

УДК 539.3

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСЧЛЕНЕНИИ
И СИНТЕЗЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
И ТЕРМОСИЛОВЫХ АНАЛОГИЯХ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК**

© 2020 г. **Б. В. Нерубайло**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия
e-mail: nerubailobv@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.12.2019 г.

После доработки 10.01.2020 г.

Принята к публикации 11.01.2020 г.

На случай произвольного деформирования цилиндрических и конических оболочек обобщается идея расчета напряженно-деформированного состояния при осесимметричном деформировании куполов и днищ путем синтеза двух напряженных состояний – безмоментного и краевого эффекта. Предлагается строить напряженное состояние на основе приближенных уравнений, описывающих так называемые элементарные напряженные состояния: основное (полубезмоментная теория), краевой эффект, напряженное состояние с высокой изменчивостью (уравнения Власова–Доннелла) и уравнения изгибаго или тангенциального состояний, являющиеся аналогом уравнений плоской задачи и изгиба пластин. Установлены термосиловые аналогии между напряженными состояниями от силовых и температурных воздействий.

Ключевые слова: оболочки цилиндрические и конические, асимптотический синтез, напряжения, термосиловая аналогия

DOI: 10.31857/S0572329920030125

Введение. Роль аналитических методов в решении прикладных задач из различных областей механики не уменьшается несмотря на все прогрессирующее развитие вычислительной техники и вычислительной математики, которое стало дополнительным стимулом к развитию асимптотических методов, позволяющих в частности, производить априорный анализ решений дифференциальных уравнений и отбросить несущественные, а порой весьма громоздкие слагаемые, как, например, в теории оболочек. В результате применения асимптотических методов к дифференциальным уравнениям общей теории оболочек показана возможность расчленения (декомпозиции) напряженно-деформированного состояния оболочки на ряд элементарных состояний, описываемых известными приближенными уравнениями [1, 2]. Такая потребность обусловлена тем, что при действии на оболочки нагрузок общего характера проблема определения напряженно-деформированного состояния может быть приведена к решению системы уравнений высокого – восьмого – порядка в частных производных, что служит естественным тормозом на пути решения многих краевых задач. Для устранения возникающих трудностей представляется плодотворным развитие и обобщение на случай произвольного деформирования оболочек методов асимптотического синтеза напряженного состояния, которые позволяют построить напряженно-деформированное состояние на основе приближенных уравнений более простой

структуры и более низкого порядка [1, 3–5]. Под асимптотическим синтезом понимается сведение в единое целое решений различных приближенных уравнений, каждое из которых достаточно точно описывает то или иное элементарное состояние. Так, еще в 1920–1930-е годы были разработаны приближенные методы расчета осесимметричного деформирования куполов и днищ, в которых полное напряженно-деформированное состояние получено путем, по сути, синтеза двух напряженных состояний: безмоментного и краевого эффекта. Построенные позже методы асимптотического интегрирования уравнений общей теории оболочек позволили расчленить напряженное состояние оболочки на ряд так называемых элементарных напряженных состояний, каждое из которых описывается известными приближенными уравнениями, полученными в разные времена. Это уравнения безмоментной и полубезмоментной теории, теории краевого эффекта, напряженного состояния с высокой изменчивостью (уравнения Власова–Доннелла) и, наконец, уравнения изгибного и тангенциального состояний, являющиеся аналогом уравнений плоской задачи и изгиба пластины. Что же касается синтеза напряженного состояния приближенных уравнений, то здесь вопрос оставался значительное время открытым из-за отсутствия принципов и достаточно четких критериев при определении границ “склеивания” (сращивания) приближенных решений. Наибольшие трудности при этом возникают, когда напряженное состояние описывается функциями, изменчивость которых колеблется в широких диапазонах, как например, при воздействиях сингулярного характера – при сосредоточенных и локализованных силовых и температурных воздействиях. В этих случаях вклад того или иного элементарного напряженного состояния существенно зависит от изменчивости поверхностной или краевой нагрузки. При действии нагрузок сингулярного характера на оболочки положительной гауссовой кривизны решение представлено в форме суммы безмоментного напряженного состояния и “точечного” краевого эффекта в окрестности точки приложения сосредоточенной силы [6]. В случае оболочек нулевой гауссовой кривизны, к которым в первую очередь относятся цилиндрические и конические оболочки, возникают дополнительные трудности [3], на путях преодоления которых следует остановиться.

1. Решение на основе общей теории оболочек. В случае круговой цилиндрической оболочки при действии нормальной нагрузки $p(\alpha, \beta)$, произвольно распределенной по поверхности, уравнения общей теории могут быть сведены к одному разрешающему дифференциальному уравнению относительно функции $\Phi(\alpha, \beta)$.

$$L\Phi(\alpha, \beta) = R^4 D^{-1} p(\alpha, \beta)$$

$$L = \nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 1)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \beta^2} \right) \nabla^2 + (1 - \nu^2) c^{-2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad c^2 = h^2 / 12R^2$$

В качестве примера рассмотрим бесконечно длинную оболочку при действии самоуравновешенной системы “к” локальных нагрузок, приложенных в одном ее поперечном сечении. Представим нагрузку вдоль контура в виде ряда, а вдоль образующей – в виде интеграла Фурье

$$p(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda$$

$$\theta_n = \frac{k\beta_0}{\pi} (n = 0); \quad \theta_n = \frac{2}{\pi n} \sin kn\beta_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
(1.2)

Решение уравнения (1.1) отыскиваем в виде, аналогичном (1.2)

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos kn\beta \int_0^{\infty} \Phi_n(\lambda) \cos \alpha\lambda d\lambda \quad (1.3)$$

Тогда в результате очевидных подстановок находим разрешающую функцию

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{6(1-v^2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right) \frac{P}{ER} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha\lambda}{\lambda L(\lambda, n)} d\lambda \quad (1.4)$$

где

$$L(\lambda, n) = (\lambda^2 + k^2 n^2)^2 (\lambda^2 + kn^2 - 1)^2 + 2(1-v)\lambda^2 (\lambda^4 - k^4 n^4) + (1-v^2)c^{-2}\lambda^4, \quad P = 4\alpha_0\beta_0 p_0 R^2$$

Для всех интересующих нас факторов (перемещений, усилий, моментов) нетрудно получить аналогичные (1.4) выражения.

Записанное в форме (1.4) решение на основе общей теории оболочек позволяет в большинстве случаев получить напряженно-деформированное состояние с высокой степенью точности, но часто ценой проведения трудоемкой вычислительной работы на компьютерах. Затруднено решение краевых задач при условиях, отличных от шарнирного закрепления.

Одним из наиболее привлекательных путей получения достаточно точных и в то же время легко поддающихся численной реализации выражений является асимптотический синтез напряженно-деформированного состояния на основе решений приближенных уравнений.

2. Методы асимптотического синтеза. Рассмотрим методы асимптотического синтеза (МАС) напряженно-деформированного состояния оболочек, вытекающие естественным образом из асимптотического анализа уравнений общей теории, асимптотической и действительной погрешностей решений на основе приближенных уравнений:

– Основанный на условии обеспечения минимума асимптотической погрешности и применении уравнений полубезмоментной теории и теории простого краевого эффекта при “низких” номерах гармоник разложений вида (2), (3), а уравнений Власова–Доннелла – при “высоких” номерах n (первый МАС);

– Заключающийся в использовании при “низких” и “высоких” номерах гармоник уравнений полубезмоментной теории, краевого эффекта, уравнений типа плоской задачи теории упругости и изгиба пластины, а при “средних” номерах уравнений типа Власова–Доннелла (второй МАС);

– Основанный на применении уравнений только четвертого порядка по продольной координате, к которым относятся: уравнения полубезмоментной теории, краевого эффекта, типа плоской задачи теории упругости или изгиба пластины (третий МАС).

Уточним понятия “низкие”, “средние” и “высокие” номера гармоник.

В первом МАС граница “склеивания” приближенных решений легко устанавливается исходя из условия обеспечения минимума асимптотической погрешности, которое приводит к зависимости

$$k^4 n^4 \approx 2\sqrt{3}R/h \quad (2.1)$$

Округленное до ближайшего целого числа значение n , найденное по этой формуле, будем обозначать через \bar{n} , а на рис. 1, где показана зависимость асимптотической погрешности ε [2], – от показателя изменчивости напряженного состояния ρ , значению \bar{n} соответствует значение $\bar{\rho}$. При “низких” номерах гармоник ($n < \bar{n}$) минимальную

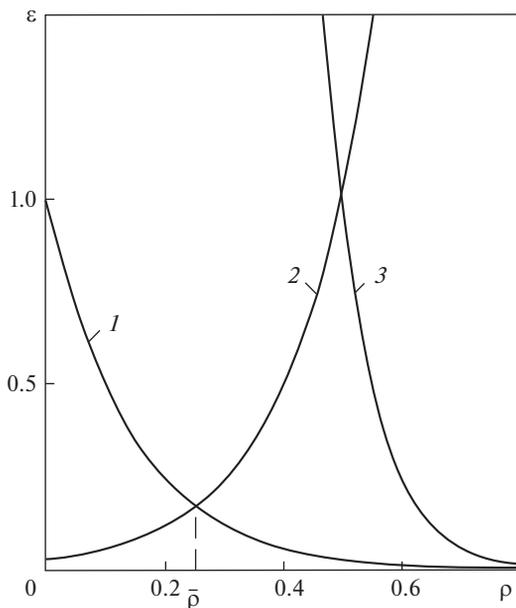


Рис. 1

асимптотическую погрешность обеспечивает применение уравнений полубезмоментной теории и краевого эффекта (кривая 2 на рис. 1), а при более высокой изменяемости применение уравнений Власова–Доннелла (кривая 1). Отметим, что с этой целью можно также воспользоваться условием четкого разделения корней характеристических уравнений для полубезмоментной теории и краевого эффекта.

Во втором методе при “высоких” номерах гармоник возможна замена уравнений Власова–Доннелла уравнениями четвертого порядка для тангенциального или изгибного состояний. Следует иметь в виду, что в случае действия нормальной нагрузки и наличия перепада температуры по толщине оболочки имеет место лишь изгибное состояние. При действии нагрузки аксиальной или окружной, или при наличии температурного поля, постоянного по толщине оболочки, имеет место лишь тангенциальное состояние. Асимптотическая погрешность последних двух состояний резко падает по мере увеличения изменяемости напряженного состояния (кривая 3). Замена уравнения Власова–Доннелла уравнениями изгибного или тангенциального состояний означает переход от эллиптического разрешающего уравнения к полигармоническому $\nabla^8 \Phi(\alpha, \beta) = 0$, которое, в свою очередь, распадается на два бигармонических, имеющих несвязанные решения.

Для установления значения номера ряда, при котором такая замена правомерна, рассмотрим знаменатель подынтегрального выражения (1.4), в котором сохраним лишь члены, отвечающие уравнению Власова–Доннелла, и преобразуем его к виду

$$\begin{aligned}
 L(\lambda, n) &= (\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + (1 - \nu^2) c^{-2} \lambda^4 = \\
 &= \lambda^8 + 4k^2 n^2 \lambda^6 + [6k^4 n^4 + (1 - \nu^2) c^{-2}] \lambda^4 + 4k^6 n^6 \lambda^2 + k^8 n^8
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Значение номера гармоники n , при котором можно перейти к уравнению полигармоническому, или двум бигармоническим, получим из сравнения членов в квадратных скобках с множителем λ^4 , входящим в (2.2):

$$k^4 n^4 \gg 2(1 - v^2)(R/h)^2 \quad (2.3)$$

Далее, примем во внимание, что приближенные уравнения теории оболочек, описывающие элементарные напряженные состояния, например, уравнения краевого эффекта, являются источником погрешности порядка $(h/R)^{1/2}$ по сравнению с единицей, тогда как для уравнений общей теории оболочек характерна погрешность порядка (h/R) [7].

Поэтому при использовании приближенных уравнений теории оболочек можно пренебрегать величинами порядка $(h/R)^{1/2}$ по сравнению с единицей, и тогда вместо (7) получаем

$$n^4 \approx (2/k^4)(1 - v^2)(R/h)^{5/2} \quad (2.4)$$

Округленное до ближайшего целого числа значение n , найденное по формуле (8), будем обозначать через n^* .

Таким образом, имеем два характерных значения n ($n = \bar{n}, n = n^*$) разделяющих полный интервал изменения номеров гармонического ряда ($n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$) на “низкие” ($n \leq \bar{n}$), “средние” ($\bar{n} < n < n^*$) и “высокие” ($n \geq n^*$) номера гармоник.

Теперь, имея значения \bar{n}, n^* , нетрудно записать решение на основе одного из сформулированных здесь МАС. Сделаем это для второго МАС, воспользовавшись (1.1)–(1.4), для случая нагружения оболочки по отрезкам контура ($\alpha_0 \rightarrow 0$):

$$\frac{1}{P} G_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi\beta_0} \left[\begin{aligned} & v \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \cos \alpha\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda + \\ & + \frac{1}{2\eta^4} \sum_n^{\bar{n}} \theta_n g_{2n}^0 \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda + \\ & + \sum_{\bar{n}+1}^{n^*} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\hat{g}_{2n}(\lambda, n) \cos \alpha\lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + 4\eta^4 \lambda^4} d\lambda + \\ & + \sum_{n^*+1}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{(k^2 n^2 + v\lambda^2) \cos \alpha\lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2} d\lambda \end{aligned} \right] \quad (2.5)$$

$$\eta^4 = 3(1 - v^2)(R/h)^2, \quad g_{2n}^0 = k^4 n^4 (k^4 n^4 - 1),$$

$$\hat{g}_{2n}(\lambda, n) = (k^2 n^2 + v\lambda^2)(\lambda^2 + k^2 n^2)^2, \quad 4\mu_n^4 = c^2(1 - v^2)^{-1} k^4 n^4 (k^4 n^4 - 1)^2$$

Выражения (1.4), (2.5) послужили алгоритмом для вычислений с целью сравнений вклада элементарных напряженных состояний в полное напряженное состояние оболочки с параметрами: $R/h = 100$, $k = 2$, $\alpha = \beta = 0$, $\beta_0 = 0.125$. На рис. 2 представлены значения изгибающего момента для n -й гармоники на основе: общей теории оболочек (кривая \circ), уравнений Власова–Доннелла (\square), полубезмоментной теории (\bullet), теории краевого эффекта (кружок с вертикальной чертой по диаметру), полубезмоментной теории плюс краевого эффекта (кружок, залитый наполовину), уравнений изгибного состояния (залитый треугольник). Графики дают возможность увидеть действительную погрешность для каждого номера гармоники, “высветить” роль каждого элементарного состояния, а также убедиться не только в качественном, но и в количественном соответствии значений \bar{n}, n^* действительно имеющему место напряженному со-

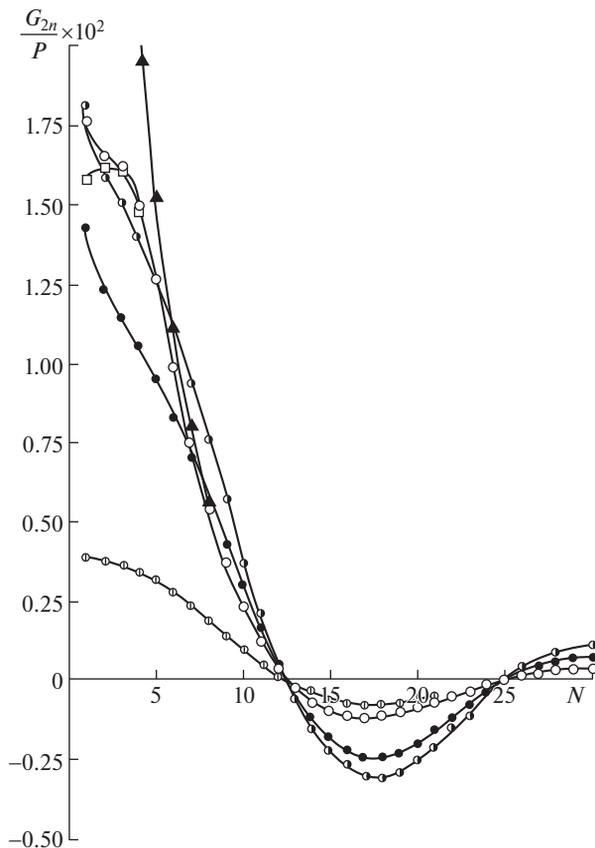


Рис. 2

стоянию оболочки. Кроме того, нетрудно убедиться в неправомерности вывода некоторых авторов о возможности перехода от уравнения Власова–Доннелла к полигармоническому уравнению лишь при весьма больших значениях гармоник, в десятки раз превышающих те, что следуют из полученной здесь формулы для n^* и из действительного напряженного состояния, показанного на рис. 2.

Сформулированные здесь первый и второй МАС позволяют получать практически точные решения искомых факторов (погрешность меньше 5%), а третий МАС дает возможность построения “прозрачных” выражений, а при некоторых допущениях и конечных формул, область применения которых достаточно просто устанавливается.

Например, в диапазоне изменения параметра нагрузки $\beta_0 \geq (h/R)^{1/2}$ может записано следующее приближенное равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(0, 0) &= \frac{1}{2\pi\beta_0} \sum_{n=0}^n \theta_n \cos kn\beta \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{(k^2 n^2 + v\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + k^2 n^2)^2 \cos \alpha\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2 (\lambda^2 + k^2 n^2 - 1)^2 + 2(1 - v)\lambda^2 (\lambda^4 - k^4 n^4) + (1 - v^2)c^{-2}\lambda^4} \approx \\ &\approx \frac{\pi - (1 - v)k\beta_0}{8\pi\beta_0^4 \sqrt{3(1 - v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \end{aligned}$$

Простые аналитические выражения или конечные формулы могут быть записаны не только для бесконечно длинных оболочек.

В качестве примера приведем выражение для радиального перемещения в точках приложения сосредоточенных нормальных сил P на свободном крае полубесконечной цилиндрической оболочки (при $k = 2, v = 0, 3$):

$$w(0, 0) = 3 \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{P}{ER}$$

Интересно отметить, что радиальное перемещение, найденное по этой формуле для двух сосредоточенных сил и по аналогичным формулам для любого числа сил, ровно в 4 раза больше радиального перемещения в случае бесконечно длинной оболочки, нагруженной такой же системой сил ($k = 2, 3, 4, 5, \dots$). Специально проведенные прецизионные эксперименты подтвердили весьма высокую точность этих формул и вышеприведенное численное соотношение между максимальными значениями радиального перемещения в бесконечно длинной и полубесконечной оболочках [5].

Ввиду сложности дифференциальных уравнений общей теории конических оболочек, получение точного решения задачи аналитическими методами вызывает значительные трудности. Поэтому здесь развивается подход, основанный на применении МАС напряженного состояния, который оказался эффективным при решении аналогичных задач для цилиндрических оболочек. Существенно используются дифференциальные уравнения четвертого порядка, описывающие основное состояние и краевой эффект, полученные в работах С.Н. Кана [8]. Такого типа уравнения применялись и ранее при решении задач о силовых и температурных воздействиях на слабokonические оболочки. В результате применения к ним МАС удается получить достаточно простые и точные замкнутые решения.

Пусть образующая конической оболочки имеет полубесконечную длину, а угол конусности 2θ . На расстоянии $r = a$ от вершины оболочка нагружена самоуравновешенной системой “к” локализованных нормальных сил P , равномерно распределенных в одном сечении по дугам направляющей окружности. Радиус этой окружности: $R = \alpha \sin \theta \geq 25h$. Это неравенство продиктовано необходимостью соблюдения гипотез теории оболочек в зоне, прилегающей к нагрузке, т.е. вдали от вершины конуса. Область, примыкающая к вершине конуса, где нарушаются условия тонкостенности, из рассмотрения опускается. Длина одной нагруженной дуги равна $l_0 = 2\beta_0 R_0$.

Нагрузку представляем тригонометрическим рядом по окружной координате [9]:

$$p(r, \beta) = \delta(r - a) \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos kn\beta \quad (2.6)$$

$$p_0 = \frac{kP}{2\pi R}, \quad p_n = \frac{P}{\pi R n \beta_0} \sin kn\beta_0$$

где $\delta(r - a)$ – функция Дирака, β – угловая координата.

Следуя МАС, искомые факторы от нулевой гармонике будем находить из уравнений осесимметричного краевого эффекта, а для других гармоник используем уравнения основного состояния.

Обратимся к локальному краевому эффекту, под которым понимаем быстро изменяющееся напряженно-деформированное состояние, возникающее непосредственно в зоне приложения нагрузки, независимо от ее расстояния до краев оболочки. Вне зоны приложения сосредоточенной нагрузки (2.6) осесимметричное напряженно-де-

формированное состояние описывается однородным дифференциальным уравнением [10]:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} + \frac{Eh}{D r t g^2 \theta} w = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.7)$$

Здесь $w = w(r)$ – нормальное перемещение.

Решение уравнения (2.7) строится в форме асимптотического ряда.

Уравнения основного состояния относятся к гармоникам, у которых $n \geq 1$. Записанное относительно разрешающей функции $\xi_n = \xi_n(r)$, оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left\{ r (D t g^2 \theta + E h r^2) \frac{d^2 \xi_n}{dr^2} \right\} - 2 \mu_n^2 t g \theta \left\{ \frac{D}{r} \frac{d^2 \xi_n}{dr^2} + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{D}{r} \xi_n \right) \right\} + \\ + 4 \mu_n^4 \frac{D}{r^3} \xi_n = \frac{n k p_n}{\cos \theta} \left\{ \frac{d}{dr} [r^2 \delta(r - a)] + \left(1 - \frac{n^2 k^2}{\sin^2 \theta} \right) r \delta(r - a) \right\} \quad (2.8) \\ \mu_n^4 = \frac{n^4 k^4 (n^2 k^2 - 1)^2}{4 \sin^6 \theta \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

Далее, как и в случае цилиндрической оболочки, нормальное перемещение w представим в виде суммы двух слагаемых, одно из которых является решением уравнений краевого эффекта при $n = 0$ и представляет собой локальный краевой эффект в зоне приложения нагрузки, а другое слагаемое суть решение для основного состояния.

В сечении оболочки $r = a$, где приложена нагрузка, обеспечиваем выполнение условий неразрывности для решений уравнений (2.7), (2.8) по нормальному перемещению и его трем производным.

Далее, складывая эти решения, для вычисления нормального перемещения в середине одного из “к” нагруженных отрезков получим формулу

$$\frac{Eh}{P} w = \frac{[3(1 - \nu^2)]^{1/4}}{\pi (\cos \theta)^{1/2}} \left(\frac{a}{h} \sin \theta \right)^{3/2} \left\{ \frac{k}{4 \sin \theta \cos \theta} \frac{h}{a} + [3(1 - \nu^2)]^{1/2} \left(\frac{\pi^2}{6k} - \frac{\pi \beta_0}{4} + \frac{1}{12} k \beta_0^2 \right) \right\}$$

При действии сосредоточенных сил эта формула существенно упрощается. Предельный переход $\beta_0 \rightarrow 0$ приводит к следующему выражению:

$$\frac{Eh}{P} w = \frac{[3(1 - \nu^2)]^{1/4}}{\pi (\cos \theta)^{1/2}} \left(\frac{a}{h} \sin \theta \right)^{3/2} \left\{ \frac{k}{2 \sin 2\theta} \frac{h}{a} + \frac{\pi^2 [3(1 - \nu^2)]^{1/2}}{6k} \right\}$$

Положив в этой формуле $\cos \theta = 1, a \sin \theta = R_0$, найдем для вычисления нормального перемещения под сосредоточенной силой в бесконечно длинной цилиндрической оболочке с радиусом $R_0 = R$:

$$\frac{Eh}{P} w = \frac{\sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}}{\pi} \left(\frac{R}{h} \right)^{3/2} \left[\frac{k}{4} + \frac{\pi^2 \sqrt{3(1 - \nu^2)} R}{6k h} \right]$$

Чтобы выполнить синтез внутренних силовых факторов, заменим в решениях осесимметричного краевого эффекта множитель p_0 на $P(2\beta_0 a \sin \theta)^{-1}$ и сложим с соответ-

ствующими решениями основного состояния. Такая операция дает удобные для проведения расчетов формулы

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-v^2)}}{2\pi\beta_0(ah \sin \theta \cos \theta)^{1/2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{\pi - k\beta_0}{2} + \frac{3 \sin^3 \theta \cos \theta}{8k^2} \sqrt{3(1-v^2)} \frac{a}{h} \left[\frac{\pi^2}{6} k\beta_0 - \frac{\pi}{4} (k\beta_0)^2 + \frac{1}{12} (k\beta_0)^3 \right] \right\} \\ \frac{T_2}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-v^2)}}{4\beta_0(ah \sin \theta \cos \theta)^{1/2}} \\ \frac{G_1}{P} &= \frac{1}{8\beta_0 \sqrt[4]{3(1-v^2)} (\sin \theta \cos \theta)^{1/2}} \left(\frac{h}{a} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{(\pi - k\beta_0)v}{\pi} + \frac{(3-4v)\operatorname{tg}\theta}{32\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{h}{a} \right] \\ \frac{G_2}{P} &= \frac{1}{8\beta_0 \sqrt[4]{3(1-v^2)} (\sin \theta \cos \theta)^{1/2}} \left[v + \frac{\pi - k\beta_0}{\pi} + \frac{(3v-4)\operatorname{tg}\theta}{32\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{h}{a} \right] \end{aligned}$$

Эти компактные замкнутые формулы позволяют вычислять максимальные значения усилий и изгибающих моментов, которые возникают в слабokonической оболочке в середине нагруженных областей.

При $\cos \theta = 1$, $a \sin \theta = R_0 = R$ из них следуют формулы:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-v^2)} \pi - k\beta_0}{4\beta_0 \sqrt{hR}} \frac{1}{2}, & \frac{T_2}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-v^2)}}{4\beta_0 \sqrt{hR}} \\ \frac{G_1}{P} &= \frac{\pi + v(\pi - k\beta_0)}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}, & \frac{G_2}{P} &= \frac{v\pi + \pi - k\beta_0}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогичные (2.9) формулы для вычисления внутренних силовых факторов обобщены в [4, 5] на случай физически ортотропных цилиндрических оболочек.

3. Термосиловые аналогии. При решении различных задач термоупругости оболочек часто весьма полезным может оказаться использование математических аналогий между напряженно-деформированными состояниями при силовом и температурном воздействиях на оболочку. Аналогии позволяют применить разработанные для случаев силового воздействия методы и аналитические выражения к случаям воздействия температурных полей. Это в полной мере относится к методам асимптотического синтеза и к построенным на их основе аналитическим выражениям.

Рассмотрим аналогию, исходя вначале из уравнений общей теории оболочек, а затем для уравнений различных элементарных напряженных состояний. Аналогия, установленная между эффектами от силового и температурного воздействий в случае полубезмоментной теории, обладает той “прозрачностью”, которая помогает выделить существо задачи. Такой же “прозрачностью” обладает, на наш взгляд, аналогия для краевого эффекта при осесимметричном нормальном нагружении и при температуре, постоянной по толщине. Здесь решение термоупругой задачи определяется через решение при силовом нормальном нагружении путем умножения на постоянный коэффициент.

Пусть на цилиндрическую оболочку действуют три компоненты поверхностной нагрузки – продольная $p_1(\alpha, \beta)$, окружная $p_2(\alpha, \beta)$, нормальная $p_3(\alpha, \beta)$, а также темпера-

турное поле $t^*(\alpha, \beta)$, постоянное по толщине оболочки. Тогда при силовых воздействиях задача может быть приведена к одному уравнению типа:

$$\begin{aligned} L\Phi(\alpha, \beta) &= R^4 D^{-1} p_i(\alpha, \beta); \quad i = 1, 2, 3 \\ \Phi_1(\alpha, \beta) &= -\Phi(\alpha, \beta), \quad \Phi_2(\alpha, \beta) = -\Phi(\alpha, \beta), \quad \Phi_3(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

При действии температурного поля $t^*(\alpha, \beta)$ разрешающее уравнение имеет вид

$$L\Phi^*(\alpha, \beta) = (1 + \nu)c^{-2}\alpha_t R t^*(\alpha, \beta) \quad (3.2)$$

где α_t – коэффициент линейного температурного расширения.

Когда законы изменения силового и температурного полей совпадают, т.е.

$$t^*(\alpha, \beta) = t_0^* \theta(\alpha, \beta), \quad p_i(\alpha, \beta) = p_{i0} \theta(\alpha, \beta)$$

легко устанавливается связь между разрешающими функциями $\Phi(\alpha, \beta)$ и $\Phi^*(\alpha, \beta)$, а затем и между искомыми факторами в оболочке [10]:

$$\begin{aligned} \Phi^* &= -\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \Phi_3 \right) f^* \\ u^* &= -\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + u_3 \right) f^* \\ v^* &= -\left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_2}{\partial \beta} + v_3 \right) f^* \\ w^* &= -\left(\frac{\partial w_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial w_2}{\partial \beta} + w_3 \right) f^* \\ T_j^* &= -\left(\frac{\partial T_{j1}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{j2}^*}{\partial \beta} + T_{j3}^* \right) f^* - Eh(1 - \nu)^{-1} \alpha_t t^*(\alpha, \beta) \\ S_j^* &= -\left(\frac{\partial S_{j1}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{j2}^*}{\partial \beta} + S_{j3}^* \right) f^* \\ G_j^* &= -\left(\frac{\partial G_{j1}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial G_{j2}^*}{\partial \beta} + G_{j3}^* \right) f^* \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

Здесь индексы “1”, “2”, “3” обозначают, что тот или иной фактор возникает в оболочке при действии продольной, окружной и радиальной нагрузок.

Таким образом, имея полученные соотношения математической термосилового аналогии, не решая термоупругую задачу для оболочки, нетрудно записать разрешающую функцию, искомые силовые и деформационные факторы в случае рассматриваемого здесь температурного поля $t^*(\alpha, \beta)$. Сделаем это лишь для разрешающей функции $\Phi^*(\alpha, \beta)$:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{24}{\pi} (1 + \nu) \left(\frac{R}{h} \right)^2 a_t R t_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda}{\lambda L(\lambda, n)} d\lambda$$

В такой же форме можно записать остальные искомые факторы.

Соотношения термосилового аналогии упрощаются при использовании приближенных уравнений теории оболочек, входящих в сформулированные здесь МАС. Эти соотношения, устанавливающие прямую дифференциальную связь между эффектами от силового и температурного воздействий, позволяют достаточно просто найти частные решения, а в случае, например, бесконечно длинной оболочки при локализован-

ном температурном поле – и полное решение задачи для всех искомым факторов при любом температурном поле, если имеются решения соответствующих силовых задач [5]. Отметим, что в термоупругой задаче, как и в силовой, наиболее универсальными являются первый и второй МАС, а получающиеся на их основе результаты решения задач рассмотренного класса практически совпадают с данными по общей теории оболочек. Второй и третий МАС открывают возможность построения решений термоупругих задач в замкнутом виде, позволяющем избежать суммирования бесконечных рядов [4].

Аналогично могут быть записаны и соотношения термосилового аналогии для анизотропных ортотропных оболочек, в том числе при наличии температурного перепада по толщине оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Образцов И.Ф.* Некоторые перспективы развития теории пластин и оболочек с позиций проектирования конструкций современных летательных аппаратов // Тр. 9-й Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. Ленинград, 1973. Л.: Судостроение. 1975. С. 6–12.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510 с.
3. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.* О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 1. С. 54–56.
4. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение. 1991. 416 с.
5. *Нерубайло Б.В.* Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение. 1983. 248 с.
6. *Чернышев Г.Н.* О контактных задачах в теории оболочек // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С. 898–903.
7. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1962. 417 с.
8. *Кан С.Н.* Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
9. *Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П.* Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной нагрузки // Изв. РАН. МТТ. № 3. 2007. С. 115–124.
10. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.* Об одной термосилового аналогии в теории оболочек // ДАН СССР. 1986. Т. 291. № 2. С. 306–309.
11. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.* Об одном классе решений краевых задач для термоупругих анизотропных цилиндрических оболочек // ДАН СССР. 1986. Т. 291. № 2. С. 306–309.