

УДК 593.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2020 г. А. С. Оконечников^а, Д. В. Тарлаковский^{а,б}, Г. В. Федотенков^{а,б,*}

^а Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

^б НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: greghome@mail.ru

Поступила в редакцию 10.12.2019 г.

После доработки 18.12.2019 г.

Принята к публикации 23.12.2019 г.

Рассмотрена пространственная нестационарная контактная задача с подвижными границами области взаимодействия для тонкой упругой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого ударника, ограниченного гладкой выпуклой поверхностью. Приведена замкнутая математическая постановка и построена система разрешающих уравнений. В основе последней лежит пространственно-временное интегральное уравнение, вытекающее из принципа суперпозиции и условий контакта. Ядром этого уравнения является функция влияния для цилиндрической оболочки. До замкнутой системы разрешающих уравнений оно дополняется кинематическим соотношением для определения подвижной границы области контакта и уравнением движения ударника как абсолютно твердого тела. Построен и реализован алгоритм решения пространственной нестационарной контактной задачи для бесконечно длинной цилиндрической оболочки и абсолютно твердого ударника в случае нормального удара по боковой поверхности оболочки. Приведены примеры расчетов.

Ключевые слова: пространственные нестационарные контактные задачи, цилиндрическая оболочка, метод суперпозиции, ряды Фурье, интегральные преобразования, функции влияния, численно-аналитические алгоритмы

DOI: 10.31857/S0572329920030137

Введение. В настоящее время, нестационарные контактные задачи механики деформируемого твердого тела приобретают все большую актуальность как в теоретическом, так и прикладном отношении. Это связано с возрастающими требованиями к точности расчетов на прочность и несущую способность основных элементов инженерных конструкций, работающих под воздействием нестационарных нагрузок. Исследование волновых процессов в тонких оболочках является актуальным для современной космической и авиационной техники, судостроения, строительства инженерных сооружений и т.д. В этой связи контактные задачи для оболочек являются одним из наиболее бурно развивающихся научных направлений. Среди них одними из наименее исследованных являются пространственные нестационарные контактные задачи. Имеется ограниченный круг работ, посвященных решению плоских и осесимметричных нестационарных контактных задач для оболочек [1–7]. Присутствуют работы, посвященные численным методам решения пространственных нестационарных задач для оболочек [8–14]. Работы, направленные на аналитическое или численно-аналитическое решение пространственных нестационарных контактных задач, практически

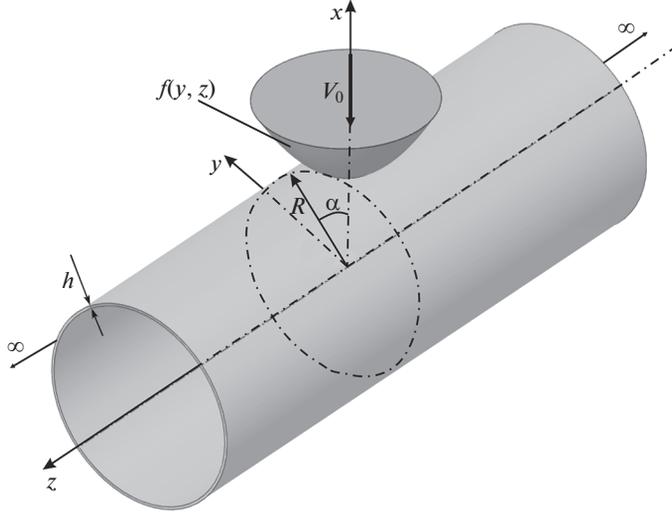


Рис. 1

отсутствуют. В данной статье разработан метод и реализован алгоритм решения пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами для цилиндрической оболочки типа Тимошенко и абсолютно твердого ударника.

1. Постановка задачи. В начальный момент времени абсолютно твердый ударник, двигаясь с заданной начальной скоростью V_0 , входит в контакт с боковой поверхностью бесконечно длинной тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки. Ударник ограничен гладкой выпуклой поверхностью, вектор его начальной скорости направлен по нормали к боковой поверхности оболочки (рис. 1).

Для описания движения оболочки используются уравнения движения модели С.П. Тимошенко в перемещениях, записанные в главных ортогональных координатах, связанных с направлениями главных кривизн срединной поверхности [15]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \tau^2} = \mathbf{L} \mathbf{W} + \mathbf{P} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{L} = (L_{ij})_{5 \times 5}, \quad \mathbf{W} = (u, v, w, \chi_\alpha, \chi_z)^T, \quad \mathbf{P} = (0, 0, p, 0, 0)^T$$

u, v – тангенциальные перемещения оболочки в направлении координатных линий α (угловая координата) и z (продольная координата) соответственно, w – нормальное перемещение оболочки χ_α, χ_z – углы поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций, p – нормальное давление, τ – безразмерное время, \mathbf{L} – матрица-оператор, элементы которой имеют вид ($k^2 = 5/6$ – поправочный коэффициент сдвига модели С.П. Тимошенко):

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right), \quad L_{12} = (1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{13} = (1 + k\eta^2) \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$L_{14} = -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 k^2, \quad L_{15} = -\gamma^2 (1 - 2\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{21} = L_{12}, \quad L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

$$\begin{aligned}
L_{23} &= (1 - 2\eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, & L_{24} &= -\gamma^2 \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, & L_{25} &= -\gamma^2 \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, & L_{31} &= -L_{13} \\
L_{32} &= -L_{23}, & L_{33} &= \eta^2 k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - 1, & L_{34} &= \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, & L_{35} &= \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial z} \\
L_{41} &= \gamma^{-2} L_{14}, & L_{42} &= \gamma^{-2} L_{24}, & L_{43} &= -\gamma^{-2} L_{34}, & L_{44} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \gamma^{-2} \right) \\
L_{45} &= L_{12}, & L_{51} &= \gamma^{-2} L_{15}, & L_{52} &= \gamma^{-2} L_{25}, & L_{53} &= -\gamma^{-2} L_{35} \\
L_{54} &= L_{12}, & L_{55} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \gamma^{-2} \right)
\end{aligned}$$

Здесь и далее все функции, переменные и параметры приведены к безразмерной форме с использованием системы безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned}
u &= \frac{u'}{R}, & v &= \frac{v'}{R}, & w &= \frac{w'}{R}, & u_c &= \frac{u'_c}{R}, & z &= \frac{z'}{R}, & \tau &= \frac{c_1 t}{R} \\
\eta^2 &= \frac{c_2^2}{c_1^2}, & c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}
\end{aligned}$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \gamma^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad p = \frac{p'R}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad V_0 = \frac{V'_0}{c_1}, \quad m_u = \frac{m'_u c_1^2}{R^2 h(\lambda + 2\mu)}$$

где ρ – плотность материала оболочки, λ, μ – параметры Ламе материала оболочки, R и h – радиус и толщина оболочки, u_c – перемещение центра масс ударника, c_1 и c_2 – скорости волн растяжения-сжатия и сдвига в материале оболочки, V_0 – начальная скорость ударника, m_u – масса ударника, t и τ – размерное и безразмерное время.

Уравнение движения ударника как абсолютно твердого тела имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
m_u \ddot{u}_c(\tau) &= P(\tau) = \iint_{\Omega(\tau)} p(\xi, \zeta, \tau) d\xi d\zeta \\
u_c(0) &= 0, \quad \dot{u}_c(0) = V_0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где P – результирующая контактного давления p , $\Omega(\tau)$ – область контакта, граница которой зависит от времени.

Полагаем, что контакт между оболочкой и ударником происходит в условиях свободного проскальзывания.

Пусть Π_1 и Π_2 – поверхности, ограничивающие оболочку и ударник в момент времени $\tau > 0$, в инерциальной декартовой прямоугольной системе координат, ось Oz которой совпадает с осью оболочки, задаются уравнениями

$$\Pi_k : x = f_k(y, z, \tau), \quad (y, z) \in \Omega_k, \quad k = 1, 2$$

где Ω_k – проекции поверхностей Π_1 и Π_2 на плоскость Oyz .

Тогда истинная область контакта Π_* определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned}
\Pi_* : \Delta(y, z, \tau) &= f_1(y, z, \tau) - f_2(y, z, \tau) = 0 \\
p(y, z, \tau) &< 0, \quad (y, z) \in \Omega_k
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где Δ – зазор между граничными поверхностями Π_1 и Π_2 .

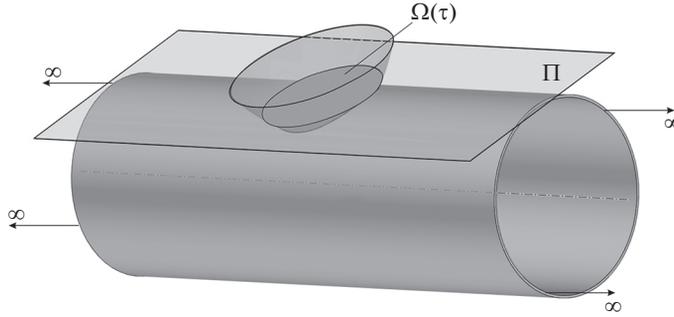


Рис. 2

Из (1.3) следуют уравнения, неявно определяющие границу области контакта $\partial\Pi_*$:

$$\partial\Pi_*: \Delta(y, z, \tau) = 0, \quad p(y, z, \tau) = 0$$

В линейризованной постановке задачи истинная область контакта Π_* заменяется фиктивной областью $\Omega(\tau)$, принадлежащей плоскости, являющейся общей касательной к поверхностям Π_1 и Π_2 в начальный момент времени контактного взаимодействия (рис. 2).

Положим, что положение поверхности, ограничивающей ударник, в текущий момент времени τ задается явным уравнением в системе координат $Oxuz$:

$$x = f(y, z) + u_c(\tau) \tag{1.4}$$

Граница $\partial\Omega(\tau)$ области $\Omega(\tau)$ определяются из условия пересечения поверхности ограничивающей ударник, с плоскостью Π :

$$\partial\Omega(\tau): f(y, z) + u_c(\tau) = 1 \tag{1.5}$$

С учетом (1.4) условия контакта ударника и оболочки имеют вид

$$f(y, z) + u_c(\tau) = w(\alpha, z, \tau), \quad p(\alpha, z, \tau) < 0, \quad y, z \in \Omega(\tau), \quad y = \sin \alpha \tag{1.6}$$

В начальный момент времени оболочка находится в недеформированном состоянии, что соответствует нулевым начальным условиям

$$u|_{\tau=0} = v|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \chi_\alpha|_{\tau=0} = \chi_z|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \dot{v}|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \dot{\chi}_\alpha|_{\tau=0} = \dot{\chi}_z|_{\tau=0} = 0 \tag{1.7}$$

Здесь и далее точка над величиной означает ее производную по времени τ .

Уравнения и соотношения (1.1), (1.2), (1.4)–(1.7) составляют замкнутую математическую постановку нестационарной контактной задачи с подвижными границами для цилиндрической оболочки и абсолютно твердого ударника.

2. Система разрешающих уравнений. Для сведения постановки контактной задачи к разрешающим уравнениям используется функция влияния $G_w(\alpha, z, \tau)$ для бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко. Она представляет собой нормальные перемещения оболочки как решения следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \tau^2} = \mathbf{L}\mathbf{G} + \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{L} = (L_{ij})_{5 \times 5}, \quad \mathbf{G} = (G_u, G_v, G_w, G_{\chi_1}, G_{\chi_2})^T, \quad \mathbf{Q} = [0, 0, \delta(\alpha)\delta(z)\delta(\tau), 0, 0]^T$$

где $\delta(\alpha)$, $\delta(z)$, $\delta(\tau)$ – дельта-функции Дирака.

Функция влияния $G_w(\alpha, z, \tau)$ найдена и исследована в работе [17].

Основываясь на принципе суперпозиции [16–18], нормальные перемещения связаны с контактным давлением посредством интегрального оператора свертки

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau dt \iint_{\Pi_*(t)} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS \quad (2.1)$$

Заменим область контакта $\Pi_*(\tau)$ фиктивной областью $\Omega(\tau)$. С учетом малости размера пятна контакта ($\text{diam}\Omega(\tau) \ll 1$) полагаем

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx y, \quad (y, z) \in \Omega(\tau) \quad (2.2)$$

Из условия контакта (1.4) с учетом выражения (2.2) и интегрального соотношения (2.1), вытекает основное разрешающее интегральное уравнение относительно искомого контактного давления $p(y, z, \tau)$:

$$\int_0^\tau dt \iint_{\Omega(t)} G_w(y - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS = f(y, z) + u_c(\tau) \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) кроме контактного давления неизвестными являются также область контакта $\Omega(\tau)$ и перемещение центра масс ударника $u_c(\tau)$.

Для получения замкнутой системы к (2.3) добавим соотношение (1.5), определяющее положение границы области контакта $\Omega(\tau)$ и уравнение движения ударника (1.2), записанное в интегральной форме

$$u_c(\tau) = V_0\tau + \frac{1}{m_u} \int_0^\tau (\tau - t) dt \iint_{\Omega(t)} p(y, z, t) dS \quad (2.4)$$

Уравнения (2.3), (2.4) и (1.5) составляют замкнутую систему разрешающих уравнений пространственной нестационарной контактной задачи для цилиндрической оболочки и абсолютно твердого ударника.

3. Численно-аналитический алгоритм решения. Для решения системы разрешающих уравнений используем численно-аналитический алгоритм, основанный на методе механических квадратур.

Временной интервал $[0, \tau]$ разделим на M равномерных шагов $\Delta_t = \tau/M$:

$$t_m = m\Delta_t, \quad m = 1-M, \quad t_M = M\Delta_t = \tau \quad (3.1)$$

Интегралы по времени в уравнениях (2.3) и (2.4) заменим суммой интегралов по интервалам $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ и положим, что в пределах каждого временного интервала контактное давление остается постоянным:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \int_{t_{m-1}}^{t_m} dt \iint_{\Omega(t)} G_w(y - \xi, z - \zeta, \tau - t) p_m(\xi, \zeta) dS &= f(y, z) + u_{cM} \\ u_{cM} &= V_0\tau + \frac{1}{m_u} \sum_{m=1}^M \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (\tau - t) dt \iint_{\Omega(t)} p_m(\xi, \zeta) dS \\ u_{cM} &= u_c(\tau), \quad p_m(\xi, \zeta) = p(\xi, \zeta, t_m), \quad t_m = m\Delta_t \end{aligned} \quad (3.2)$$

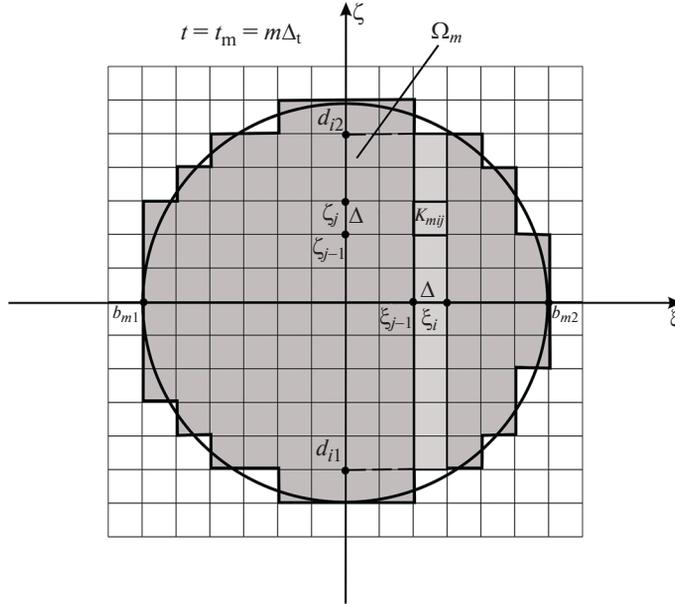


Рис. 3

Область контакта $\Omega(t) \in \Pi$ приближенно заменим объединением прямоугольных подобластей K_{mij} (рис. 3):

$$\Omega(t) \approx \Omega_m \in \Pi, \quad \Omega_m = \bigcup_{i,j} K_{mij}$$

$$K_{mij} = \{(\xi, \zeta) : \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j, t = t_m\}$$

$$\xi_i - \xi_{i-1} = \zeta_j - \zeta_{j-1} = \Delta, \quad \xi_i = b_{m1} + i\Delta, \quad \zeta_j = d_{i1} + j\Delta$$

$$i \in [1, I], \quad I = \left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; \quad j \in [1, J_i], \quad J_i = \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right]$$
(3.3)

где $\left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right], \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right]$ – целые части чисел $\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta}$ и $\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta}$.

Из соображений, касающихся устойчивости численной схемы, шаг Δ по пространственным переменным выбирается из условия $\Delta > \Delta_t$ [19]. В частности, можно положить $\Delta = 2\Delta_t$. Границы $b_{m1}, b_{m2}, d_{i1}, d_{i2}$ изменения дискретных значений пространственных переменных ξ_i и ζ_j являются решениями уравнений

$$f(b_m, 0) + u_{cm} = 1 \Rightarrow b_{m1}, \quad b_{m2}, \quad f(\xi_i, d_i) + u_{cm} = 1 \Rightarrow d_{i1}, \quad d_{i2}, \quad u_{cm} = u(t_m) \quad (3.4)$$

С применением аппроксимации (3.3), получим численные аналоги уравнений (3.2). Для этого положим, что в пределах элементарного квадрата K_{mij} контактное давление остается постоянным:

$$p_m(\xi, \zeta)|_{(\xi, \zeta) \in K_{ij}} = p_{mij} = \text{const} \quad (3.5)$$

Тогда из (3.1)–(3.5) следует

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{mijkl} p_{mij} &= f_{kl} + u_{cM}, \quad u_{cM} = V_0 \tau + \frac{\Delta_t^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=1}^M A_m \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \\ f(b_m, 0) + u_{cm} &= 1 \Rightarrow b_{m1}, b_{m2}, f(\xi_i, d_i) + u_{cm} = 1 \Rightarrow d_{i1}, d_{i2} \\ k, i \in [1, I], \quad I &= \left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; \quad l, j \in [1, J_i], \quad J_i = \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right] \\ G_{mijkl} &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} G_w(y_k - \xi, z_l - \zeta, M\Delta_t - t) d\xi d\zeta dt, \quad A_m = M - m + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.6) составляют численный аналог системы разрешающих уравнений пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твердого ударника и тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

Построения решений системы (3.6) проводится пошагово по времени. Отметим, что система уравнений (3.6) является нелинейной, так как третье и четвертое уравнения содержат искомые значения контактного давления p_{Mij} на M -ном шаге по времени. Для линейризации системы уравнений (3.6) предлагается использовать итерационную процедуру. На нулевой итерации второе уравнение системы (3.6) заменяется следующим аналогом

$$u_{cM} = V_0 \tau + \frac{\Delta_t^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=0}^{M-1} (M - m) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij}, \quad p_{0ij} = 0$$

Это позволяет определить перемещение u_{cM} без учета поля давления на шаге с номером M . Затем из третьего и четвертого уравнения определяются границы области интегрирования, а затем верхние значения I и J_i сумм в первом уравнении. После этого из первого уравнения вытекает система $I \times J$ линейных алгебраических уравнений,

где $J = \sum_{i=1}^I J_i$, относительно $I \times J$ искомым значений контактного давления на M -ном шаге по времени.

После их определения перемещение ударника u_{cM} уточняется с использованием второго уравнения системы (3.6). Затем уточняются границы области интегрирования, а также пределы верхних значений сумм I и J_i . После этого происходит пересчет поля значений контактного давления как решений первого уравнения в системе (3.6), эквивалентного системе $I \times J$ линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, алгоритм решения системы (3.6) включает следующие операции.

1. На первом шаге определяется поле дискретных значений контактного давления p_{lij} на элементарных квадратах K_{lij} .

2. На втором и последующих шагах по времени первое уравнение системы (3.6) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{mijkl} p_{mij} = f_{kl} + u_{cM} - F_M, \quad F_M = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{mijkl} p_{mij} \quad (3.7)$$

где F_M – известная величина, так как ее выражение содержит лишь значения контактного давления на предыдущих шагах по времени. Уравнение (3.7) эквивалентно системе $I \times J$ линейных алгебраических уравнений, из которых определяются значения контактного давления p_{Mij} на элементарных квадратах K_{Mij} .

3. На каждом шаге по времени перемещение ударника и положение границ области интегрирования уточняется с помощью описанной выше итерационной процедуры.

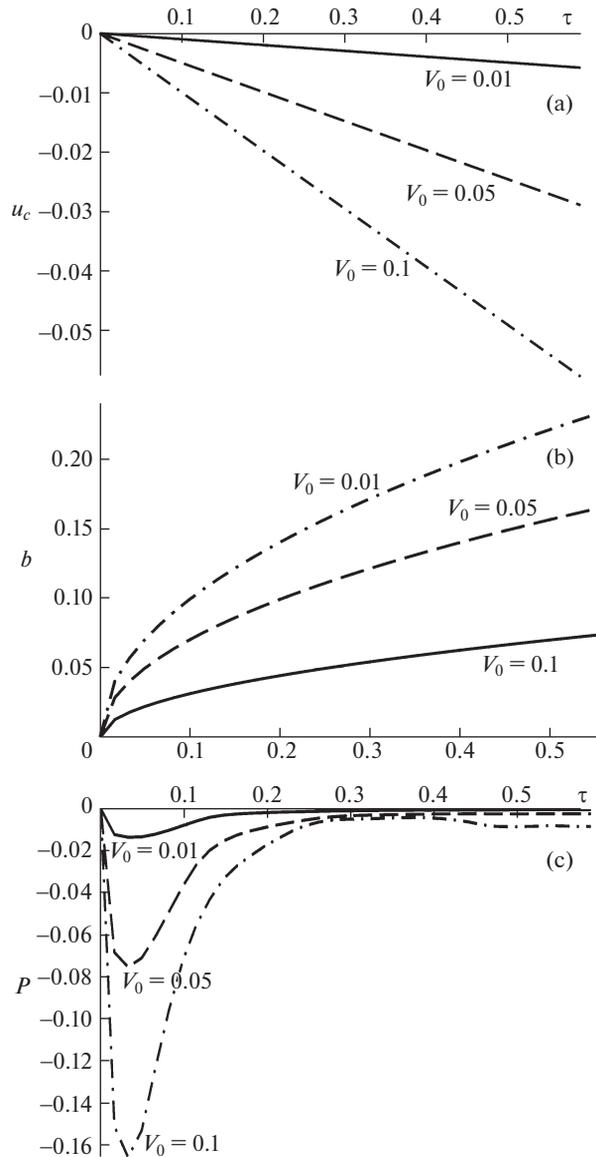


Рис. 4

4. Коэффициенты G_{mijkl} вычисляются численно-аналитически по формуле

$$G_{mijkl} \approx \tilde{G}_{mijkl} = \Delta_t \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} G_w \left[y_k - \xi, z_l - \zeta, \left(M - \frac{2m-1}{2} \right) \Delta_t \right] d\xi d\zeta \quad (3.8)$$

При этом структура функции влияния и методы для ее получения, описанные в работе [17], позволяют аналитически вычислить интегралы в правой части (3.8).

5. После определения положения границы области контакта и поля контактного давления в дискретные моменты времени, истинные нормальные перемещения обо-

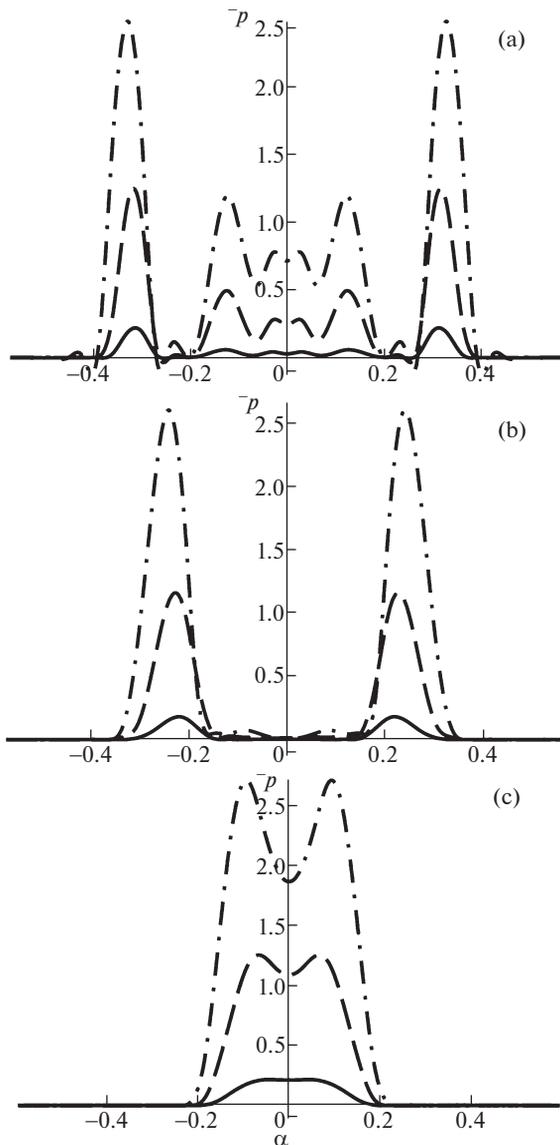


Рис. 5

лочки снова определяются интегральным соотношением (2.1). Его дискретный аналог имеет вид

$$w(\alpha, z, \tau) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) d\xi d\zeta dt$$

4. Примеры расчетов. В качестве примера рассмотрим нестационарное контактное взаимодействие круговой цилиндрической оболочки, радиуса $R = 1$ и толщиной $h = 0.025$ с абсолютно твердым ударником, ограниченным поверхностью, имеющей

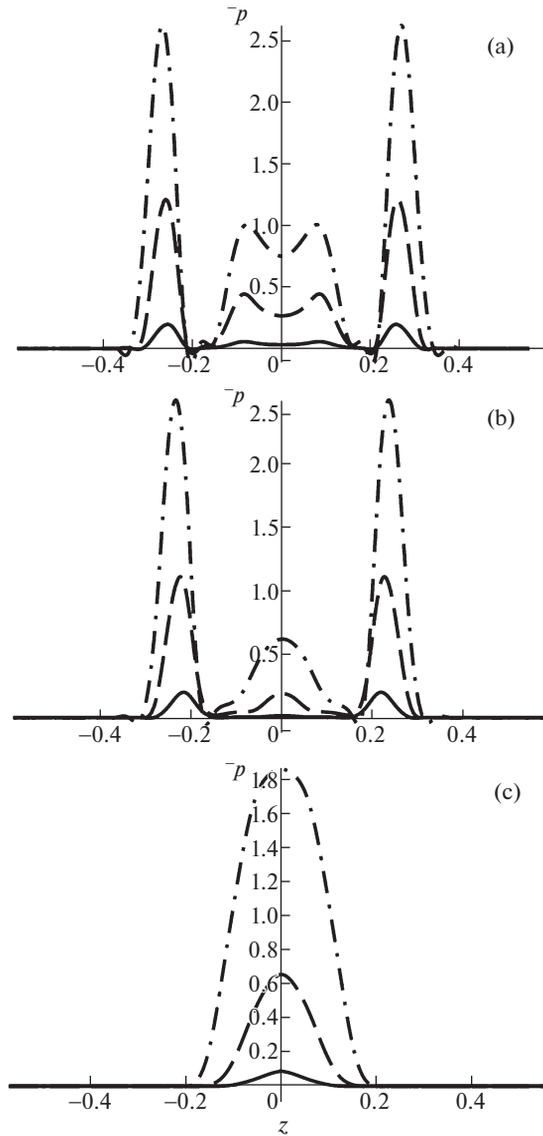


Рис. 6

форму параболоида вращения: $f(y, z) = y^2 + z^2 + 1$. В качестве материала оболочки примем сталь со следующими характеристиками: $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 1.15 \times 10^{11} \text{ Па}$, $\mu = 7.69 \times 10^{10} \text{ Па}$, чему соответствуют безразмерные параметры: $\eta = 0.53$, $\gamma = 1.3 \times 10^{-6}$.

Рассмотрим влияние начальной скорости ударника на процесс нестационарного контактного взаимодействия. Примем к анализу три ее возможных значения $V_0 = 0.01$, $V_0 = 0.05$ и $V_0 = 0.1$. Поверхность контакта в данном случае представляет собой круг,

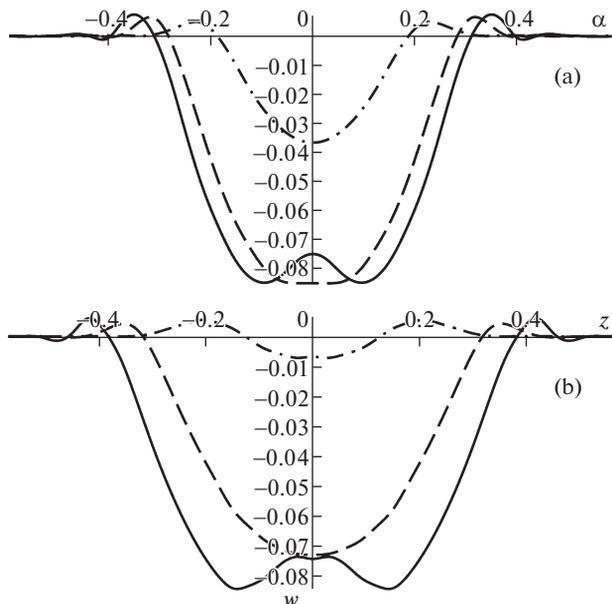


Рис. 7

граница которого совпадает с сечением поверхности $x = y^2 + z^2 + 1 - u_c(\tau)$ плоскостью $x = 1$ в текущий момент времени τ .

На рис. 4а–4с представлены зависимости перемещения центра масс ударника $u_c(\tau)$ от времени (рис. 4а), радиуса области контакта от времени (рис. 4б) и результирующей контактной силы $P(\tau)$ от времени (рис. 4с). Здесь сплошные кривые соответствуют $V_0 = 0.01$, штриховая – $V_0 = 0.05$, штрихпунктирная – $V_0 = 0.1$.

На рис. 5а–5с представлены распределения контактного давления по угловой координате α в момент времени $\tau = 0.3$. Рис. 5а соответствует значению координаты $z = 0$, 5б – $z = 0.15$, 5с – $z = 0.3$. Сплошные кривые соответствуют $V_0 = 0.01$, штриховые – $V_0 = 0.05$, штрихпунктирные – $V_0 = 0.1$.

На рис. 6а–6с представлены распределения контактного давления по продольной координате z в момент времени $\tau = 0.3$. Рис. 6а соответствует значению координаты $\alpha = 0$, 6б – $\alpha = 0.15$, 6с – $\alpha = 0.3$. Сплошные кривые соответствуют $V_0 = 0.01$, штриховые – $V_0 = 0.05$, штрихпунктирные – $V_0 = 0.1$.

На рис. 7а и 7б представлены распределения нормальных перемещений по угловой координате (рис. 7а) и по продольной координате (рис. 7б). Здесь результаты соответствуют моменту времени $\tau = 0.6$ и начальной скорости $V_0 = 0.1$. На рис. 7а сплошные кривые соответствуют $z = 0$, штриховые – $z = 0.15$, штрихпунктирные – $z = 0.3$. Сплошные кривые на рис. 7б соответствуют $\alpha = 0$, штриховые – $\alpha = 0.15$, штрихпунктирные – $\alpha = 0.3$.

Заключение. Предложен метод решения пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами задач для тонкой упругой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого ударника. Разработан и реализован численно-аналитический алгоритм решения. Приведены примеры расчетов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, номер проекта 19-08-00438 А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 2. С. 69–76.
2. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ. 2014. № 78.
3. *Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Yu., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N.* Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp // IJRAM. 111. 2016. V. 111. № 2. P. 331–342.
4. *Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В.* Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия) // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 98–108.
5. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2016. Т. 158. Кн. 1. С. 141–151.
6. *Шевляков А.Г.* Колебания цилиндрических трубопроводов, заполненных жидкостью, обусловленные поперечным импульсом внешнего давления // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. № 2. С. 65–74.
7. *Бешенков С.Н., Бешенкова В.И.* Нестационарное отрывное деформирование вложенных цилиндрических оболочек // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения. 2014. № 9. С. 29–32.
8. *Игоничева Е.В., Кибец А.И., Кибец Ю.И., Самыгин А.Н.* Численное решение трехмерной задачи соударения трубопровода с плитой // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Механика. 2000. № 2 (2). С. 87–97.
9. *Демарева А.В., Иванов В.А., Жестков М.Н., Кибец А.И., Кибец Ю.И., Шошин Д.В.* Численное решение динамических задач деформирования многослойных оболочек с пористым наполнителем // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76. № 1. С. 46–54.
10. *Резанова Е.В.* Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки // Известия Алтайского государственного университета. 2013. № 1–2 (77). С. 042–047.
11. *Kulikov G.M., Plotnikova S.V.* The contact problem for a geometrically non-linear Timoshenko-type shell // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2003. V. 67. Issue 6. P. 825–836.
12. *Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н.* Анализ пространственных колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 4. С. 448–462.
13. *Jiabei S., Zhuyong L., Jiazhen H.* Dynamic contact model of shell for multibody system applications // Multibody System Dynamics. 2018. V. 44. Issue 4. P. 335–366.
14. *Kamran K., Rossi R., Onate E.* A contact algorithm for shell problems via Delaunay-based meshing of the contact domain // Computational Mechanics. 2013. V. 52. Issue 1. P. 1–16.
15. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2018. Т. 160. Кн. 3. С. 561–577.
16. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. № 2. С. 118–128.
17. *Mitin A.Yu., Fedotenkov G.V., Kalinchuk V.V.* Three-dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40. № 3. P. 311–320.
18. *Митин А.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твердого эллиптического параболоида // Труды МАИ. 2019. № 107. С. 5.
19. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352 с.