

УДК 539.3

ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

© 2020 г. Е. В. Ломакин^{a,b,*}, Н. Г. Минаев^{a,**}

^aМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bМосковский авиационный институт, Москва, Россия

*e-mail: evlomakin@yandex.ru

**e-mail: nickita3@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.01.2020 г.

После доработки 24.01.2020 г.

Принята к публикации 30.01.2020 г.

Проведен анализ свойств определяющих соотношений теории пластичности для пористых сред с использованием критерия пластичности Грина. Показано, что данный критерий является по своей форме одним из возможных критериев пластичности для материалов с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами, с той лишь разницей, что коэффициенты зависят от параметра пористости. Поэтому условие пластичности может быть представлено в соответствующем обобщенном виде с использованием параметра вида напряженного состояния, представляющего собой отношение гидростатической компоненты напряжений к эффективному напряжению Мизеса, названного в литературе трехосностью напряжений. Получено полуаналитическое решение задачи о пространстве с цилиндрическим отверстием в условиях плоской деформации. Проведено сравнение распределения напряжений на основе полученного решения с распределением напряжений в аналогичной задаче для сплошного тела, пластические свойства которого инвариантны к виду напряженного состояния. Исследовано влияние пористости на распределение напряжений и размер пластической области.

Ключевые слова: теория пластичности, плоская деформация, критерий Грина, пространство с цилиндрическим отверстием, распределение напряжений

DOI: 10.31857/S0572329920030083

1. Введение. Пористые материалы находят широкое применение в различных отраслях современного машиностроения и позволяют создавать легкие и достаточно прочные конструкции, обладающие высокими характеристиками абсорбирования энергии. Поэтому исследование характерных особенностей распределения напряжений в окрестности различных отверстий имеет важное значение и в этом заключается основная цель настоящей работы.

Изучению влияния неоднородности структуры данных конструкционных материалов на их деформационные, пластические и прочностные свойства посвящены исследования многих авторов [1–5]. При формулировке условий пластичности в большинстве моделей влиянием третьего инварианта тензора напряжений пренебрегали и поверхность текучести представлялась в виде функции второго инварианта девиатора напряжений и первого инварианта тензора напряжений, коэффициенты которой зависели от параметра пористости, представляющего собой отношение объема пустот к общему объему материала [1, 6–10]. При квадратичной зависимости условия текуче-

сти от компонентов тензора напряжений поверхность текучести в пространстве главных напряжений представляла собой поверхность вытянутого эллипсоида. Данные предположения были подтверждены результатами экспериментальных исследований, полученных в условиях трехосного сжатия различных пористых материалов. Для анализа поведения грунтов часто используется линейная зависимость между вторым инвариантом девиатора напряжений и первым инвариантом напряжений. При этом поверхность текучести представляет собой коническую поверхность [11]. Данная модель находит широкое применение при решении многих практически важных задач.

Поведение неоднородностей существенным образом зависит от вида внешних воздействий, поэтому механические характеристики неоднородных материалов, включая пористые, зависят от вида напряженного состояния, создаваемого в телах при нагружении [12, 13]. Исследована зависимость деформационных и прочностных характеристик пористых алюминиевых сплавов, полимеров, конструкционных графитов и других материалов от пористости и структурных особенностей [6–10, 14].

В данной работе получено полуаналитическое решение задачи о круговом отверстии под действием внутреннего давления в пористой среде для случая плоской деформации. Решение получено для жесткопластической среды в пренебрежении упругими деформациями с использованием условия пластичности Грина [1]. Поскольку при формулировке данного условия пластичности считалось, что его коэффициенты зависят от пористости среды, то для получения аналитических зависимостей рассматривалось предельное состояние среды с некоторым определенным значением параметра пористости.

2. Определяющие соотношения. В работе [12] показано, что условие пластичности для материалов с зависящими от вида напряженного состояния свойствами, к которым относятся и пористые материалы, может быть представлено в следующем обобщенном виде:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k \quad (2.1)$$

В таком виде могут быть представлены многие из известных условий пластичности. Здесь параметр $\xi = \sigma/\sigma_0$ характеризует соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды, где $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее нормальное напряжение, а $\sigma_0 = \sqrt{3/2S_{ij}S_{ij}}$ – эффективное напряжение, которое определяет среднюю величину касательного напряжения, где $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$. Для конкретизации условия (2.1) можно принять, что при чистом сдвиге ($\xi = 0$) функция $f(0) = 1$. Тогда $k = \sqrt{3}\tau_s$, где τ_s – предел текучести при сдвиге. Функция $F(\sigma_{ij})$ из (2.1) должна быть невогнутой, т.е. $d^2F \geq 0$. Вычисляя второй дифференциал функции $F(\sigma_{ij})$ и учитывая, что $3/2S_{ij}dS_{ij} = \sigma_0d\sigma_0$, получим

$$\begin{aligned} d^2F &= \frac{\partial^2 F}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}} d\sigma_{ij}d\sigma_{kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial\sigma^2} d\sigma^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial\sigma_0^2} d\sigma_0^2 + \\ &+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial\sigma\partial\sigma_0} d\sigma d\sigma_0 + \frac{\partial F}{\partial\sigma_0} \left(\frac{3}{2} \frac{dS_{ij}dS_{ij}}{\sigma_0} - \frac{(d\sigma_0)^2}{\sigma_0} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Коэффициенты, стоящие в правой части выражения (2.2) равны

$$\begin{aligned} \partial F/\partial\sigma_0 &= -\xi f'(\xi) + f(\xi), \quad \partial^2 F/d\sigma^2 = f''(\xi)/\sigma_0, \quad \partial^2 F/\partial\sigma_0^2 = \xi^2 f''(\xi)/\sigma_0, \\ \partial^2 F/\partial\sigma\partial\sigma_0 &= -\xi f''(\xi)/\sigma_0 \end{aligned}$$

Тогда $d^2F = f''/\sigma_0 (d\sigma - \xi d\sigma_0)^2 - (f - \xi f')/\sigma_0 (d\sigma_0)^2 + (f - \xi f')/\sigma_0 3/2 dS_{ij} dS_{ij}$.

Учитывая, что $f - \xi f' = \lambda(\xi) > 0$, поскольку является коэффициентом пропорциональности в выражении для интенсивности скоростей пластических деформаций [12], и $3/2 dS_{ij} dS_{ij} \geq d\sigma_0^2$ получим $d^2F \geq f'' \frac{(d\sigma - \xi d\sigma_0)^2}{\sigma_0} \geq 0$. Из этого следует, что для обеспечения выпуклости функции $F(\sigma_{ij})$ достаточно, чтобы

$$f''(\xi) \geq 0 \tag{2.3}$$

Рассмотрим следующее выражение для функции $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha \xi^2} \tag{2.4}$$

из которого получается условие пластичности Грина $\sigma_0^2 + \alpha \sigma^2 = k^2$, которое часто используется при решении задач для пористых материалов. Параметры α и k представляют собой функции параметра пористости сплошной среды. Для выполнения условия (2.3) достаточно, чтобы $\alpha \geq 0$. Разными авторами предлагались различные аналитические зависимости для коэффициентов от пористости среды, например $1/(1 + (\alpha/3)^2)(\sigma_0^2 + \alpha^2 \sigma^2) = k$ [8]. Данный критерий позволяет учесть зависимость предела текучести от параметра пористости.

Принимая ассоциированный с условием (2.1) закон течения $\dot{\epsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij}$ в случае жесткопластического тела связь между скоростями деформаций и напряжениями можно представить в следующем виде:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = h' \left[\frac{1}{3} \Lambda(\xi) \delta_{ij} + \frac{3 \lambda(\xi) f(\xi) S_{ij}}{2k} \right] \tag{2.5}$$

где $\Lambda(\xi) = f'(\xi)$, $\lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi)$, $h' = \frac{H}{\chi(\xi)}$, $H = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$, $\chi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{3} \Lambda^2(\xi) + \frac{3}{2} \lambda^2(\xi)}$

Функции $\Lambda(\xi)$ и $\lambda(\xi)$ и их производные взаимосвязаны и для них выполняются соотношения $\lambda(\xi) + \xi \Lambda(\xi) = f(\xi)$, $\lambda'(\xi) + \xi \Lambda'(\xi) = 0$. Из (2.5) можно получить выражения для интенсивности скоростей пластических деформаций $\Gamma = \sqrt{2/3 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = h' \lambda(\xi)$, где $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - 1/3 \epsilon \delta_{ij}$ и скорости объемной деформации $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} = h' \Lambda(\xi)$. Отсюда видно, что функция $\lambda(\xi)$ должна быть положительно определена. В таком случае скорость остаточной объемной деформации пропорциональна интенсивности скоростей деформаций $\dot{\epsilon} = \Gamma \Lambda(\xi) / \lambda(\xi)$.

В общем случае коэффициент пропорциональности $\Lambda(\xi) / \lambda(\xi)$ зависит от вида напряженного состояния ξ , принимает различные значения для различных соотношений между нормальными и касательными напряжениями в сплошной среде.

3. Плоская деформация. Рассмотрим случай плоской деформации: $\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$. С помощью определяющих соотношений (2.5) можно исключить напряжение σ_{33} из условия (2.1), выразив его через $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$. Получаются следующие выражения:

$$\sigma_{33} = \sigma - \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}, \quad \sigma_0 = S_0 \left[1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda^2(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = S - \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)} \tag{3.1}$$

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Чтобы исключить из всех выражений напряжение σ_{33} , введем параметр $\zeta = S/S_0$ далее выразим ζ через ξ , используя (3.1):

$$\zeta = \left[\xi + \frac{1}{9} \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)} \right] \left[1 - \frac{1}{9} \frac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda^2(\xi)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

Тогда условие пластичности (2.1), используя (3.2) и (3.1), можно представить в следующем виде:

$$f_1(\xi) S_0 = k, \quad f_1(\xi) = f \left[\xi(\zeta) \right] \left[1 - \frac{1}{9} \frac{\Lambda_1^2(\xi)}{\lambda_1^2(\xi)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

$$\Lambda_1(\xi) = \Lambda[\xi(\zeta)], \quad \lambda_1(\xi) = \lambda[\xi(\zeta)]$$

Так как $\zeta = S/S_0 = S f_1(\xi)/k$, то ζ и напряжение S_0 можно выразить через S , а зависимость $\xi = \xi(S)$ – взаимнооднозначная при выполнении условий $3\lambda(\xi) > |\Lambda(\xi)|$, $\Lambda'(\xi) \geq 0$, при этом напряжение S_0 также можно выразить через S , $S_0 = \sqrt{3}kF(S)$, где $F(S) = 3^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1}[\zeta(S)]$. Выражения для напряжений в случае плоской деформации можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{11} = S - kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{22} = S + kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{12} = kF(S) \cos 2\theta \quad (3.4)$$

В (3.4) угол θ представляет собой угол между осью x_1 и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение. Для случая плоской деформации система уравнений, описывающая напряженное состояние, включает в себя условие пластичности (2.1) и уравнения равновесия:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \quad (3.5)$$

Подставив напряжения (3.4) в уравнения равновесия (3.5), получим систему уравнений для определения S и θ :

$$S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\theta - S_{,2} \cos 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) = 0$$

$$S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\theta + S_{,2} \sin 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) = 0 \quad (3.6)$$

В (3.6) штрихом обозначается дифференцирование по переменной S . Важно отметить, что система (3.6) является гиперболической при $|kF'| < 1$. Этот факт накладывает ограничения на значения функции, характеризующей степень чувствительности пластических свойств среды к изменению вида напряженного состояния. Выпишем характеристики системы уравнений (3.6) и обозначим их индексами α и β , а также выпишем соотношения вдоль них:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \phi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F'^2}}{-kF' + \sin 2\theta}, \quad dS \mp \frac{2kF d\theta}{\sqrt{1 - k^2 F'^2}} \quad (3.7)$$

Легко заметить, что характеристики (10) будут ортогональны только в случае, если $f(\xi) \equiv \text{const}$, когда условие (2.1) совпадает с условием пластичности Губера–Мизеса.

4. Распределение напряжений в окрестности кругового отверстия. Будем рассматривать задачу о неограниченном теле с круговым вырезом. По всему контуру выреза приложено нормальное давление, равное p . Перейдем к безразмерным величинам, для этого радиальные координаты отнесем к радиусу отверстия a , а напряжения – к k . Рассмотрим критерий пластичности (2.1) для функции $f(\xi)$, представленной выраже-

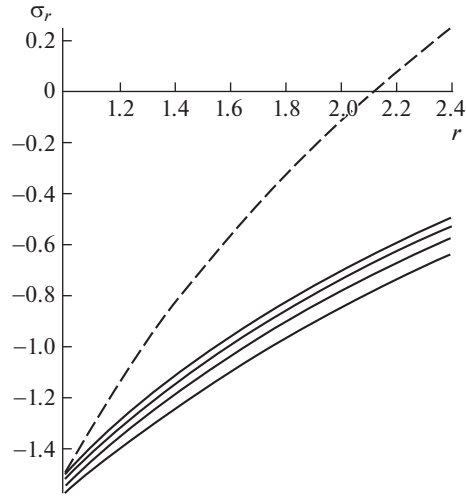


Рис. 1

нием (2.4). Введем полярную систему координат (r, ψ) . Формулы для напряжений (3.4) в полярной системе координат будут следующие:

$$\sigma_{rr} = S - kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{\psi\psi} = S + kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{r\psi} = kF(S) \cos 2\theta \quad (4.1)$$

При осевой симметрии напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\psi\psi}$ являются главными и уравнения равновесия (3.5) в полярной системе координат сведутся к одному уравнению:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\psi\psi}}{r} = 0 \quad (4.2)$$

Граничное условие в этой задаче будет следующим: $\sigma_{rr}|_{\bar{r}=1} = -p/k$, где $\bar{r} = r/a$. В случае (2.4) при $\alpha \geq 0$ поверхность текучести (2.1) выпуклая. Случай $\alpha = 0$ соответствует условию Губера–Мизеса. Из соотношения (3.2) получим $\xi = \zeta/\sqrt{(1+\alpha/9)^2 + \alpha^2\zeta^2/9}$. Функция $f_1(\xi)$ из (3.3) имеет вид $f_1(\xi) = \sqrt{1 + \beta\xi^2}$, где коэффициент β выражается через параметр пористости среды

$$\beta = \alpha/(1 + \alpha/9) \quad (4.3)$$

Функцию $F(S)$ с учетом (4.3) можно представить в виде

$$F(S) = \sqrt{1 - \beta S^2/k^2}/\sqrt{3} \quad (4.4)$$

Система (3.6) гиперболична при выполнении следующего неравенства $|kF'| < 1$. Продифференцировав (4.4) по переменной S и подставив в это неравенство находим, что $(S/k)^2 < 3/[\beta(3 + \beta)]$ – условие гиперболичности системы (3.6) для критерия пластичности Грина (2.4). Подставим (4.4) в (4.1), затем полученные выражения подставим в уравнение равновесия (4.2) и проинтегрировав получим следующее уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\beta}} \arctg\left(\frac{\sqrt{\beta}S/k}{\sqrt{-\beta(S/k)^2 + 1}}\right) + \frac{1}{2} \ln \sqrt{1 - \beta\left(\frac{S}{k}\right)^2} = \ln C_1 \bar{r} \quad (4.5)$$

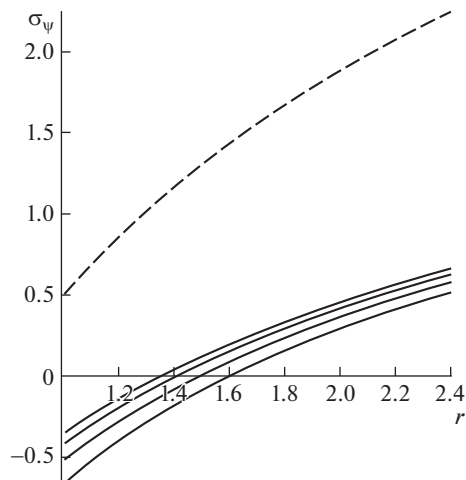


Рис. 2

где C_1 константа интегрирования, которая определяется из граничного условия, \bar{r} – безразмерный радиус пластической области. Уравнения характеристик и соотношения вдоль них имеют следующий вид:

$$\operatorname{tg} \phi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - (\beta S/k)^2 / [3(1 - \beta S^2/k^2)]}}{\beta S/k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)} + \sin 2\theta} \quad (4.6)$$

$$\sqrt{\frac{3 + \beta}{\beta}} \arcsin \left[\sqrt{\frac{\beta(3 + \beta)}{3}} \frac{S}{k} \right] - \arcsin \left[\frac{\beta S}{k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)}} \right] \mp 2\theta = \text{const}$$

Далее необходимо определить радиус пластической области. Максимальный радиус будет при $\psi_0 = \pm \pi/2$, $\theta = \psi_0 + \pi/4$, подставим эти значения в (4.6) и получим $\bar{r} = e^{\sqrt{(1+kF_1)/(1-kF_1)}}$, где \bar{r} – безразмерный радиус пластической области, а $F_1 = F'(S)$.

Можно построить графики зависимости напряжений от радиуса в пластической области при различных значениях коэффициента β , который через (4.3) связан с параметром пористости α из условия пластичности (2.4), и нагрузок, приложенных на внутреннем радиусе выреза, $p/k = \{1.5; 2\}$, и сравнить их с классическим случаем Губера–Мизеса. Радиус пластических деформаций определяется конечной точкой на диаграммах напряжений, которые изображены на графиках, из которых видно, что в исследованном диапазоне нагрузок радиус пластической области меняется незначительным образом. При этом распределение напряжений заметно изменяются с увеличением нагрузки. На рис. 1 и 2 приведены зависимости распределения напряжений от коэффициента β для $p/k = 1.5$ для значений параметра $\beta = \{0.01, 0.1, 0.2, 0.3\}$, на рис. 3 и 4 эти зависимости представлены для $p/k = 2$ и значений $\beta = \{0.01, 0.1, 0.15, 0.2\}$. На рис. 5 и 6 приведены поверхности, характеризующие распределения напряжений σ_r и σ_ψ в зависимости от r и β для $p/k = 1.5$, а на рис. 7 и 8 – аналогичные поверхности для $p/k = 2$.

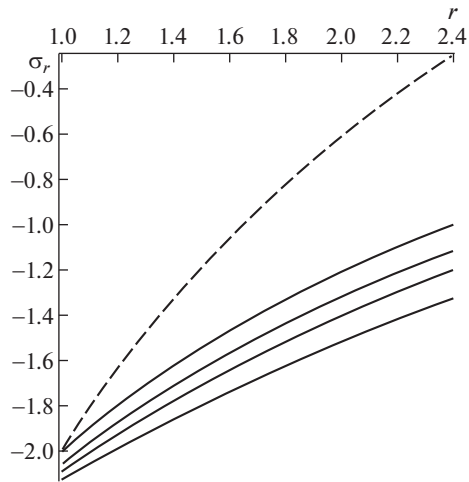


Рис. 3

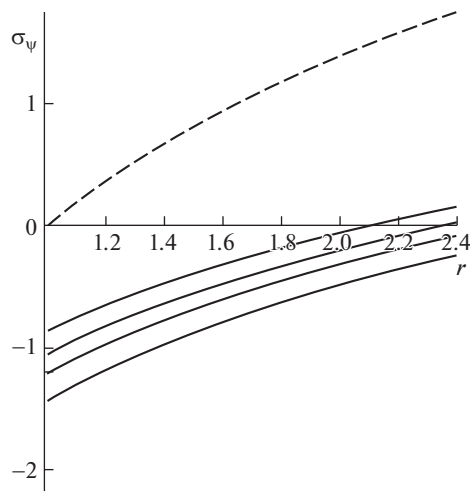


Рис. 4

5. Заключение. В работе получено полуаналитическое решение задачи о действии внутреннего давления на поверхности цилиндрического канала в пористом теле. Исследована зависимость распределения напряжений от значения параметра, характеризующего пористость материала, и установлено, что распределение напряжений существенно зависит от значения этого параметра. Показано, что распределение напряжений и их уровень существенно отличаются от значений для сплошного материала с инвариантными к виду внешних воздействий пластическими свойствами, для которого может быть использован критерий Губера–Мизеса. Кроме того, установлено, что размер пластической области незначительно зависит от величины давле-

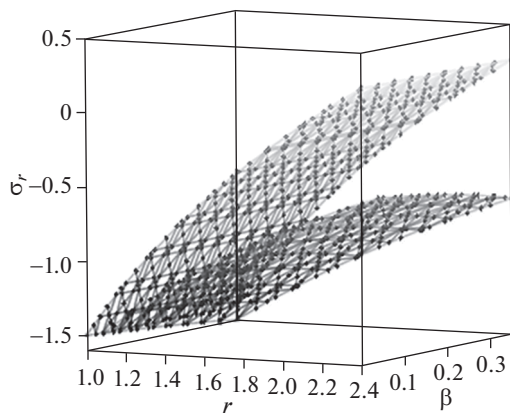


Рис. 5

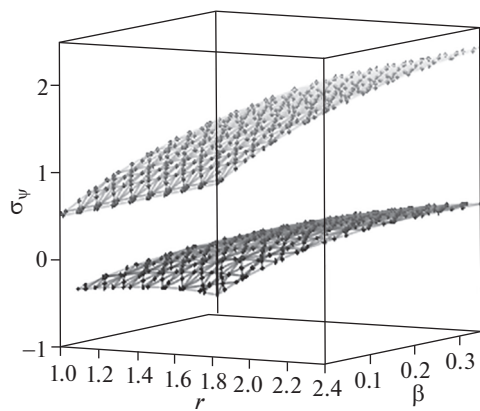


Рис. 6

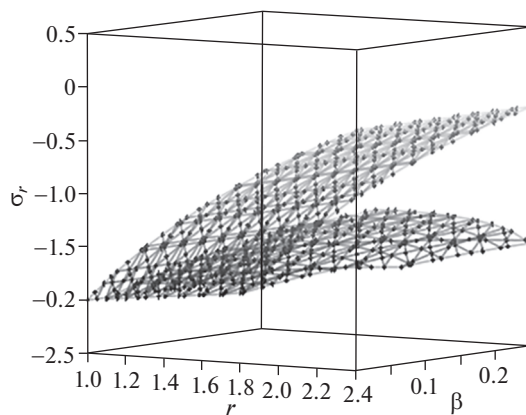


Рис. 7

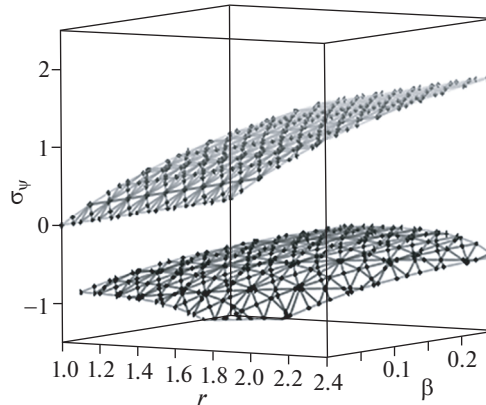


Рис. 8

ния на поверхности отверстия, но распределения напряжений весьма чувствительно к величине нагрузки.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 20-11-20230).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Green R.J.* A plasticity theory for porous solids // *Int. J. Mech. Sci.* 1972. V. 14. P. 215–226.
2. *Gurson A.L.* Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media // *Trans. of the ASME. J. of Eng. Materials and Techn.* 1977. V. 99. P. 2–15.
3. *Koplic J., Needleman A.* Void growth and coalescence in porous plastic solids // *Int. J. of Solids and Structures.* 1988. V. 24. P. 835–853.
4. *Worswick M.J., Pick R.J.* Void growth and constitutive softening in a periodically voided solid // *J. Mech. and Phys. Solids.* 1990. V. 38. P. 601–625.
5. *McMeeking R.M., Hom C.L.* Finite element analysis of void growth in elastic-plastic materials // *Int. J. of Fracture.* 1990. V. 38. P. 1–19.
6. *Deshpande V.S., Fleck N.A.* Isotropic constitutive models for metallic foams // *J. Mech. and Phys. Solids.* 2000. V. 48. P. 1253–1283.
7. *Sridhar I., Fleck N.A.* The multiaxial yield behaviour of an aluminium alloy foam // *Journal of Material Sciences.* 2005. V. 40. P. 4005–4008.
8. *Deshpande V.S., Fleck N.A.* Multi-axial yield behavior of polymer foams // *Acta Mater.* 2001. V. 49. P. 1859–1866.
9. *Deshpande V.S., Fleck N.A.* High strain rate compressive behaviour of aluminium alloy foams // *Int. J. of Impact Engineering.* 2000. V. 24. P. 277–298.
10. *Onck P.R.* Application of a continuum constitutive model to metallic foam DEN-specimens in compression // *Int. J. of Mechanical Sciences.* 2001. V. 43. P. 2947–2959.
11. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // *Quart. Appl. Math.* 1952. V. 10. P. 157–165. Русский перевод: Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование. В кн.: Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир. 1975. С. 166–177.
12. *Lomakin E.V.* Dependence of the limit state of composite and polymer materials on the stress state. 1. Experimental dependencies and determining equations. *Mech. Compos. Mater.* 1988. V. 24. P. 1–7.
13. *Ломакин Е.В., Мельников А.М.* Задачи плоского напряженного состояния тел с вырезами, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния. *Изв. РАН. МТТ.* 2011. № 1. С. 123–135.
14. *Lomakin E.V., Tretyakov M.P.* Fracture properties of graphite materials and analysis of crack growth under bending conditions // *Meccanica.* 2016. V. 51. P. 2353–2364.