слова:* сфероид, полость, вязкая жидкость, твердое тело, усреднение

DOI: 10.31857/S0572329920020026

**1. Введение.** Спутник или космический корабль в своем движении относительно центра масс подвержен влиянию моментов сил различной природы. На них действуют, например, моменты сил, обусловленные движением некоторых масс внутри тела. Эти движения могут быть связаны с наличием жидкости в полостях, расположенных в теле (например, жидкого топлива или окислителя в баках ракет).

Задачи динамики твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, представляют бóльшие трудности, чем в случае идеальной жидкости. Важный вклад в решение этих задач внесли работы Ф.Л. Черноуьско с соавторами [1, 2]. В них рассматриваются движения тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Получено асимптотическое решение, описывающее эволюцию движения тела, имеющего полость с жидкостью большой вязкости, на большом интервале времени.

В работе А.И. Кобрина [3] методом пограничного слоя исследован начальный участок вращения тела с полостью, содержащей жидкость большой вязкости. Статья [4] посвящена изучению стабилизирующего влияния вязкой жидкости в полости на вращение волчка вокруг заданной оси. В работе [5] исследуются колебания на эллиптической орбите твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. В статье [6] асимптотическим методом изучается движение по инерции твердого тела со сферической или эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью. В статьях [7, 8, 10] и книге [9] исследуются быстрые вращательные движения относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости, под дей-

ствием моментов сил гравитации, светового давления и сопротивления среды. В работе [11] проведен численный анализ изменения вектора кинетического момента твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. В [12] представлено численное решение задачи о движении тела с полостью кубической формы, заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки. В статье [13] представлены аналитические и численные результаты, полученные при исследовании системы, состоящей из твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. В работе [14] предложен подход для моделирования динамики твердого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости. Хаотические движения твердого тела и спутника с полостью, заполненной жидкостью, исследуются в статьях [15, 16]. Книга [17] посвящена аналитическим приближенным методам в нелинейной динамике твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. В [18] рассматриваются некоторые задачи управления вращающимися твердыми телами с полостями, заполненными идеальной или вязкой жидкостью. В статье [19] исследуется оптимальное торможение вращающегося несимметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в среде с сопротивлением. В [20] получены и исследованы уравнения движения системы  $n$  связанных твердых тел с полостями, заполненными вязкой жидкостью.

В основе астрометрических исследований лежит динамическая теория вращения Земли относительно центра масс [21, 22]. В работе [23] отмечается, что с позиций теоретической механики проблема анализа процесса колебаний полюса Земли аналогична задаче исследования движений оси гироскопа под действием возмущающих моментов сил и с учетом вязкоупругих деформаций в квазистатическом приближении.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим свободное движение в пространстве твердого тела с вязкой жидкостью относительно центра инерции. Здесь  $O_1y_1y_2y_3$  – движущаяся поступательно система координат с началом, связанным с центром инерции системы. Тензор  $\mathbf{P} = (P_{ij})$  задается в виде  $P_{ij} = P_0\delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, скалярный коэффициент  $P_0 > 0$ . Данный вид тензор  $\mathbf{P}$  имеет в случае сферической полости, для которой согласно [1, 2] значение параметра  $P_0 = 8\pi b^7/525$ , где  $b$  – радиус полости. Через  $A, B, C$  обозначим главные центральные моменты инерции системы, через  $p, q, r$  – проекции абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  на главные центральные оси инерции. Уравнения движения запишем в проекциях на главные центральные оси инерции (точка – производная по времени  $t$ ):

$$A\dot{p} + (C - B)qr = \frac{\rho P_0}{\sqrt{ABC}} p[C(A - C)(A + C - B)r^2 + B(A - B)(A + B - C)q^2] \quad (2.1)$$

Выражение в правой части (2.1) определяет в асимптотическом приближении момент сил вязкой жидкости в полости тела [1, 2].

Остальные уравнения получаются из (2.1) циклической перестановкой символов  $A, B, C$  и  $p, q, r$ .

Рассмотрим случай сфероида, т.е. тела, когда главные центральные моменты инерции “замороженного” твердого тела близки друг к другу и представим их в виде:

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0 \quad (2.2)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$  – малый параметр. При  $\varepsilon = 0$  уравнения (2.1) описывают движение сферически симметричного тела.

Предположим также, что имеют место оценки:

$$|A' - B'| = O(\varepsilon J_*), \quad |A - B| = O(\varepsilon^2 J_*), \quad J_* \sim J_0 \quad (2.3)$$

Тогда, следуя (2.2), (2.3), имеют место выражения:

$$A - B = \varepsilon(A' - B') = \varepsilon^2 J_*, \quad A - C = \varepsilon A', \quad B - C = \varepsilon B' \quad (2.4)$$

После перехода к медленному времени  $\tau = \varepsilon t$  (далее точка – производная по времени  $\tau$ ) и формальных преобразований системы (2.1) с учетом соотношений (2.2)–(2.4) получим возмущенную систему типа Эйлера вида:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{B'}{J_0} \left( 1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right) qr + \varepsilon f_p(p, q, r), \quad p(0) = p_0 \\ \frac{dq}{d\tau} &= \frac{A'}{J_0} \left( -1 + \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right) rp + \varepsilon f_q(p, q, r), \quad q(0) = q_0 \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{J_0} (A' - B') qp + \varepsilon f_r(p, q, r), \quad r(0) = r_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

В системе уравнений (2.5) введены возмущения. Здесь  $r$  – медленная переменная в медленном времени  $\tau$ . Система дифференциальных уравнений (2.5) – существенно нелинейная система, в которой частота зависит от медленной переменной  $r$ .

В (2.5) введены возмущения:

$$\begin{aligned} \varepsilon f_p(p, q, r) &= \frac{\rho P_0 p}{\nu J_0^3} \left\{ A' [J_0 - \varepsilon(A' + 2B')] r^2 + (A' - B') [J_0 - \varepsilon(A' - B')] q^2 \right\} \\ \varepsilon f_q(p, q, r) &= \frac{\rho P_0 q}{\nu J_0^3} \left\{ (B' - A') [J_0 - \varepsilon(B' - A')] p^2 + B' [J_0 - \varepsilon(2A' + B')] r^2 \right\} \\ \varepsilon f_r(p, q, r) &= \frac{\rho P_0 r}{\nu J_0^3} \left\{ B' [\varepsilon(2A' - B') - J_0] q^2 + A' [\varepsilon(2B' - A') - J_0] p^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Момент сил трения вязкой жидкости в полости тела является малым [1, 2, 7, 9, 11].

Решение невозмущенной системы (2.5) при значениях  $\varepsilon = 0$ ,  $1/\nu = 0$  имеет вид:

$$p = a \sin \varphi, \quad q = a \sqrt{\frac{A'}{B'}} \cos \varphi \quad (2.7)$$

Здесь  $a = \sqrt{p_0^2 + (\dot{p}_0/w)^2}$  – амплитуда (медленная переменная),  $\varphi$  – фаза,  $w = \sqrt{A'B'r_0/J_0}$ ,  $A'B' > 0$  по предположению.

Проведем переход от медленных переменных  $(p, q, r)$  к новым стандартным медленным переменным  $a, r$  и фазе  $\varphi$ . Используем для этого замену переменных:

$$p = a \cos \varphi, \quad q = -\frac{J_0 a w \sin \varphi}{B'r}, \quad r = r \quad (2.8)$$

Продифференцируем выражения (2.8) в силу возмущенной системы. После ряда преобразований получим систему в стандартной форме:

$$\begin{aligned} -\dot{a} \cos \varphi - a \dot{\varphi} \sin \varphi &= -\frac{ar\sqrt{A'B'} \sin \varphi}{J_0} + \varepsilon f_{1p} \\ -\dot{a} \sin \varphi - a \left( \dot{\varphi} - \frac{\sqrt{A'B'}}{J_0} r \right) \cos \varphi &= \varepsilon \sqrt{\frac{B'}{A'}} f_{1q} \\ \dot{r} &= -\frac{A' - B'}{J_0} \sqrt{\frac{A'}{B'}} a^2 \cos \varphi \sin \varphi + \varepsilon f_{1r} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon f_{1p} &= \varepsilon \frac{A'\sqrt{A'B'}}{J_0^2} ar \sin \varphi + \frac{\rho P_0 a}{\nu J_0^3} \cos \varphi \times \\
 &\times \left\{ a^2 \frac{A'}{B'} (A' - B') [J_0 - \varepsilon (A' - B')] \sin^2 \varphi + r^2 A' [J_0 - \varepsilon (A' + 2B')] \right\} \\
 \varepsilon f_{1q} &= \varepsilon \frac{A'B'}{J_0^2} ar \cos \varphi - \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3} \sqrt{\frac{A'}{B'}} a \sin \varphi \times \\
 &\times \{ a^2 (B' - A') [J_0 - \varepsilon (B' - A')] \cos^2 \varphi + r^2 B' [J_0 - \varepsilon (2A' + B')] \} \\
 \varepsilon f_{1r} &= \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3} A' a^2 r \{ \varepsilon (2A' - B') \sin^2 \varphi + \varepsilon (2B' - A') \cos^2 \varphi - J_0 \}
 \end{aligned}$$

Разрешим уравнения (2.9) относительно  $\dot{a}$  и  $\dot{\varphi}$ . Получим систему вида:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon f_{1p} \cos \varphi - \varepsilon \sqrt{\frac{B'}{A'}} f_{1q} \sin \varphi \\
 \dot{\varphi} &= w(r) - \frac{\varepsilon f_{1p}}{a} \sin \varphi - \frac{\varepsilon}{a} \sqrt{\frac{B'}{A'}} f_{1q} \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Подставим (2.8) в третье уравнение (2.5) для переменной  $r$ . С учетом стандартных преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon (A' - B') \frac{\sqrt{A'B'}}{J_0^2} ar \sin \varphi \cos \varphi + \\
 &+ \frac{\rho P_0 a}{\nu J_0^3} \left\{ a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \frac{(A' - B')^2}{B'} [J_0 - \varepsilon (A' + B')] + \right. \\
 &\left. + r^2 [A' (J_0 - \varepsilon A') \cos^2 \varphi - 2\varepsilon A'B' + B' (J_0 - \varepsilon B') \sin^2 \varphi] \right\} \\
 \dot{r} &= (B' - A') \sqrt{\frac{A'}{B'}} \frac{a^2}{J_0} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\rho P_0 A'}{\nu J_0^3} r a^2 \{ \varepsilon (2A' - B') \sin^2 \varphi + \varepsilon (2B' - A') \cos^2 \varphi - J_0 \}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi} &= w(r) - \varepsilon \frac{\sqrt{A'B'}}{J_0^2} r (A' \sin^2 \varphi + B' \cos^2 \varphi) + \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3} \cos \varphi \sin \varphi \times \\
 &\times \left\{ r^2 [J_0 (B' - A') + 2\varepsilon (A'^2 - B'^2)] - \varepsilon J_0 (A' - B') a^2 \left( \frac{A'}{B'} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Здесь величина  $w(r) = \sqrt{A'B'}r/J_0$  имеет смысл возмущенной частоты преобразованной системы. После усреднения системы (2.11) по фазе  $\varphi$  [24–26] находим:

$$\dot{a} = \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3} a(\alpha a^2 + \beta r^2), \quad \dot{r} = \frac{\rho P_0}{2\nu J_0^3} r a^2 \gamma \tag{2.12}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \varepsilon (A' - B')^2 [J_0 - \varepsilon (A' + B')] / 8B', \quad \beta = A' (J_0 - \varepsilon A') / 2 - 2\varepsilon A'B' + B' (J_0 - \varepsilon B') / 2, \\
 \gamma &= \varepsilon (A'^2 + A'B') / 2 - J_0 A'
 \end{aligned}$$

Систему (2.12) преобразуем к виду:

$$\dot{x} = 2\eta x(\alpha x + \beta y), \quad \dot{y} = \eta \gamma x y \tag{2.13}$$

Здесь введены переменные  $x = a^2$ ,  $y = r^2 > 0$  и параметр  $\eta = \rho P_0 / \nu J_0^3$ .

Отметим, что в системе (2.13)  $x, y$  – медленные переменные. Разделим первое уравнение (2.13) на второе; получим скалярное уравнение, допускающее элементарное аналитическое интегрирование

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2\alpha x}{\gamma y} + \frac{2\beta}{\gamma} \quad (2.14)$$

Для этого обозначим:  $z = x/y$ .

Имеем параметры  $\tilde{\alpha} = 2\alpha/\gamma$ ,  $\tilde{\beta} = 2\beta/\gamma$  и выражение для производной  $z' = dz/dy$ .

Так как  $z = x/y$ , то получим линейное уравнение для переменной  $x$ :

$$\frac{dx}{dy} = yz' + z \quad (2.15)$$

где  $yz' = y \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\theta}$ ; здесь введен аргумент  $\theta = \ln y$ . С учетом введенных ранее обозначений имеет место выражение:

$$yz' + z = \tilde{\alpha}z + \tilde{\beta}$$

Получим в итоге линейное неоднородное уравнение элементарного вида:

$$\frac{dz}{d\theta} = (\tilde{\alpha} - 1)z + \tilde{\beta} \quad (2.16)$$

Его решение записывается следующим образом:

$$z = \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} + C_1 e^{(\tilde{\alpha}-1)\theta}, \quad C_1 = \text{const} \quad (2.17)$$

Раньше было получено уравнение вида:

$$\frac{dx}{dy} = \tilde{\alpha}z + \tilde{\beta} \quad (2.18)$$

Здесь согласно принятому выше обозначению  $x/y = z$ .

В результате интегрирования находим первый интеграл:

$$x = \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} y + C_1 y^{\tilde{\alpha}}, \quad C_1 = \text{const} \quad (2.19)$$

Подставим выражение (2.19) во второе уравнение системы (2.13), получим следующее уравнение:

$$\dot{y} = \eta \gamma y^2 \left( \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} + C_1 y^{\tilde{\alpha}-1} \right)$$

Оно допускает разделение переменных  $y, \tau$  и интегрирование в квадратурах.

**3. Численное интегрирование.** Система (2.13) в первом расчетном случае (рис. 1) в силу выбранных значений параметров имеет следующие коэффициенты:

$$\eta = 0.0224, \quad \alpha = 0, \quad \beta = -20, \quad \gamma = -60$$

и начальные условия:  $x(0) = 1, y(0) = 1$ .

Во втором расчетном случае (рис. 2):

$$\eta = 0.6048, \quad \alpha = 0.03125, \quad \beta = 0.65, \quad \gamma = -4.5$$

при тех же начальных условиях:  $x(0) = 1, y(0) = 1$ .

В обоих случаях  $y = r^2$  убывает на интервале  $[0; 10]$  асимптотически приближаясь к нулю (рис. 1, 2).

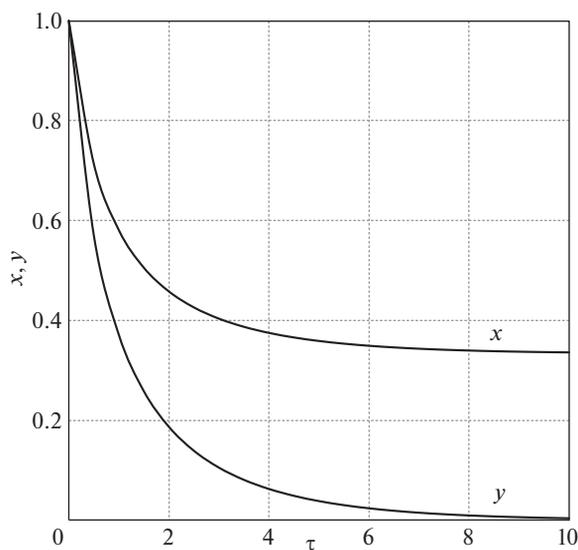


Рис. 1

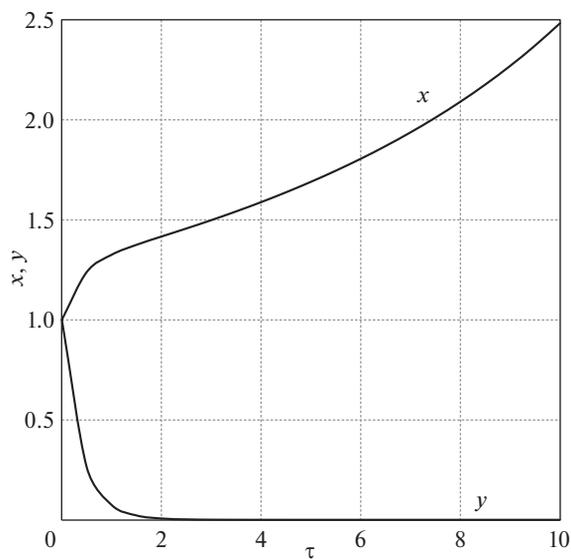


Рис. 2

В первом случае (рис. 1)  $x = a^2$  убывает на интервале  $[0; 10]$ , асимптотически приближаясь к стационарному значению 0.3359. Во втором случае (рис. 2) переменная  $x$  возрастает, достигая значения 2.4816 на интервале  $[0; 10]$ .

**Заключение.** Исследовано движение близкого к динамически сферическому твердого тела (сфероида) с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, при малых

числах Рейнольдса. Получена уточненная в квадратическом приближении по малому параметру система уравнений движения в стандартной форме. Проанализирована задача Коши для системы, определенной после усреднения. Эволюция движения твердого тела на бесконечном интервале времени описывается решениями, полученными асимптотически, аналитически и численно.

Исследуемая в работе модель представляет определенный естественнонаучный, познавательный интерес для динамики фигуры Земли.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10343).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
2. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer, 2017. 241 p.
3. Кобрин А.И. К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 431–440.
4. Смирнова Е.П. Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 980–985.
5. Осипов В.З., Суликашвили Р.С. О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите // Тр. ин-та / Тбилис. мат. ин-т АН. Груз. ССР. 1978. Т. 58. С. 175–186.
6. Баранова Е.Ю., Вильке В.Г. Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ. 2013. № 1. С. 44–50.
7. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Механика твердого тела. 2007. Вып. 37. С. 126–139.
8. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Быстрые вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием моментов сил гравитации и светового давления // Космич. исслед. 2011. Т. 49. № 5. С. 453–463.
9. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л., Зинкевич Я.С. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. Одесса: Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, 2013. 288 с.
10. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л., Щетинина Ю.С. Эволюция возмущенных вращений несимметричного гиростата в гравитационном поле и среде с сопротивлением. Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 43–52.
11. Рачинская А.Л. Движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Космич. исслед. 2015. Т. 53. № 6. С. 516–520.
12. Боталов А.Ю. Движение полости, заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки // В мире научных открытий. Математика, механика, информатика. 2013. № 2.1 (38). С. 9–23.
13. Disser K., Galdi G.R., Mazzone G., Zunino P. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid // Arch. Rational Mech. Anal. 2016. V. 221. № 1. P. 487–526.
14. Ramadanov S.M., Sidorenko V.V. Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid // Intern. J. of Non-Linear Mech. 2017. V. 95. P. 42–46.
15. Leung A.Y.T., Kuang J.L. Chaotic rotation of a liquid-filled solid // J. Sound Vib. 2007. V. 302. № 3. P. 540–563.
16. Baozeng Y., Xie J. Chaotic attitude maneuvers in spacecraft with completely liquid-filled cavity // J. Sound Vib. 2007. V. 302. № 4–5. P. 643–656.
17. Lukovsky I.A. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. Walter de Gruyter GmbH Co KG. 2015. 394 p.
18. Gurchenkov A.A., Nosov M.B., and Tsurkov V.I. Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies. Boca Raton CRC Press, 2013. 160 p.

19. *Rachinskaya A.L., Rumyantseva E.A.* Optimal deceleration of a rotating asymmetrical body in a resisting medium // Intern. Appl. Mech. 2018. V. 54. № 6. P. 710–717.
20. *Кононов Ю.Н.* О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. 2000. Вып. 30. С. 207–216.
21. *Авсюк Ю.Н.* Приливные силы и природные процессы. М.: Изд-во ОИФЗ РАН. 1996. 188 с.
22. *Сидоренков Н.С.* Физика неустойчивостей вращения Земли. М.: Наука; Физматлит, 2002. 384 с.
23. *Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А.* Механическая модель возмущенного движения Земли относительно центра масс // ДАН. 2013. Т. 453. № 3. С. 277–281.
24. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
25. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
26. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.