ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 2, с. 10–21

УДК 539.37

ОБ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ МЕХАНИЗМАХ ПРОИЗВОДСТВА БОЛЬШИХ НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В УСЛОВИЯХ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Л. В. Ковтанюк[a],*, Г.Л. Панченко[a]

[a] *Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия*
**e-mail: lk@iacp.dvo.ru*

Поступила в редакцию 15.07.2019 г.
После доработки 10.08.2019 г.
Принята к публикации 04.09.2019 г.

В рамках теории больших деформаций получено решение задачи о деформировании материала с нелинейными упругими, пластическими и вязкими свойствами, находящегося в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Внешняя поверхность остается неподвижной, а внутренняя прямолинейно движется с переменной скоростью. При равноускоренном движении поверхности первоначально необратимые деформации накапливаются за счет вязких свойств материала в качестве деформаций ползучести, а при выходе напряженного состояния на поверхность нагружения рассмотрено возникновение и развитие области вязкопластического течения. Исследовано дальнейшее развитие течения при постоянной скорости и его торможение при равнозамедленном движении поверхности до полной остановки. Рассчитаны параметры напряженно-деформированного состояния среды, исследована релаксация напряжений после полной остановки цилиндра.

Ключевые слова: большие деформации, ползучесть, упругость, вязкость, пластичность, релаксация напряжений

DOI: 10.31857/S0572329920020099

1. Введение. Исследование посвящено изучению процессов интенсивного деформирования материалов, когда накапливаемые ими необратимые деформации могут быть как деформациями ползучести, так и пластичности. Примером такого технологического процесса может служить холодная формовка [1], когда необратимые деформации накапливаются за счет медленного процесса ползучести, однако, это не исключает возникновение локальных областей пластического течения обычно в местах контакта деформируемого материала с оснасткой. Наличие таких областей приводит к значительному перераспределению полей напряжений и, следовательно, влияет на процесс ползучести. Таким образом, при моделировании таких процессов необходимо использовать теорию ползучести при одновременном учете возможностей возникновения и развития зон пластического течения. Учет же упругих деформаций позволяет при этом рассчитывать упругий отклик при разгрузке, в том числе остаточные напряжения и их релаксацию после полной разгрузки.

Учитывая, что в большинстве технологических процессов приобретаемые материалом деформации, как правило, большие, соответствующая модель должна быть моделью больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами.

Математических моделей больших упругопластических деформаций предложено достаточно много [2–13]. Здесь будем использовать математическую модель, в которой обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями изменения [9, 12]. Обобщение модели на случай, когда большие необратимые деформации последовательно накапливаются сначала в условиях ползучести и потом пластического течения проведено недавно [14, 15]. Предложено разделять накапливаемые в материале необратимые деформации на деформации ползучести и пластического течения механизмом их производства. Таким образом, уравнение изменения необратимых деформаций является одним и тем же и для деформаций ползучести, и пластичности, различие заключается только в задании источника необратимых деформаций. Для деформаций ползучести источником являются скорости деформаций ползучести, а для пластических деформаций – скорости пластических деформаций. На упругопластических границах изменяется механизм накопления необратимых деформаций с вязкого на пластический и наоборот. Непрерывность в таком росте необратимых деформаций обеспечивается соответствующим заданием потенциалов ползучести и пластичности.

Первые решения краевых задач, учитывающих последовательное накопление необратимых деформаций ползучести и пластичности в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций, получены в [15, 16], без учета вязкости при пластическом течении подобный подход в случае малых деформаций применялся в [17]. Здесь с использованием модели больших деформаций с последовательным изменением в механизме накопления необратимых деформаций приведем решение краевой задачи об антиплоском деформировании цилиндрического слоя в условиях ползучести с последующим пластическим течением.

2. Основные модельные соотношения. В прямоугольной системе пространственных декартовых координат Эйлера x_i кинематика среды задается соотношениями [12]

$$
\begin{gathered}
d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj} \\
\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj})) \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj} \\
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
r_{ij} = w_{ij} + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \\
z_{ij} = A_1^{-1}((\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})A_2^2 + (\varepsilon_{ik}e_{ks}e_{sj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{sj})A_2 + e_{ik}\varepsilon_{ks}e_{st}e_{tj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{st}e_{tj}) \\
A_1 = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad A_2 = 2 - E_1 \\
E_1 = e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скорости точек среды; d_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} и p_{ij} – их обратимая и необратимая составляющие; D/Dt – оператор используемой объективной производной тензоров по времени, которая записана для произвольного тензора n_{ij}; r_{ij} – компоненты тензора вращений. Источники γ_{ij} и $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij}$ в уравнениях изменения обратимых и необратимых деформаций – скорости их накопления. При $\gamma_{ij} = 0$ компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так же, как и при повороте системы координат или, как при движении среды без деформирования, т.е. $Dp_{ij}/Dt = 0$. Тензор вращений r_{ij} отличается от классического тензора вихря скорости w_{ij} наличием нелинейной части z_{ij}. Отметим, что при равенстве нулю составляющей z_{ij} тензора вращений r_{ij} производная в (2.1) переходит в производную Яумана.

Как и в работах [9, 12] полагаем, что используемый термодинамический потенциал (плотность распределения свободной энергии ψ) является изотропной функцией только обратимых деформаций. Тогда согласно закону сохранения энергии напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и связаны с ними формулой, аналогичной формуле Мурнагана в нелинейной теории упругости [18, 19]. Для несжимаемой среды данное соотношение примет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}\left(\delta_{kj} - e_{kj}\right) \tag{2.2}$$

В соотношении (2.2) σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера–Коши, p – неизвестная функция добавочного гидростатического давления. Для упругого потенциала $W = \rho_0\psi$ (ρ_0 – плотность) принимаем его разложение в ряд Маклорена относительно свободного состояния

$$\begin{gathered} W = -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b-\mu)\, I_1 I_2 - \chi I_1^3 + \ldots \\ I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{ks}e_{sk}, \quad I_2 = e_{ks}e_{sk} - e_{ks}e_{st}e_{tk} + \frac{1}{4}e_{ks}e_{st}e_{tn}e_{nk} \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь μ – модуль сдвига; b, χ – постоянные материала.

Диссипативный механизм необратимого деформирования связан с реологическими и пластическими свойствами материала. Будем считать далее, что необратимые деформации накапливаются с начала процесса деформирования и первоначально связаны с процессом ползучести материала.

В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести, или, где пластическое течение было, но прекратилось, соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим в форме степенного закона ползучести Нортона [20], в котором полагаем скорости необратимых деформаций γ_{ij} равными скоростям деформаций ползучести ε_{ij}^v

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max\left|\sigma_i - \sigma_j\right|, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.4}$$

В зависимостях (2.4) $V\left(\sigma_{ij}\right)$ – термодинамический потенциал; σ_1, σ_2, σ_3 – главные значения тензора напряжений; B, n – параметры ползучести материала.

С течением времени напряженное состояние достигает поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования меняется и в материале начинается пластическое течение. В таком случае в области пластического течения полагаем $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$. Без разделения необратимых деформаций на составляющие будем считать, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести (2.4) являются начальными значениями для накапливающихся далее в области течения пластических деформаций. В случае учета вязких свойств среды при пластическом течении также требуется совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования с вязкого на пластический.

Согласно принципу максимума Мизеса связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^{p} с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\alpha_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad F(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = k, \quad \lambda > 0, \quad \alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}^{p} - \varepsilon_{ij}^{v_0}$$

где $\varepsilon_{ij}^{v_0}$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения.

В качестве пластического потенциала будем использовать условие текучести Треска, обобщенное на случай учета вязких свойств материала

$$\max\left|\sigma_i - \sigma_j\right| = 2k + 2\eta \max\left|\alpha_n\right| \tag{2.5}$$

в котором α_n – главные значения тензора α_{ij}, k – предел текучести, η – коэффициент вязкости.

3. Постановка и решение задачи до вязкопластического течения. Пусть слой несжимаемого материала расположен в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями радиусов r_0 и R ($r_0 < R$). Рассмотрим процесс деформирования слоя при прямолинейном движении внутренней поверхности и неподвижности внешней поверхности. Считаем, что на цилиндрических стенках выполняются условия прилипания. Тогда в цилиндрической системе координат r, φ, z граничные условия задачи примут вид

$$v\big|_{r=R} = 0, \quad u\big|_{r=R} = 0, \quad v\big|_{r=r_0} = v_0, \quad u\big|_{r=r_0} = u_0 = \int_0^t v_0\,dt, \quad \sigma_{rr}\big|_{r=R} = a_0 \tag{3.1}$$

Здесь $v = v_z(r,t)$, $u = u_z(r,t)$ – единственные отличные от нуля компоненты векторов скорости и перемещения соответственно, $v_0 = v_0(t)$, a_0 – задаваемые функция и постоянная. Из соотношений (2.1) в данном случае установим, что кинематика среды описывается зависимостями

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{rz} = -w_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r_{rz} = \frac{2\varepsilon_{rz}(1 - e_{zz})}{e_{rr} + e_{zz} - 2} \tag{3.2}$$

В задачах данного класса диагональные компоненты тензоров деформаций являются малыми более высокого порядка по сравнению с недиагональными компонентами [21–24], поэтому в дальнейшем ограничимся слагаемыми первого порядка по диагональным компонентам и второго – по недиагональным. Принятое ограничение не является принципиальным для решения задачи и вводится с целью значительного упрощения вычислений. Из соотношений (2.2) и (2.3) в рассматриваемом случае найдем напряжения в среде

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr} = -(p + 2\mu) + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{zz} + \mu e_{rz}^2 = -P + 2\mu e_{rr} \\
\sigma_{\varphi\varphi} = -(p + 2\mu) + 2b(e_{rr} + e_{zz}) - 2\mu e_{rz}^2 = -P - 3\mu e_{rz}^2 \\
\sigma_{zz} = -(p + 2\mu) + 2(b + \mu)e_{zz} + 2be_{rr} + \mu e_{rz}^2 = -P + 2\mu e_{zz} \\
\sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}, \quad \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{zz}}{\sigma_{rz}} = \frac{e_{rr} - e_{zz}}{e_{rz}}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

В рамках квазистатического приближения запишем уравнения равновесия для рассматриваемого случая

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=0 \tag{3.4}$$

Проинтегрируем уравнения (3.4) в предположении, что напряжения конечны, т.е. $\partial P/\partial z=0$:

$$\sigma_{rz}=\frac{c(t)}{r},\quad e_{rz}=\frac{c(t)}{2\mu r},\quad P=f(r,t) \tag{3.5}$$

Для компонент тензоров деформаций и скоростей деформаций из (2.1) справедливы соотношения

$$\begin{gathered}
d_{rz}=e_{rz}+p_{rz},\quad \varepsilon_{rz}=\frac{\partial e_{rz}}{\partial t}+\frac{\partial p_{rz}}{\partial t}=\varepsilon_{rz}^{e}+\gamma_{rz}\\
\frac{\partial p_{zz}}{\partial t}=-\gamma_{rz}\frac{p_{zz}-e_{rz}^2}{e_{rz}}+\frac{4\varepsilon_{rz}p_{rz}}{2+e_{rz}^2}\left(1+p_{zz}-\frac{1}{2}e_{rz}^2-2e_{rz}p_{rz}\right)\\
e_{rr}=p_{zz}-\frac{3}{2}e_{rz}^2-2e_{rz}p_{rz},\quad p_{rr}+p_{zz}=-2p_{rz}^2,\quad e_{rr}+e_{zz}=-e_{rz}^2
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Считаем, что при увеличении скорости движения внутреннего цилиндра необратимые деформации первоначально накапливаются за счет медленного процесса ползучести.

Потенциал $V(\sigma_{ij})$ в соотношении (2.4) в цилиндрической системе координат принимает форму

$$V(\sigma_{ij})=B(4\sigma_{rz}^2+(\sigma_{rr}-\sigma_{zz})^2)^{n/2}$$

В данном потенциале ограничимся слагаемыми до порядка n по напряжениям вследствие замечания, описанного перед зависимостями (3.3). Тогда для скоростей деформаций ползучести и компоненты p_{rz} из формул (2.4), (3.3), (3.5) и (3.6) получим соотношения

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{rz}^{v}=f_1(c^{n-1},r),\quad \varepsilon_{rr}^{v}=-\varepsilon_{zz}^{v}=\frac{\varepsilon_{rz}^{v}}{2}\frac{e_{rr}-e_{zz}}{e_{rz}},\quad f_1(c^{n-1},r)=(-1)^n2^{n-1}Bn\frac{c^{n-1}}{r^{n-1}}\\
p_{rz}=f_1(c_1,r),\quad c_1(t)=\int_0^t c^{n-1}dt,\quad c=(\dot c_1)^{\frac{1}{n-1}}
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Из зависимостей (3.2), (3.5)–(3.7) и условия прилипания (3.1) на поверхности $r=R$ следуют соотношения для скорости и перемещения

$$\begin{gathered}
v=f_2(\dot c,r,R)+f_3(c^{n-1},r,R),\quad u=f_2(c,r,R)+f_3(c_1,r,R)\\
f_2(c,r,R)=\frac{c}{\mu}\ln\frac{r}{R},\quad f_3(c_1,r,R)=\frac{(-1)^n2^nBnc_1}{2-n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right)
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Здесь и далее точка сверху означает производную по времени.

С учетом граничных условий (3.1) на внутренней стенке $r=r_0$ из (3.8) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $c_1(t)$

$$\dot c_1=f_2^{1-n}(1,r_0,R)(u_0+f_3(c_1,r_0,R))^{n-1},\quad c_1(0)=0 \tag{3.9}$$

Дифференциальное уравнение (3.9) и система (3.6) решаются численно в пакете Wolfram Mathematica. Компонента напряжений σ_{rr} находится из первого уравнения равновесия (3.4) с использованием краевого условия из (3.1). Далее из соотношений (3.3) определяются добавочное гидростатическое давление P и компоненты тензора напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz}.

При возрастающей скорости движения внутреннего цилиндра v_0 полученное решение задачи будет справедливым до некоторого момента времени $t = t_0$, при котором в окрестности внутренней стенки $r = r_0$ выполнится условие пластичности (2.5), в нашем случае принимающее вид $\sigma_{rz}\big|_{r=r_0} = -k$. Из первого соотношения (3.5) получим уравнение для определения момента времени $t = t_0$, в который начнется вязкопластическое течение: $c(t_0) = -kr_0$.

4. Вязкопластическое течение. Развивающаяся с момента времени $t = t_0$ область вязкопластического течения $r_0 \le r \le m(t)$ ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = m(t)$. В области $m(t) \le r \le R$ по-прежнему происходит вязкоупругое деформирование, то есть поверхность $r = m(t)$ является движущейся границей области вязкопластического течения.

В области $m(t) \le r \le R$ интегрированием уравнений равновесия (3.4) в условиях прилипания (3.1) на поверхности $r = R$ установим, что продолжают выполняться зависимости (3.5) с неизвестной функцией интегрирования $c(t)$. Также в этой области остаются верными соотношения (3.7) и (3.8).

Интегрируя уравнения равновесия в области вязкопластического течения $r_0 \le r \le m(t)$ и используя условие непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $r = m(t)$, получим, что в этой области также выполняются зависимости (3.5).

Пластический потенциал (2.5) в нашем случае запишется в следующей форме

$$\sigma_{rz} = -k + \eta(\varepsilon_{rz}^{p} - \varepsilon_{rz}^{v_0}), \quad \varepsilon_{rz}^{v_0} = -2^{n-1}k^{n-1}Bn \tag{4.1}$$

Из соотношения (4.1) определим скорость пластических деформаций

$$\varepsilon_{rz}^{p} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{c(t)}{r} + k\right) - 2^{n-1}k^{n-1}Bn \tag{4.2}$$

Из условия совпадения скоростей необратимых деформаций на упругопластической границе $r = m(t)$ из (4.2) найдем

$$c(t) = -km(t)$$

Из зависимостей (3.2), (3.5), (3.7), (4.2) и граничного условия для скорости на поверхности $r = r_0$ (3.1), найдем скорость в области вязкопластического течения

$$\begin{gathered} v = f_2(\dot{c}, r, r_0) + f_4(c, r, r_0) + v_0 \\ f_4(c, r, r_0) = \frac{2}{\eta}\left(c(t)\ln\frac{r}{r_0} + k(r - r_0)\right) - 2^{n}k^{n-1}Bn(r - r_0) \end{gathered} \tag{4.3}$$

Положение упругопластической границы $r = m(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением, следующим из (3.8), (4.3) и условия непрерывности скоростей точек среды на этой границе

$$f_2(-k\dot{m}, r_0, R) + f_3((-km)^{n-1}, m, R) - f_4(-km, m, r_0) = v_0 \tag{4.4}$$

В области вязкоупругого деформирования $m(t) \le r \le R$ для необратимых и обратимых деформаций остаются справедливыми уравнения (3.6).

Интегрируя скорость пластических деформаций ε_{rz}^{p} (4.2) по времени с учетом (3.5) и (3.7), найдем компоненту необратимых деформаций p_{rz} в области течения $r_0 \le r \le m(t)$

$$p_{rz} = f_5(t,r) + g(r), \quad f_5(t,r) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{c_2(t)}{r} + kt\right) - (2k)^{n-1} Bnt, \quad c_2(t) = \int_{t_0}^{t} c(t)dt \tag{4.5}$$

Здесь $g(r)$ – неизвестная функция интегрирования, которую найдем из условия непрерывности необратимых деформаций (3.7) и (4.5) на продвигающейся упругопластической границе:

$$g(r) = f_1(c_1(\zeta),r) - f_5(\zeta,r)$$

в которой функция $\zeta = \zeta(r)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\zeta'(f_3((-kr)^{n-1},r,R) - f_4(-kr,r,r_0) - v_0(\zeta)) = f_2(k,r_0,R), \quad \zeta(r_0) = t_0 \tag{4.6}$$

Для компонент обратимых и необратимых деформаций в области вязкопластического течения $r_0 \le r \le m(t)$ справедлива система (3.6).

Учитывая соотношения (3.2), (3.5), (3.6), (4.5) и условие непрерывности перемещений на упругопластической границе $r = m(t)$, найдем выражение для перемещений в области вязкопластического течения

$$u = f_2(c,r,R) + f_3(c_1,m,R) + tf_4(t^{-1}c_2,r,m) + 2\int_{m}^{r} g(r)dr$$

При движении внутреннего цилиндра с постоянной скоростью с момента времени $t = t_1 > t_0$ область вязкопластического течения продолжает развиваться согласно закону (4.4). Полученное выше решение остается верным как в области $r_0 \le r \le m(t)$, так и в области $m(t) \le r \le R$. Изменение в краевом условии приведет только к изменению функции $\zeta(r)$: в области $m(t_1) \le r \le m(t)$ она теперь определяется из дифференциального уравнения

$$\zeta'(f_3((-kr)^{n-1},r,R) - f_4(-kr,r,r_0) - v_0(t_1)) = f_2(k,r_0,R), \quad \zeta(m(t_1)) = t_1 \tag{4.7}$$

в то время как в области $r_0 \le r \le m(t_1)$ по-прежнему является решением уравнения (4.6)

5. Торможение вязкопластического течения и разгрузка среды. Не приводит к существенным изменениям в процессе деформирования и первоначальное уменьшение скорости движения внутренней поверхности, начиная с момента времени $t = t_2 > t_1$. В отличие от случая, когда цилиндр движется с постоянной скоростью, функция $\zeta(r)$ в области $r_0 \le r \le m(t_1)$ находится из уравнения (4.6), в области $m(t_1) \le r \le m(t_2)$ – из (4.7), а в области $m(t_2) \le r \le m(t)$ снова из (4.6) с граничным условием $\zeta(m(t_2)) = t_2$.

В расчетный момент времени $t = t_3 > t_2$ рост области вязкопластического течения прекращается. Появляется новая граница $r = m(t)$, движущаяся от стационарной поверхности $r = m(t_3)$ к внутренней поверхности $r = r_0$ и отделяющая уменьшающуюся область течения $r_0 \le r \le m(t)$ от области разгрузки $m(t) \le r \le m(t_3)$, в которой, как и в области $m(t_3) \le r \le R$, теперь накапливаются необратимые деформации ползучести.

В области вязкоупругого деформирования $m(t_3) \le r \le R$ и в области течения $r_0 \le r \le m(t)$ остаются верными соотношения, справедливые в интервале времени $t_2 \le t \le t_3$.

В области $m(t) \le r \le m(t_3)$ для компонент напряжений и скоростей необратимых деформаций выполняются соотношения (3.5) и (3.6).

Из (3.2), (3.5), (3.7) и условия непрерывности скорости на упругопластической границе $r = m(t_3)$ установим, что в области $m(t) \le r \le m(t_3)$ скорость вычисляется из первой зависимости (3.8).

Из условия непрерывности скоростей на упругопластической границе $r = m(t)$ получим уравнение ее изменения вида (4.4).

Интегрируя зависимость (3.7) по времени в области разгрузки $m(t) \le r \le m(t_3)$, получим соотношение для компоненты необратимых деформаций в этой области

$$p_{rz} = f_1(c_1, r) + g_1(r) \tag{5.1}$$

В выражении (5.1) неизвестную функцию интегрирования $g_1(r)$ найдем из условия непрерывности необратимых деформаций на упругопластической границе $r = m(t)$

$$g_1(r) = f_1(c_1(\zeta), r) + f_5(\zeta, r) + g(r) \tag{5.2}$$

Здесь функция $\zeta = \zeta(r)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (4.6) с начальным условием $\zeta(m(t_3)) = t_3$.

Интегрируя второе уравнение (3.2) в области $m(t) \le r \le m(t_3)$ с учетом соотношений (3.5), (3.6), (5.1) и условия непрерывности перемещений на границе $r = m(t_3)$, найдем компоненту перемещений

$$u = f_2(c, r, R) + f_3(c_1, r, R) + 2\int_{m(t_3)}^{r} g_1(r)dr \tag{5.3}$$

В области $r_0 \le r \le m(t)$ из второго уравнения (3.2) с учетом (3.5), (3.6), (4.5) и условия непрерывности перемещений на границе $r = m(t)$ найдем

$$u = f_2(c, r, R) + f_3(c_1, m, R) + tf_4(t^{-1}c_2, r, m) + 2\int_{m}^{r} g(r)dr + 2\int_{m(t_3)}^{m} g_1(r)dr \tag{5.4}$$

В момент времени $t = t_4 > t_3$ внутренний цилиндр остановится ($v_0(t_4) = 0$). Скорость в области вязкопластического течения $r_0 \le r \le m(t)$ будет вычисляться зависимостью

$$v = f_2(\dot{c}, r, r_0) + f_4(c, r, r_0)$$

Уравнение для вычисления положения упругопластической границы $r = m(t)$ примет форму

$$f_2(-k\dot{m}, r_0, R) + f_3((-km)^{n-1}, m, R) - f_4(-km, m, r_0) = 0$$

В области $m(t_3) \le r \le R$ компонента необратимых деформаций вычисляется из (4.5), в области $m(t) \le r \le m(t_3)$ – из (5.1). Функция $g_1(r)$ имеет вид (5.2), в котором $\zeta = \zeta(r)$ в области $m(t_k) \le r \le m(t_3)$ находится из уравнения (4.6) с начальным условием $\zeta(m(t_2)) = t_2$, а в области $m(t) \le r \le m(t_k)$ вычисляется из уравнения

$$\zeta'(f_2((-kr)^{n-1}, r, R) - f_4(-kr, r, r_0)) = f_1(k, r_0, R), \quad \zeta(m(t_4)) = t_4$$

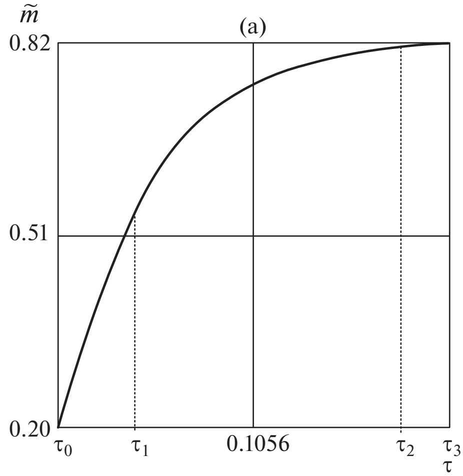

Рис. 1

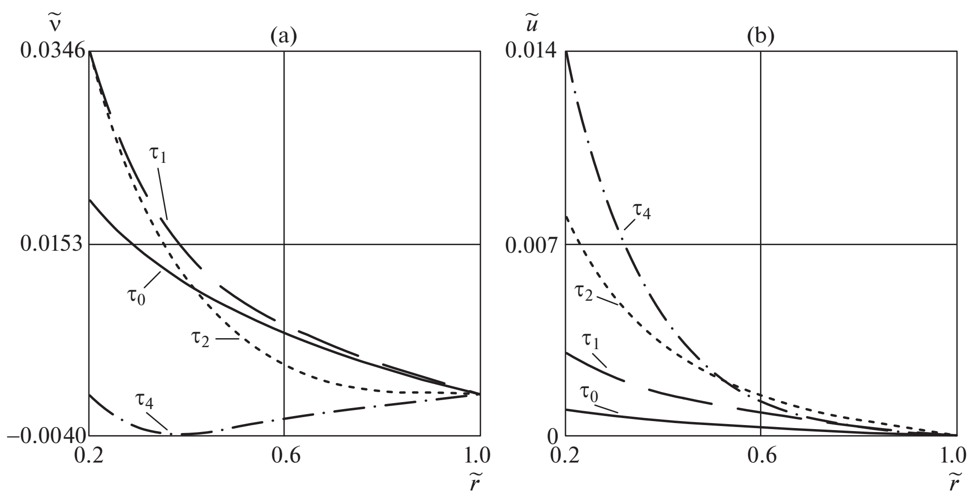

Рис. 2

Для перемещений в областях $m(t) \le r \le m(t_3)$ и $r_0 \le r \le m(t)$ продолжают выполняться зависимости (5.3) и (5.4).

В некоторый момент времени $t = t_5$ упругопластическая граница $r = m(t)$ совпадет с внутренней поверхностью $r = r_0$ и вязкопластическое течение в цилиндрическом слое прекратится. Для скорости во всем слое будет выполняться первое соотношение (3.8), в котором функция $c(t)$ примет вид

$$c(t) = \left(\ln\frac{r_0}{R}\left(R^{n-2}\ln\frac{r_0}{R} + 2^n Bnk^{n-2}\mu(r_0^{n-2} - R^{n-2})(t - t_4)\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{n-2}}$$

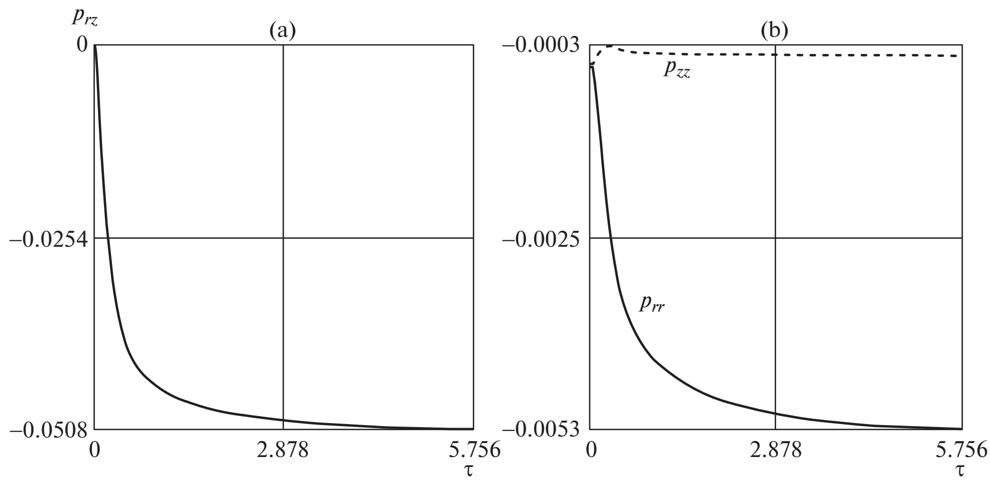

Рис. 3

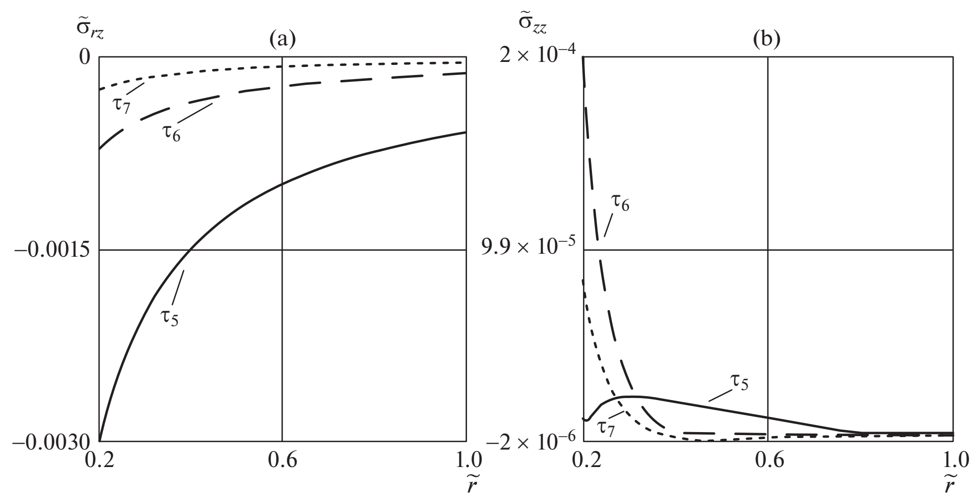

Рис. 4

Перемещения в областях $m(t_3) \le r \le R$ и $r_0 \le r \le m(t_3)$ вычисляются соотношениями (3.8) и (5.3) соответственно.

Функция v_0 при расчетах была выбрана следующим образом:

$$v_0 = \begin{cases} \xi_1 t, \quad 0 \le t \le t_1 \\ \xi_1 t_1, \quad t_1 \le t \le t_2 \\ \xi_1 t_1 - \xi_2 (t - t_2), \quad t_2 \le t \le t_4 \\ 0, \quad t \ge t_4 \end{cases}$$

Расчеты проводились в безразмерных переменных $\tilde{r} = r/R$, $\tau = \xi_1 t^2 / r_0$ при следующих значениях постоянных параметров $k/\mu = 0.003$, $r_0/R = 0.2$, $n = 3$, $B\mu^2\sqrt{r_0/\xi_1} = 3$,

$\xi_2/\xi_1 = 0.5$, $(\mu/\eta)\sqrt{r_0/\xi_1} = 10$, $a_0 = 10^{-6}$. График упругопластической границы $\tilde{m} = m/R$ в интервале от $\tau_0 = 0.0097$ до $\tau_3 = 0.1121$ представлен на рис. 1a, в интервале от τ_3 до $\tau_5 = 5.756$ – на рис. 1b. Отметим, что $\tau_1 = 0.03$, $\tau_2 = 0.1$, $\tau_4 = 0.4391$. Распределения скоростей и перемещений точек среды по слою в разные моменты времени показаны на рис. 2a и рис. 2b соответственно. Рисунок 3 иллюстрирует изменение необратимых деформаций в точках внутренней поверхности $r = r_0$ в интервале $0 \le \tau \le \tau_5$. Релаксация компонент напряжений σ_{rz} и наибольшего из диагональных σ_{zz} показана на рис. 4a и рис. 4b соответственно ($\tau_6 = 1000$, $\tau_7 = 10000$).

6. Заключение. Построено решение задачи о деформировании материала цилиндрического слоя, происходящем при прямолинейном равноускоренном движении внутреннего цилиндра, его последующем движении с постоянной скоростью и равнозамедленном движении до полной остановки, в то время как внешний цилиндр остается неподвижным. В условиях жесткого сцепления материала с граничными стенками рассмотрен случай, когда накапливаемые необратимые деформации являются и деформациями ползучести, и пластичности. Исследовано продвижение упругопластической границы, разделяющей области с разными действующими законами накопления необратимых деформаций, рассчитаны параметры напряженно-деформированного состояния среды, проведено наблюдение за релаксацией напряжений, происходящей после остановки цилиндра.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (18-01-00038).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Олейников А.И., Пекарш А.И.* Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. М.: Эком, 2009. 109 с.
2. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME. Sr. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. I. 1. P. 1–6.
3. *Кондауров В.И.* Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
4. *Nemat-Nasser S.* On finite deformation elasto-plasticity // Int. J. Solids and struct. 1982. V. 18. I. 10. P. 857–872.
5. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наук. думка, 1987. 232 с.
6. *Быковцев Г.А., Шитиков А.В.* Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
7. *Xia Z., Ellyin F.* A finite elastoplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardening rule // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1995. V. 62. I. 3. P. 733–739.
8. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
9. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996.Т. 347. № 2. С. 199–201.
10. *Чернышов А.Д.* Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 120–128.
11. *Роговой А.А.* Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 5. С. 138–149.
12. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последействие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
13. *Shutov A.V., Ihlemann J.* Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticityin view of reference change // Internat. J. Plasticity. 2014. V. 63. P. 183–197.

14. *Белых С.В., Бормотин К.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Прокудин А.Н.* О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2014. Т. 22. № 4. С. 145–157.
15. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Докл. АН. 2016. Т. 470. № 3. С. 275–278.
16. *Бегун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О.* Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 103–112.
17. *Буренин А.А., Галимзянова К.Н., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л.* О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 4. С. 403–406.
18. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
19. *Годунов С.К., Роменский Е.А.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Науч. книга, 1998. 280 с.
20. *Norton F.H.* The creep steel of high temperature. Y.: Mc Gpaw Hill, 1929. 110 p.
21. *Ковтанюк Л.В.* О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // Докл. АН. 2005. Т. 400. № 6. С. 764–767.
22. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Развитие и торможение течения упруговязкопластической среды в цилиндрической трубе // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 5. С. 788–798.
23. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л.* Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Докл. АН. 2015. Т. 464. № 3. С. 284–287.
24. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л.* Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 6–18.