ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 2, с. 112–123

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОСЛОЙНОГО АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ

 В. Н. Бакулин

Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия
e-mail: vbak@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2019 г.
После доработки 25.06.2019 г.
Принята к публикации 11.10.2019 г.

На основе подхода послойного анализа рассматривается построение модели из двух типов конечных элементов (КЭ) естественной кривизны (двумерного КЭ моментных несущих слоев и трехмерного КЭ-заполнителя) для уточненного исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) в слоях трехслойных в общем случае нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны.

Представленный алгоритм построения модели позволяет избежать погрешностей из-за разрыва обобщенных перемещений на поверхностях стыковки КЭ несущих слоев и заполнителя, проводить анализ НДС по всем трем координатам, к которым отнесена оболочка, и получить решение в уточненной постановке для различных форм оболочек и граничных условий слоев, а также при нарушениях их сплошности. При этом слой заполнителя может моделироваться по толщине необходимым числом конечных элементов, что позволяет учесть изменение геометрических характеристик, физико-механических свойств и параметров НДС не только по меридиональной и окружной координатам, но и по толщине оболочки и слоя заполнителя.

Предложенный подход существенно расширяет круг решаемых в уточненной постановке задач и позволяет провести расчет с высокой степенью точности и детализации. В качестве примера приведен расчет НДС трехслойной оживальной оболочки с вырезами. Проведено исследование влияния размеров вырезов на напряженно-деформированное состояние в слоях трехслойной оболочки вращения двойной кривизны.

Ключевые слова: нерегулярные трехслойные оболочки двойной кривизны, напряженно-деформированное состояние, послойный анализ, уточненная блочная конечно-элементная модель, вырезы

DOI: 10.31857/S0572329920020051

1. Введение. Оболочки слоисто-неоднородной структуры, в том числе трехслойные оболочки вращения двойной кривизны являются распространенными элементами конструкций ракетно-космической, авиационной и др. современной техники [1–3]. Это объясняется стремлением к повышению весовой эффективности, удельной прочности и жесткости этих конструкций. Трехслойные оболочки обеспечивают сочетание высокой несущей способности и живучести с малой массой, а также позволяют достигнуть необходимых тепло-, звуко-, виброизоляционных и многих других важных характеристик. Применение их сдерживается в том числе недостаточным совершенством моделей, которые должны позволять с высокой точностью и степенью детализации провести расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) при сложных воздействиях и различных граничных условиях, а также при наличии вырезов. Неточность анализа истинной картины НДС может привести к разрушению конструкции или к увеличению ее веса. Поэтому создание более точных и эффективных подходов, адекватных моделей для исследования НДС-оболочек вращения двойной кривизны слоисто-неоднородной структуры является актуальной научной проблемой, имеющей и важное прикладное значение.

Достаточно точным является послойный анализ [4, 5] слоисто-неоднородных, в том числе трехслойных оболочек. Послойный анализ заключается в том, что при необходимости стенка оболочки, в том числе заполнитель, разбивается по толщине на отдельные слои, которые затем стыкуются между собой. Провести послойный анализ для большинства реальных конструкций аналитическими методами, как правило, не удается из-за математических трудностей. Разработке одной из таких моделей для послойного анализа напряженно-деформированного состояния применительно к трехслойным оболочкам вращения двойной кривизны с нерегулярной структурой на основе блочного конечно-элементного подхода посвящена настоящая статья.

2. Краткий обзор работ по конечно-элементным моделям слоисто-неоднородных оболочек. Построение моделей и расчет слоисто-неоднородных оболочек, в том числе из композиционных материалов (КМ), методом конечных элементов (МКЭ) рассматривалось в монографиях [6–13]. В большинстве этих работ для слоисто-неоднородных оболочек в основном рассмотрены модели на основе гипотез Тимошенко для пакета слоев, построены аппроксимации полей перемещений. Модели на основе гипотез ломанной линии применялись для расчета трехслойных цилиндрических оболочек методом конечных элементов в работе [7].

Достаточно точным и эффективным является блочный конечно-элементный подход для послойного анализа [14, 15] трехслойных оболочек.

В работах [16, 17] отмечалось, "признавая, что ... конечные элементы стали наиболее употребительным средством вычислительной математики во всем мире", необходимо "научиться решать те же задачи с меньшими затратами".

Очевидно, что наиболее эффективными (приводящими к высокой скорости сходимости численных решений) являются аппроксимации, полученные на основе аналитических решений [18–23].

Эффективными также являются аппроксимации обобщенных деформаций [5, 7, 24–31].

Важным требованием к аппроксимациям перемещений оболочечных конечных элементов (КЭ) является учет перемещений как твердых тел [4, 5, 7, 24–35].

На основе аппроксимаций перемещений с учетом перемещений как твердых тел построены оболочечные КЭ для расчета однослойных и трехслойных в общем случае нерегулярных цилиндрических [5, 7, 24–34] и конических оболочек вращения [4, 34–38].

3. Постановка задачи. Целью настоящей работы является построение на основе подхода послойного анализа конечно-элементных моделей для уточненного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных в общем случае нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны с учетом: неоднородности оболочки, в том числе на уровне слоя заполнителя; приложения нагрузок к несущим слоям и различных условий их закрепления; поперечных деформаций и напряжений, моментного состояния несущих слоев, трехмерного напряженного состояния в слое заполнителя.

В данной работе подход послойного анализа реализуется с помощью конечно-элементных моделей (КЭМ) естественной кривизны, точно представляющих геометрическую форму исследуемых слоисто-неоднородных оболочек. При этом рассматриваются тонкие и жесткие несущие слои, которые моделируются КЭ, построенными

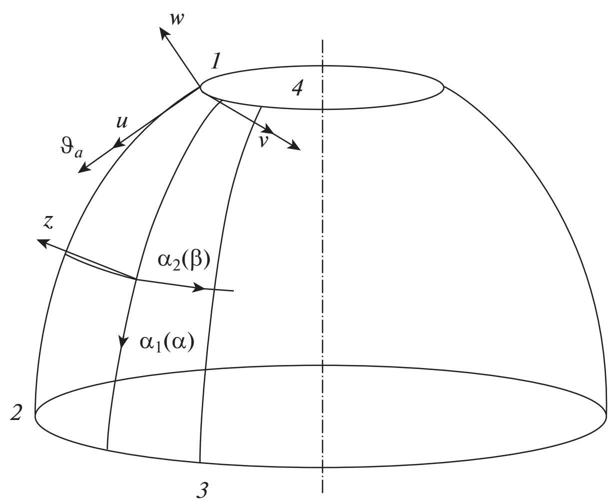

Рис. 1

на основе моментной теории оболочек, а заполнитель – трехмерными КЭ толстостенной оболочки вращения двойной кривизны.

4. Модель для анализа напряженно-деформированного состояния в тонких моментных несущих слоях трехслойной в общем случае нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны. *4.1 Основные соотношения.* Если несущие слои рассматриваемой трехслойной оболочки являются достаточно тонкими и жесткими, то для моделирования НДС в них будем применять двумерные конечные элементы естественной кривизны, построенные на основе моментной теории оболочек. Пронумеруем слои, начиная с внутренней поверхности оболочки: $i = 1, 2, 3$. Несущим слоям присвоим индекс "c", слоям заполнителя – индекс "f". Расположим системы координат на срединных поверхностях конечных элементов слоев.

Перемещения точек несущих слоев оболочки определяются перемещениями точек срединной поверхности $\delta_i^c = \{u, v, w\}^{\mathrm{T}}$ и углами поворота нормали к срединной поверхности относительно осей α_1 (α) и α_2 (β) (рис. 1) $\vartheta_i^c = \left\{\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta\right\}^{\mathrm{T}}$:

$$\vartheta_\alpha = \frac{\partial w}{r\partial\beta} - \frac{v}{r}\sin\alpha; \quad \vartheta_\beta = -\frac{\partial w}{R_1\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}$$

где α_1 (α) и α_2 (β) – оси криволинейных координат, которые находятся на срединной поверхности несущих слоев, u, v – перемещения по касательным к осям α_1, α_2 соответственно, w – перемещение по нормальной к срединной поверхности несущего слоя оболочки координате (z), $r = R_2 \sin\alpha$, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности несущего слоя оболочки.

В дальнейшем индексы, соответствующие номеру слоя i, считая от внутренней поверхности оболочки, и его принадлежности – c (несущий слой) и f (слой заполнителя), при записи коэффициентов, составляющих вектора указывать не будем.

Геометрические соотношения для оболочек вращения двойной кривизны имеют вид [39]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{R_1\partial\alpha} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{r\partial\beta} + \frac{u\cos\alpha}{r} + \frac{w\sin\alpha}{r}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{r\partial\beta} + \frac{\partial v}{R_1\partial\alpha} - \frac{v\cos\alpha}{r}$$

$$æ_1 = -\frac{\partial^2 w}{R_1^2\partial\alpha^2} + \frac{\partial u}{R_1^2\partial\alpha}, \quad æ_2 = -\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\beta^2} + \frac{\sin\alpha\,\partial v}{r^2\partial\beta} - \frac{\cos\alpha\,\partial w}{R_1 r\partial\alpha} + \frac{u\cos\alpha}{R_1 r} \tag{4.1}$$

$$\chi = -\frac{\partial^2 w}{R_1 r\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\cos\alpha\,\partial w}{r^2\partial\beta} + \frac{\sin\alpha\,\partial v}{R_1 r\partial\alpha} - \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{r^2}v + \frac{\partial u}{R_1 r\partial\beta}$$

где ε_1, ε_2, γ, $æ_1$, $æ_2$, χ – меридиональная, окружная и сдвиговая деформации, параметры изменения кривизны и кручения срединной поверхности соответственно (обобщенные деформации).

Функции перемещений как твердого тела $\delta_c^O = \{u^O, v^O, w^O\}^{\text{т}}$ тонкой моментной незамкнутой оболочки вращения двойной кривизны определяются интегрированием соотношений (4.1) при нулевых значениях деформаций аналогично [25, 30, 34] $\delta_c^O = T_c^O\alpha_c^O$, где $\alpha_c^0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}^{\text{т}}$, $\alpha_1, ..., \alpha_6$ – постоянные интегрирования, используемые здесь как неопределенные коэффициенты, T_c^O – матрица коэффициентов при $\alpha_1, ..., \alpha_6$ [35, 40].

4.2. Конечный элемент несущих слоев трехслойной в общем случае нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны. Рассматриваемый КЭ (рис. 1) образован сечением оболочки двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения, и двумя плоскостями, проходящими через ось оболочки.

Вектор перемещений конечного элемента оболочки складывается из жестких и деформационных смещений $\delta_i^c = \delta_c^O + \delta_c^d$ и имеет вид

$$\delta_i^c = T_i^c\alpha_i^c \tag{4.2}$$

где α_i^c – вектор неопределенных коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_{20}$, с помощью которых записываются функции, аппроксимирующие перемещения конечного элемента; T_i^c (3×20) – матрица аппроксимирующих функций перемещений КЭ несущих слоев (табл. 1). При записи матрицы T_i^c применены следующие обозначения: $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$, $c_1 = \cos\beta$, $s_1 = \sin\beta$, $k_0 = r_0 - R_1^0\sin\alpha_0$, r_0 – радиус окружности в плоскости перпендикулярной оси оболочки и проходящей через начало местной системы координат конечного элемента несущих слоев, α_0, R_1^0 – угловая координата и радиус кривизны R_1 в начале местной системы координат КЭ несущих слоев соответственно.

Когда коэффициенты матрицы T_i^c равны нулю, соответствующие ячейки табл. 1 не заполнялись.

Подставив координаты узлов конечного элемента несущих слоев в зависимости (4.2) и в выражения для углов поворота нормали вокруг координатных осей α и β, записанные через неопределенные коэффициенты с учетом (4.2), получим соотношения, связывающие вектор узловых перемещений q_i^c с вектором неопределенных коэффициентов α_i^c для КЭ несущих слоев, аналогично [15].

Подставив (4.2) в (4.1), получим выражения обобщенных деформаций, записанные с помощью вектора α_i^c.

Таблица 1

	u	v	w
α_1	c_1c	$-s_1$	sc_1
α_2	s_1c	c_1	ss_1
α_3	$c_1(R_1^0 + k_0s)$	$-cs_1R_1^0$	$-k_0cc_1$
α_4	$s_1(R_1^0 + k_0s)$	$cc_1R_1^0$	$-cs_1k_0$
α_5	s		$-c$
α_6		$k_0 + R_1^0s$	
α_7	α		
α_8	β		
α_9	$\alpha\beta$		
α_{10}		β	
α_{11}		$\alpha\beta$	
α_{12}			$\alpha\beta$
α_{13}			α^2
α_{14}			β^2
α_{15}			$\alpha^2\beta$
α_{16}			$\alpha\beta^2$
α_{17}			α^3
α_{18}			β^3
α_{19}			$\alpha^3\beta$
α_{20}			$\alpha\beta^3$

Получив выражения обобщенных деформаций и зная физические соотношения, определяем матрицы жесткости конечных элементов несущих слоев (аналогично [22]) для построения общей матрицы жесткости трехслойной в общем случае нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны.

Достоверность, сходимость и точность результатов, полученных с помощью рассмотренной модели конечного элемента несущих слоев, подтверждена в [35, 40, 41] сравнением с аналитическим [42] и численными решениями [34] для задачи деформирования сферической оболочки.

5. Модель для анализа напряженно-деформированного состояния в слое заполнителя трехслойной нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны. *5.1. Конечный элемент для моделирования НДС в слое заполнителя трехслойной нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны.* Рассматриваемый КЭ имеет восемь узлов, расположенных в угловых точках – по четыре узла на внутренней и внешней криволинейных поверхностях соответственно.

Степенями свободы в узле конечного элемента слоя заполнителя, который сопрягается по внутренней и внешней поверхностям с КЭ несущих слоев, являются три линейных перемещения u, v, w и углы поворота нормали к криволинейным поверхностям вокруг координатных осей α_1 (α) и α_2 (β). Таким образом, конечный элемент слоя заполнителя в общем случае имеет сорок степеней свободы.

Уменьшая число степеней свободы конечного элемента слоя заполнителя, можно переходить от одной модели заполнителя к другой.

Моделируя по меридиональной, окружной и нормальной к поверхности оболочки координатам слой заполнителя необходимым числом элементов, находим зависимость изменения перемещений, деформаций и напряжений по этим направлениям, в том числе по нормальной к срединной поверхности координате.

5.2. Аппроксимирующие функции перемещений конечного элемента слоя заполнителя трехслойной нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны. Местная система координат у конечного элемента слоя заполнителя находится на срединной поверхности КЭ с началом координат, расположенном на пересечении линий, находящихся на одинаковом расстоянии от криволинейных и прямолинейных границ конечного элемента и параллельных этим границам.

Так как обобщенные перемещения конечных элементов несущих слоев задавались на их срединной поверхности, то при стыковке КЭ несущих слоев и заполнителя, переходим в несущих слоях от срединной поверхности, относительно которой получалась матрица жесткости конечного элемента этого слоя, к поверхности раздела с заполнителем с помощью матриц перехода подобно тому, как это приведено в монографии [10] и статье [43].

Аппроксимирующие функции полей перемещений конечного элемента слоя заполнителя строятся на внутренней и внешней криволинейных поверхностях этих КЭ. При этом используются функции, полученные для несущих слоев аналогично [44].

Так как разрабатывается конечно-элементная модель, позволяющая при необходимости слой заполнителя разбивать и по толщине на требуемое число конечных элементов, то в этих КЭ можно применять линейную аппроксимацию перемещений по радиальной координате, а закон изменения параметров НДС воспроизводить моделированием по толщине необходимым числом конечных элементов [38, 44].

5.3. Геометрические соотношения для конечного элемента слоя заполнителя трехслойной нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны. Геометрические соотношения для трехмерного тела в криволинейных координатах [1] применим для конечного элемента слоя заполнителя, представляющего собой толстостенную оболочку двойной кривизны

$$\varepsilon_\alpha = \partial u / R_1 \partial\alpha + w/R_1, \quad \varepsilon_\beta = \partial v / r\partial\beta + u\cos\alpha / r + w\sin\alpha / r, \quad \varepsilon_z = \partial w/\partial z$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \partial u / r\partial\beta + \partial v / R_1\partial\alpha - v\cos\alpha / r, \quad \gamma_{\beta z} = \partial w / r\partial\beta + \partial v/\partial z - v\sin\alpha / r \qquad (5.1)$$

$$\gamma_{z\alpha} = \partial w / R_1\partial\alpha + \partial u/\partial z - u/R_1$$

где $R_1 = (R_{1в} + R_{1н})/2$, $r = R_2 \sin\alpha$, $R_2 = (R_{2в} + R_{2н})/2$, (индексы *в* и *н* означают, что радиусы относятся к внутренней и наружной поверхностям конечного элемента слоя заполнителя соответственно).

Зная аппроксимирующие функции перемещений конечного элемента заполнителя, записываются выражения обобщенных деформаций (5.1) через вектор неопределенных коэффициентов.

Получив зависимости для обобщенных деформаций, можно записать выражения для напряжений на основе физического закона по алгоритмам, аналогичным рассмотренным в статье [36].

Зная выражения для деформаций и получив зависимости для напряжений на основе физического закона, вычисляется матрица жесткости конечного элемента заполнителя с помощью соотношений [36].

Из разработанных конечных элементов моментных несущих слоев и трехмерных конечных элементов заполнителя строится блок для уточненного послойного моделирования напряженно-деформированного состояния трехслойной в общем случае нерегулярной оболочки двойной кривизны.

Таким образом, представленная конечно-элементная модель трехслойных оболочек двойной кривизны позволяет проводить расчет НДС незамкнутых и нерегулярных (например, наличие вырезов) оболочек.

6. Численный пример. Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек вращения двойной кривизны с вырезами. Рассмотрим задачу о влиянии размеров вырезов на напряженно-деформированное состояние трехслойной оживальной оболочки. В качестве объекта исследования выбран трехслойный оживальный отсек с двумя противоположно расположенными прямоугольными в плане вырезами, нагруженный равномерно распределенным внешним давлением. Несущие слои оболочки выполнены из стеклопластика, а заполнитель – из пенопласта. Считается, что граничные условия на торцах оболочки соответствуют случаю шарнирного опирания (на торце меньшего диаметра разрешено осевое перемещение).

Геометрические параметры оболочки следующие:

$$R = 1 \text{ м}, \quad L = 1.7 \text{ м}, \quad h_1 = 0.15 \text{ см}, \quad h_2 = 0.15 \text{ см}, \quad H = 4.9 \text{ см}$$

где R – наружный радиус большего основания; L – длина отсека;

h_1, h_2 – толщина внутреннего и внешнего несущих слоев соответственно;

H – толщина трехслойного пакета.

Вырезы располагаются на расстоянии 30 см от торца оболочки. Длина вырезов по меридиану составляет 30 см. Угол раствора выреза в окружном направлении β_B изменялся в пределах от 20° до 40° с шагом 4°.

Физико-механические характеристики трехслойной оболочки следующие:

– для внутреннего и внешнего несущих слоев:

$$E_1 = 2.1 \times 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 1.9 \times 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad G_{12} = 0.36 \times 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \mu_2 = 0.1$$

– для заполнителя:

$$E_3 = 240 \text{ кг/см}^2, \quad G_{13} = G_{23} = 100 \text{ кг/см}^2$$

Вследствие симметрии в окружном направлении при расчете рассматривается 1/4 симметричная часть оболочки, которая разбивалась на 45 блоков конечных элементов в меридиональном направлении и на 30 блоков конечных элементов в окружном.

Анализ результатов расчета показывает, что напряженно-деформированное состояние оболочки, ослабленной вырезами, характеризуется ярко выраженным краевым эффектом в окрестности вырезов и особенно вблизи угловых точек вырезов, быстро затухающим по мере удаления от них. Наибольшими по величине являются мембранные напряжения во внешнем несущем слое в окрестности угловых точек вырезов. Моментные напряжения более чем в 5 раз меньше мембранных. Во внутреннем несущем слое максимальные значения усилий и моментов на 10–15% меньше, чем во внешнем. Наибольшими в заполнителе являются напряжения поперечного сдвига τ_{31}, которые больше примерно в 2 раза напряжений обжатия σ_{33} и приблизительно в 3.5 раза больше τ_{32}.

На рис. 2 представлены графики изменения по координате β мембранных окружных напряжений σ_{N2} (кг/см^2) во внешнем несущем слое вблизи края выреза с большим диаметром в сечении B–B (плоскость B–B расположена перпендикулярно оси оболочки и проходит на расстоянии половины длины конечного элемента от края выреза с большим диаметром (аналогично рис. 2 [14])) для $20° \le \beta_B \le 40°$. Отсчет угло-

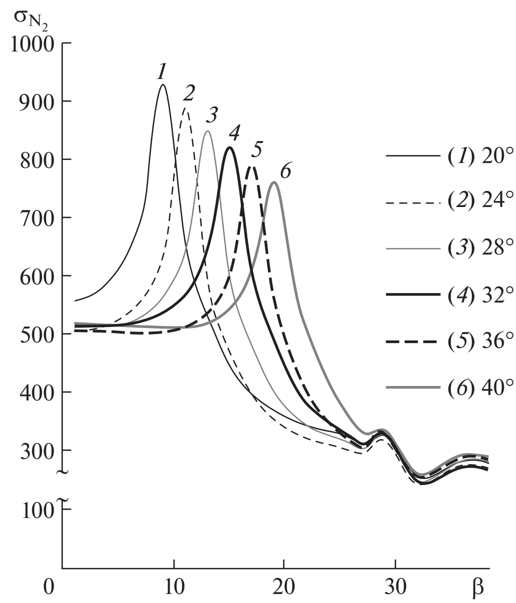

Рис. 2

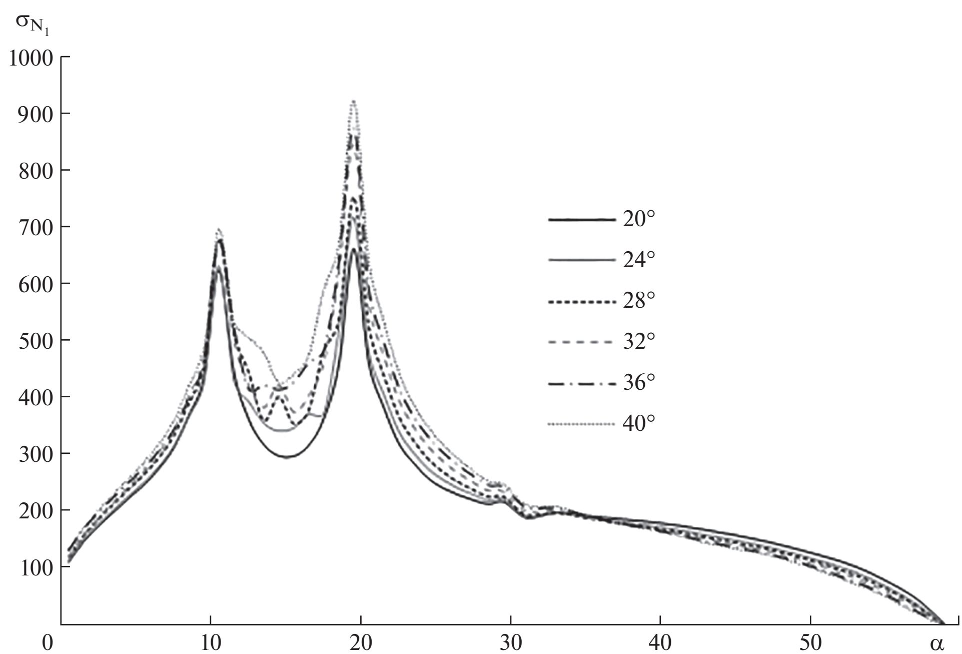

Рис. 3

вой координаты β в окружном направлении в сечении B–B будем вести от плоскости симметрии, которая делит вырез пополам и проходит через ось оболочки.

На рис. 3 представлены графики изменения по координате α мембранных меридиональных напряжений σ_{N1} (кг/см^2) во внешнем несущем слое вблизи мери-

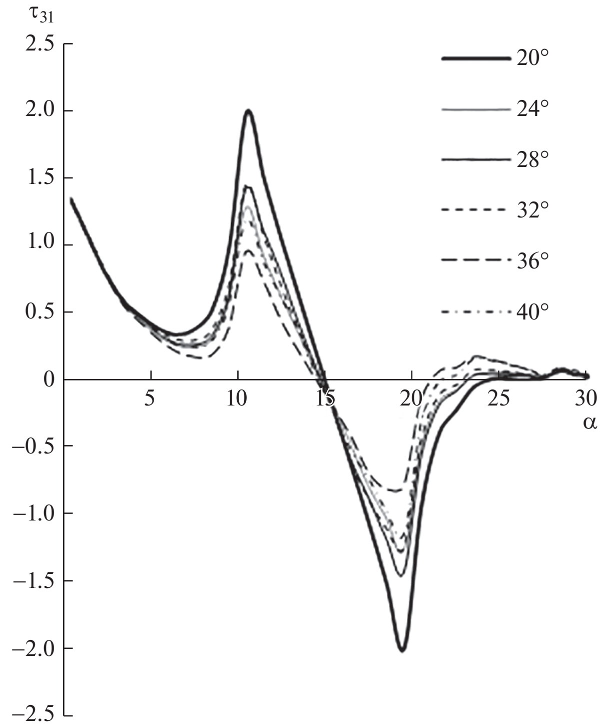

Рис. 4

дионального края выреза в сечении А–А (плоскость А–А проходит через ось оболочки и меридиональную линию, находящуюся на расстоянии половины размера конечного элемента в окружном направлении от меридионального края выреза (аналогично рис. 2 [14])) для $20° \le \beta_B \le 40°$. Отсчет угловой координаты α в меридиональном направлении в сечении А–А будем вести от торца оболочки с большим диаметром.

При изменении β_B $20° \le \beta_B \le 40°$ изменение максимальных значений основных мембранных напряжений во внешнем несущем слое трехслойной оживальной оболочки составляет 20–30%.

На рис. 4 представлены графики изменения в меридиональном направлении (по координате α) напряжений поперечного сдвига τ_{31} (кг/см^2) в слое заполнителя вблизи меридионального края выреза в сечении А–А для $20° \le \beta_B \le 40°$.

Приведенные результаты могут быть использованы при проектировании трехслойных отсеков оживальной формы с прямоугольными в плане вырезами.

Заключение. Разработана модель, позволяющая более адекватно по сравнению с имеющимися моделями учесть особенности слоисто-неоднородного строения, нарушение сплошности слоев, моментное состояние несущих слоев, трехмерное напряженно-деформированное состояние в слое-заполнителе, а также различные условия закрепления и нагружения слоев.

В качестве примера решена задача об определении параметров напряженно-деформированного состояния трехслойной оболочки оживальной формы с прямоугольными в плане вырезами.

Автор выражает благодарность В.В. Репинскому за помощь в проведении расчетов.

Работа выполнена в рамках государственного задания, номер государственной регистрации темы АААА-А19-119012290177-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А.* Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука. Физматлит, 1998. 464 с.
3. *Бакулин В.Н., Острик А.В.* Комплексное действие излучений и частиц на тонкостенные конструкции с гетерогенными покрытиями. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
4. *Бакулин В.Н.* Уточненная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных конических оболочек // Доклады академии наук. 2017. Т. 472. № 3. С. 272–277.
5. *Бакулин В.Н.* Эффективная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы // Доклады академии наук. 2018. Т. 478. № 2. С. 148–152.
6. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
7. *Бакулин В.Н.* Метод конечных элементов для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек. М.: ЦНИИ информации, 1985. 140 с.
8. *Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. Киев: Вища школа, 1986. 191 с.
9. *Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К. и др.* Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. Киев: Вища школа, 1987. 200 с.
10. *Бакулин В.Н., Рассоха А.А.* Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. М.: Машиностроение, 1987. 312 с.
11. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 284 с.
12. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
13. *Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В.* Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. М.: Физматлит, 2014. 196 с.
14. *Бакулин В.Н.* Блочная конечно-элементная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с нерегулярной структурой. Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 66–73.
15. *Бакулин В.Н.* Блочная конечно-элементная модель послойного анализа трехслойных в общем случае нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны // Доклады академии наук. 2019. Т. 484. № 1. С. 35–40.
16. *Strang G., Fix G.J.* An Analysis the Finite Element Method. Prentice-Hall, Englewood Ceiffs, N. J. 1973 = *Стренг Г., Фикс Д.* Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 349 с.
17. *Образцов И.Ф.* О некоторых перспективных прикладных проблемах механики, имеющих народнохозяйственное значение // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 4. С. 3–9.
18. *Бакулин В.Н., Каледин Вл.О.* Конечный элемент круговой арки с конечной сдвиговой жесткостью // Механика композитных материалов. 1988. № 5. С. 915–919.

19. *Бакулин В.Н., Каледин Вл.О.* О подходе к построению конечно-элементной аппроксимации для эффективного решения задач теории слоистых оболочек // 3-я Всесоюзная конференция Механика неоднородных структур. Львов. Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР. 1991. С. 17.
20. *Каледин Вл.О., Шпиталь С.В.* Выбор расчетной схемы при исследовании осесимметричного краевого эффекта в трехслойных цилиндрических оболочках с легким заполнителем // Механика композиционных материалов. 1993. № 5. С. 657–665.
21. *Бакулин В.Н.* Аппроксимации для моделирования напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических оболочек // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 6. С. 101–105.
22. *Бакулин В.Н.* Конечно-элементная модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. № 1. С. 3–9.
23. *Образцов И.Ф., Бакулин В.Н.* Уточненные модели для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек // Доклады академии наук. 2006. Т. 407. № 1. С. 36–39.
24. *Ashwell D.G., Sabir A.B.* A new cylindrical shell finite element, based on simple independent strain functions // International Journal of Mechanical Sciences. 1972. V. 14. № 3. P. 171–183.
25. *Бакулин В.Н., Демидов В.И.* Трехслойный конечный элемент естественной кривизны // Изв. вузов. Машиностроение. 1978. № 5. С. 5–10.
26. *Sabir A. B.* Strain-based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders // Nuclesr Engineering and Design. 1983. V. 76. № 2. P. 111–120.
27. *Bakulin V.* Dicrete elements family for cilindrical shells refined calculation. Mathematical methods in engineering. V.1. Karlovy Vary. 1986. 200 c.
28. *Бакулин В.Н.* Построение аппроксимаций для моделирования напряженно-деформированного состояния несущих слоев и слоев заполнителя трехслойных неосесимметричных цилиндрических оболочек // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. № 8. С. 101–110.
29. *Бакулин В.Н.* Построение аппроксимаций и моделей для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных неосесимметричных цилиндрических оболочек // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 12. С. 118–128.
30. *Бакулин В.Н.* Эффективные модели для уточненного анализа деформированного состояния трехслойных не осесимметричных цилиндрических оболочек // Доклады академии наук. 2007. Т. 414. № 5. С. 613–617.
31. *Бакулин В.Н.* Тестирование конечно-элементной модели, предназначенной для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых нерегулярных оболочек // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 8. С. 121–128.
32. *Бакулин В.Н.* Неклассические уточненные модели в механике трехслойных оболочек // Вест. Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 4. Ч. 5. С. 1989–1991.
33. *Cantin G., Glagh R.W.* A curved, cylindrical shell finite element. AIAA Journal, V. 6. № 6. 1968. = *Кантин Д., Клаф Р.* Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 6. С. 82–88.
34. *Железнов Л.П., Кабанов В.В.* Функции перемещений конечных элементов оболочки вращения как твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 1. С. 131–136.
35. *Репинский В.В.* Эффективные конечные элементы для расчета устойчивости тонких анизотропных оболочек вращения // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Вып. 1 (117). 1997. С. 3–7.
36. *Бакулин В.Н., Репинский В.В.* Конечно-элементные модели деформации однослойных и трехслойных конических оболочек // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 6. С. 39–46.
37. *Бакулин В.Н.* Уточненная модель для расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек вращения // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18. № 2. С. 211–218.
38. *Бакулин В.Н.* Послойный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с вырезами // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 131–145.

39. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
40. *Бакулин В.Н., Репинский В.В.* Моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек вращения // Материалы XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2011), 25–31 мая 2011 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. С. 294–297.
41. *Бакулин В.Н., Репинский В.В.* Сравнение конечно-элементного решения с аналитическим в задачах механики деформирования сферических оболочек. Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), посвященной памяти академика Ю.А. Рыжова. 24–31 мая 2018 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2018. С. 338–340.
42. *Виноградов Ю.И., Константинов М.В.* Расчет сферического бака при локальном воздействии // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 109–120.
43. *Бакулин В.Н., Кривцов В.С., Рассоха А.А.* Алгоритм получения матрицы жесткости конечного элемента анизотропной оболочки // Изв. вузов. Авиационная техника. 1983. № 4. С. 14–18.
44. *Бакулин В.Н.* Модель для уточненного расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных конических нерегулярных оболочек // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 2. С. 315–327.