ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020,
№ 4, с. 71–95

УДК 539.3

КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ЗАКОНА ГУКА АНИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Н. И. Мартынов

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан

e-mall:nikmar50@mail.ru

Поступила в редакцию 28.07.2019 г.
После доработки 20.08.2019 г.
Принята к публикации 18.09.2019 г.

Приведена комплексная форма закона Гука для анизотропного тела, позволившая наиболее просто записать полученные ранее известные соотношения. Определена структура матрицы упругих параметров и шесть линейных инвариантов, которые играют ключевую роль как в связи напряженно-деформированного состояния, так и в структуре матрицы упругих параметров. Показано, что определенным шестимерным унитарным преобразованием, сконструированным на основе матриц Хаусхольдера матрица упругих модулей приводится к каноническому виду, в котором упругие модули инварианты. Обсуждены некоторые вопросы классификации упругих материалов. Приведены формулы преобразования упругих модулей при трехмерном повороте, а также примеры анизотропных материалов с определенными свойствами. Показана возможность построения шести инвариантных форм закона Гука.

Ключевые слова: анизотропное тело, упругие модули, унитарная матрица, тензоры деформаций и напряжений, девиаторы, главные оси анизотропии

DOI: 10.31857/S0572329920020105

Введение. При решении различных прикладных и теоретических задач механики сплошной среды анизотропного упругого тела необходима дополнительная, более полная информация о свойствах упругих параметров закона Гука анизотропного упругого тела. Поэтому выяснению закономерностей упругих параметров и общей структуры линейного закона Гука для анизотропных упругих сред посвящено большое число научных исследований. Подробный обзор этих исследований до 2009 года приведен, например, в работе [1]. Среди работ последнего десятилетия этого направления следует выделить исследования [2–11].

Хорошо известно, что запись различных законов, уравнений в комплексном, кватернионном, или в каком-либо другом, нестандартном виде позволяет по-новому “взглянуть” на эти соотношения, получить новые знания и разработать эффективные инструменты их реализации [12–16]. Поэтому целью данной работы являлась запись, анализ закона Гука и основных известных соотношений в комплексной форме, получение “новой информации” и тех возможностей, которая эта информация открывает.

В начале данной работы вводятся комплексные компоненты тензоров напряжений и деформаций, и закон Гука для анизотропного тела записывается в матричном виде. С помощью комплексных параметров Эйлера строится матрица трехмерного поворота. Выводятся относительно компактные формулы преобразования комплексных компонент тензоров напряжений и деформаций, а также упругих модулей при трехмерном повороте.

Используя спектральное разложение матрицы упругих модулей на унитарные и диагональную матрицы, показано, что столбцы унитарной матрицы представляют комплексные компоненты некоторых симметричных тензоров второго ранга, следы которых являются инвариантами. Установлена связь с найденными шестью линейными инвариантами унитарной матрицы и линейными инвариантами деформаций, напряжений и объемных модулей В.В. Новожилова [17].

Далее обсуждаются различные соотношения для упругих анизотропных сред, полученные, например, в работах [18–22]. Введено понятие рассогласованности главных осей анизотропии прямой и обратной матриц упругих модулей. Показано, что для матриц, у которых отсутствует такое рассогласование, связь между линейными инвариантами деформаций и напряжений такая же, как и у изотропного тела, но с другими упругими параметрами. Кроме того, тогда отсутствует рассогласование и между степенями прямой и обратных матриц.

Для случая простых корней с помощью проективных матриц [23] в явном виде построены собственные вектора и вычислены инварианты унитарной матрицы. Обсуждены схемы их вычисления и в случае кратных корней. Показано, что при определенных значениях инвариантов унитарной матрицы простые корни характеристического уравнения вычисляются в радикалах.

С помощью унитарного преобразования матрица упругих модулей приводится к каноническому виду, в котором упругие модули являются инвариантами, и выражаются через собственные модули матрицы упругих параметров. Приведены три вида канонических форм, каждая из которых обладает определенной спецификой. Обсуждены некоторые вопросы классификации упругих материалов. Показана возможность построения шести инвариантных форм закона Гука.

1. Некоторые замечания. Рассмотрим неподвижную $Ox_1x_2x_3$ и подвижную $Ox_1'x_2'x_3'$ декартовые системы координат. Направляющие косинусы между осями Ox_i' и Ox_j обозначим через γ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$. Тогда радиус-векторы $\mathbf{r}', \mathbf{r}$ в новой и старой системах координат связаны соотношением: $\mathbf{r}' = \mathbf{\Gamma r}$, где $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{ij})$ –ортогональная матрица направляющих косинусов γ_{ij} ($\mathbf{\Gamma\Gamma}^* = \mathbf{\Gamma\Gamma}^T = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица). При $\det|\mathbf{\Gamma}| = 1$ имеем собственное вращение, а при $\det|\mathbf{\Gamma}| = -1$ имеем вращение с отражением. Вращение поворачивает радиус-вектор $\mathbf{r}$ каждой точки трехмерного пространства на угол δ вокруг направленной оси вращения.

Угол δ и направляющие косинусы положительной оси вращения определяются соотношениями [24]:

$$\cos\delta = \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} - 1), \quad c_1 = \frac{\gamma_{32} - \gamma_{23}}{2\sin\delta}$$
$$c_2 = \frac{\gamma_{13} - \gamma_{31}}{2\sin\delta}, \quad c_3 = \frac{\gamma_{21} - \gamma_{12}}{2\sin\delta} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \cos\delta\cdot\mathbf{E} + (1-\cos\delta)\begin{pmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 \end{pmatrix} + \sin\delta\begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Четыре симметричных параметра Эйлера [24]:

$$\begin{gathered}\lambda = c_1 \sin\frac{\delta}{2}, \quad \mu = c_2 \sin\frac{\delta}{2}, \quad \nu = c_3 \sin\frac{\delta}{2} \\ \rho = \cos\frac{\delta}{2}, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1\end{gathered} \tag{1.3}$$

однозначно определяют вращение (λ, μ, ν, ρ и $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, $-\rho$ — определяют одно и то же вращение). При этом

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \rho^2 & 2(\lambda\mu - \nu\rho) & 2(\nu\lambda + \mu\rho) \\ 2(\lambda\mu + \nu\rho) & \mu^2 - \nu^2 - \lambda^2 + \rho^2 & 2(\mu\nu - \lambda\rho) \\ 2(\nu\lambda - \mu\rho) & 2(\mu\nu + \lambda\rho) & \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \rho^2 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Комплексные параметры Эйлера

$$y_1 = \lambda + i\mu, \quad y_2 = \rho + i\nu \tag{1.5}$$

удовлетворяют соотношению [24]:

$$|y_1|^2 + |y_2|^2 = 1 \tag{1.6}$$

и могут быть представлены в виде:

$$y_1 = e^{i\xi_1} \cdot \sin\varphi, \quad y_2 = e^{i\xi_2} \cdot \cos\varphi \tag{1.7}$$

где ξ_1, ξ_2, φ — произвольные углы. Тогда несложно выписать матрицу направляющих косинусов:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos 2\xi_1 \sin^2\varphi + \cos 2\xi_2 \cos^2\varphi; & \sin 2\xi_1 \sin^2\varphi - \sin 2\xi_2 \cos^2\varphi; & \sin(\xi_1 + \xi_2)\sin 2\varphi \\ \sin 2\xi_1 \sin^2\varphi + \sin 2\xi_2 \cos^2\varphi; & -\cos 2\xi_1 \sin^2\varphi + \cos 2\xi_2 \cos^2\varphi; & -\cos(\xi_1 + \xi_2)\sin 2\varphi \\ -\sin(\xi_1 - \xi_2)\sin 2\varphi; & \cos(\xi_1 - \xi_2)\sin 2\varphi; & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

и в новых переменных ξ_1, ξ_2, φ имеем:

$$\begin{gathered}\cos\frac{\delta}{2} = \cos\varphi\cos\xi_2, \quad c_1 = \frac{\cos\xi_1 \sin\varphi}{\sin\delta/2}, \quad c_2 = \frac{\sin\xi_1 \sin\varphi}{\sin\delta/2} \\ c_3 = \frac{\sin\xi_2 \cos\varphi}{\sin\delta/2}, \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1\end{gathered} \tag{1.9}$$

Соотношения (1.8), (1.9) можно записать в терминах комплексных параметров Эйлера, с помощью которых удобно осуществлять переход к другим координатам. Если положить, например, $y_1 = ie^{i\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}\sin\varphi$, $y_2 = e^{i\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\cos\varphi$ ($\xi_1 = \pi/2 + (\alpha - \gamma)/2$, $\xi_2 = (\alpha + \gamma)/2$, $\beta = 2\varphi$), где (α,γ,β) — угловые координаты Эйлера, то получим матрицу направляющих косинусов в переменных Эйлера.

2. Закон Гука. Запишем закон Гука для анизотропного линейно-упругого тела [14, 17]:

$$\begin{gathered}e_{ij} = a_{ij\alpha\beta} \cdot \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji}; \quad e_{ij} = e_{ji}; \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij}, \quad (i,j,k,l = 1,2,3)\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь по греческим индексам производится суммирование. σ_{ij}, e_{ij} — симметричные тензоры напряжений и линейной деформации, соответственно, а $a_{ij\alpha\beta}$ — упругие модули податливости.

Примем за опорную ось – ось Ox_3 ($z = x_1 + ix_2$, $i^2 = -1$). Введем комплексные компоненты тензоров напряжений и деформаций [13, 14]:

$$T_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2i\sigma_{12}\}, \quad T_3 = \sqrt{2}(\sigma_{23} - i\sigma_{13}), \quad T_5 = \sqrt{2}\sigma_{33}$$

$$\varepsilon_1 = e_{11} + e_{22}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(e_{11} - e_{22}) + 2ie_{12}\}, \quad \varepsilon_3 = \sqrt{2}(e_{23} - ie_{13}), \quad \varepsilon_5 = \sqrt{2}e_{33} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{T} = (T_2, \overline{T}_2, T_1, T_3, \overline{T}_3, T_5)^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_2, \overline{\varepsilon}_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \overline{\varepsilon}_3, \varepsilon_5)^T$$

Отметим, что комплексные компоненты тензоров напряжений и деформаций (T_1, $\varepsilon_1, T_2, \varepsilon_2$) описывают плоскую деформацию, и первые две компоненты представляют собой среднее напряжение и среднюю деформацию, соответственно, а две последние компоненты представляют собой девиаторы касательных напряжений и плоской деформаций. Компоненты ($T_3, \varepsilon_3, T_5, \varepsilon_5$) описываю пространственную деформацию, аналогичную той, которая используется в задачах кручения с осевым растяжением.

Заменяя индексы [14] в соотношениях (2.1) по правилу (11) $\to$ (1); (22) $\to$ (2); (33) $\to$ (3); (12) $\to$ (4); (23) $\to$ (5); (13) $\to$ (6), учитывая (2.2) закон Гука запишем в комплексной форме:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{QT}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.3}$$

где

$$Q = Q^* = \begin{pmatrix} b & d & c & e & g & n \\ \overline{d} & b & \overline{c} & \overline{g} & \overline{e} & \overline{n} \\ \overline{c} & c & a & \overline{j} & j & i_0 \\ \overline{e} & g & j & p & q & m \\ \overline{g} & e & \overline{j} & \overline{q} & p & \overline{m} \\ \overline{n} & n & i_0 & \overline{m} & m & k \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^{-1}{}^* = \begin{pmatrix} B & D & C & E & G & N \\ \overline{D} & B & \overline{C} & \overline{G} & \overline{E} & \overline{N} \\ \overline{C} & C & A & \overline{J} & J & I_0 \\ \overline{E} & G & J & P & Q & M \\ \overline{G} & E & \overline{J} & \overline{Q} & P & \overline{M} \\ \overline{N} & N & I_0 & \overline{M} & M & K \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Матрицы $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{*-1}$ – эрмитовы и положительно определенные, поскольку упругий потенциал

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\{T_2\overline{\varepsilon}_2 + \overline{T}_2\varepsilon_2 + T_1\varepsilon_1 + T_3\overline{\varepsilon}_3 + \overline{T}_3\varepsilon_3 + T_5\varepsilon_5\} = \frac{1}{4}\mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon} =$$
$$= \frac{1}{4}\boldsymbol{\varepsilon}^*\mathbf{T} = \frac{1}{4}\mathbf{T}^*\mathbf{QT} = \frac{1}{4}\boldsymbol{\varepsilon}^*\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

положительно определенная форма. Коэффициенты матрицы $\mathbf{Q}$ определяются следующим образом:

$$a = \frac{1}{2}(a_{11} + 2a_{12} + a_{22}), \quad b = \frac{1}{4}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22} + 4a_{44}),$$
$$i_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{13} + a_{23}), \quad p = (a_{55} + a_{66}), \quad k = a_{33}$$
$$c = \frac{\sqrt{2}}{4}\{(a_{11} - a_{22}) + 2i(a_{14} + a_{24})\},$$

$$d = \frac{1}{4}\{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22} - 4a_{44}) + 4i(a_{14} - a_{24})\}$$
$$e = \frac{1}{2}\{(a_{15} - a_{25} - 2a_{46}) + i(a_{16} - a_{26} + 2a_{45})\}, \tag{2.5}$$

$$g = \frac{1}{2}\{(2a_{46} - a_{25} + a_{15}) + i\,(2a_{45} + a_{26} - a_{16})\}$$

$$j = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(a_{15} + a_{25}) - i\,(a_{16} + a_{26})\}, \quad q = \{(a_{55} - a_{66}) - 2ia_{56}\},$$

$$m = \{a_{35} - ia_{36}\}, \quad n = \frac{1}{2}\{(a_{13} - a_{23}) + 2ia_{34}\}$$

Аналогично выписываются элементы обратной матрицы $\mathbf{Q}^{-1}$. Как видно из (2.5), коэффициенты матрицы a, b, i_0, p, k — всегда действительные числа.

Как известно, компоненты симметричного тензора напряжений σ_{ij} в неподвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ и σ'_{ij} в подвижной системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$, в которою переходит неподвижная система координат с помощью трехмерного поворота связаны соотношениями:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{\alpha\beta}\gamma_{i\alpha}\gamma_{j\beta} \tag{2.6}$$

Используя (1.8), (2.2), (2.6), получим формулы преобразования комплексных компонент тензора напряжений:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{V}_{\text{п}}\mathbf{T} \tag{2.7}$$

где матрица поворота $\mathbf{V}_{\text{п}}$ имеет вид:

$$\mathbf{V}_{\text{п}} = \mathbf{V}_{\Omega}\,\overset{0}{\mathbf{V}}_3\,\mathbf{V}_{\theta} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{V}_{\Omega} = \mathrm{diag}(\Omega^2, \bar{\Omega}^2, 1, -\Omega, -\bar{\Omega}, 1)^T, \quad \mathbf{V}_{\theta} = \mathrm{diag}(\theta^2, \bar{\theta}^2, 1, \theta, \bar{\theta}, 1)^T, \quad \theta = e^{i(\xi_2 - \xi_1)}, \quad \Omega = e^{i(\xi_2 + \xi_1)} \tag{2.9}$$

$$\overset{0}{\mathbf{V}}_3 = \overset{0}{\mathbf{V}}{}_3^{\mathbf{T}} = \overset{0}{\mathbf{V}}{}_3^{*}, \quad \overset{0}{\mathbf{V}}_3 \cdot \overset{0}{\mathbf{V}}_3 = \mathbf{E} \tag{2.10}$$

$$\overset{0}{V}_3 = \begin{pmatrix} \cos^4\varphi; & \sin^4\varphi; & \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 2\varphi; & \sin 2\varphi\cos^2\varphi; & -\sin 2\varphi\sin^2\varphi; & -\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi \\ \sin^4\varphi; & \cos^4\varphi; & \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 2\varphi; & -\sin 2\varphi\sin^2\varphi; & \sin 2\varphi\cos^2\varphi; & -\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 2\varphi; & \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 2\varphi; & \left(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right); & -\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 4\varphi; & -\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 4\varphi; & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 2\varphi \\ \sin 2\varphi\cos^2\varphi; & -\sin 2\varphi\sin^2\varphi; & -\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 4\varphi; & -\cos^2\varphi(2\cos 2\varphi - 1); & \sin^2\varphi(2\cos 2\varphi + 1); & \frac{1}{2}\sin 4\varphi \\ -\sin 2\varphi\sin^2\varphi; & \sin 2\varphi\cos^2\varphi; & -\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 4\varphi; & \sin^2\varphi(2\cos 2\varphi + 1); & -\cos^2\varphi(2\cos 2\varphi - 1); & \frac{1}{2}\sin 4\varphi \\ -\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi; & -\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi; & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 2\varphi; & \frac{1}{2}\sin 4\varphi; & \frac{1}{2}\sin 4\varphi; & \cos^2 2\varphi \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Здесь $\mathbf{V}_{\Omega}$, $\mathbf{V}_{\theta}$ — диагональные унитарные матрицы, а $\overset{0}{\mathbf{V}}_3$ — действительная симметричная матрица, квадрат которой равен единичной матрице. Отметим, что

$$\mathbf{V}_{\text{п}}^{-1} = \bar{\mathbf{V}}_{\theta}\,\overset{0}{\mathbf{V}}_3\,\bar{\mathbf{V}}_{\Omega} = \mathbf{V}_{\text{п}}^{*}, \quad \mathbf{V}_{\text{п}}\mathbf{V}_{\text{п}}^{*} = \mathbf{E}, \tag{2.12}$$

т.е. матрица $\mathbf{V}_{\text{п}}$ — унитарна. Учитывая соотношение (2.7), получим:

$$|\mathbf{T}'|^2 = (\mathbf{T}'^* \cdot \mathbf{T}') = (\mathbf{T}^*\mathbf{V}_{\text{п}}^* \cdot \mathbf{V}_{\text{п}}\mathbf{T}) = (\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T}) = |\mathbf{T}|^2, \quad |\boldsymbol{\varepsilon}'|^2 = |\boldsymbol{\varepsilon}|^2 \tag{2.13}$$

То есть, модули векторов $\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}$ при трехмерном повороте не изменяются. Отметим также, что элементы матрицы поворота $\mathbf{V}_{\text{п}}$ можно выразить через комплексные параметры Эйлера. Вектор $\mathbf{T}$, который представляет собой комплексные компоненты симметричного тензора напряжений σ_{ij}, с помощью определенного трехмерного поворота можно привести к главным осям:

$$\mathbf{T}^0 = \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T}^0 = (T_2^0, T_2^0, T_1^0, 0, 0, T_5^0)^T, \quad T_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1^0 - \sigma_2^0)$$
$$T_1^0 = (\sigma_1^0 + \sigma_2^0), \quad T_3^0 = 0, \quad T_5^0 = \sqrt{2}\sigma_3^0, \quad \sigma_1^0 \geq \sigma_2^0 \geq \sigma_3^0 \tag{2.14}$$

Здесь σ_1^0, σ_2^0, σ_3^0 – главные напряжения. Записывая закон Гука в системах координат $Ox_1'x_2'x_3'$, $Ox_1x_2x_3$ и учитывая (2.3), (2.7), получим:

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{V}_\text{п}\mathbf{Q}\mathbf{V}_\text{п}^* \tag{2.15}$$

В конце данной статьи прилагается таблица преобразования упругих модулей при произвольном трехмерном повороте.

Введем матрицу перестановки **D** следующего вида:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E} \tag{2.16}$$

которая при умножении слева произвольной матрицы **L** шестого порядка переставляет между собой первую и вторую, а также четвертую и пятую строки матрицы **L**. При умножении справа – переставляет между собой первый и второй, а также и четвертый и пятый столбцы матрицы **L**. Учитывая (2.2), (2.4), (2.8)–(2.11), (2.16) нетрудно получить:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{D}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{D}\mathbf{Q}\mathbf{D}, \quad \bar{\mathbf{V}}_\theta = \mathbf{D}\mathbf{V}_\theta\mathbf{D}, \quad \bar{\mathbf{V}}_\Omega = \mathbf{D}\mathbf{V}_\Omega\mathbf{D}, \quad \bar{\mathbf{V}}_\text{п} = \mathbf{D}\mathbf{V}_\text{п}\mathbf{D} \tag{2.17}$$

Отметим, что выполняются и обратные соотношения. Пусть, например, произвольные комплексные вектора $\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{T}$ и эрмитовая матрица **Q** удовлетворяют первым трем соотношениям (2.17). Тогда вектора $\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{T}$ имеют структуру (2.2), а матрица **Q** – структуру (2.4). Это проверяется непосредственно с учетом свойств матрицы **D**.

Поскольку матрица Q упругих постоянных – эрмитова и положительно определенная, то она может быть представлена в виде [25]:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\lambda}\mathbf{U} \tag{2.18}$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{E})$ – унитарная матрица, а $\boldsymbol{\lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ – диагональная матрица, причем все собственные значения матрицы **Q**, $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Отметим, что $\mathbf{Q}^\mathbf{k} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\lambda}^\mathbf{k}\mathbf{U}, (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$.

3. Структура матрицы U*. Матрица **U** в разложении (2.18) определяется неоднозначно. Соотношение (2.18) можно, например, записать в виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\lambda}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{e}^{\mathbf{i}\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\boldsymbol{\theta}}\mathbf{U} = \mathbf{U}'^*\boldsymbol{\lambda}\mathbf{U}' = \mathbf{U}^*\mathbf{P}^*\mathbf{e}^{\mathbf{i}\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\boldsymbol{\theta}}\mathbf{P}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U}'^*\mathbf{U}' = \mathbf{E},$$
$$\mathbf{U}' = \mathbf{P}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U}'^* = \mathbf{U}^*\mathbf{P}^*, \quad \mathbf{P}^*\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^* = \mathbf{E}, \tag{3.1}$$
$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}, e^{i\theta_4}, e^{i\theta_5}, e^{i\theta_6}), \quad \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}$$

где **P** – унитарная матрица, перестановочная с диагональной матрицей собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$, а $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\boldsymbol{\theta}}$ – диагональная матрица с произвольными углами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6$. В случае простых корней (корни характеристического уравнения $|\mathbf{Q} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}| = \mathbf{0}$ все разные и кратности один) $\mathbf{P} = \mathbf{E}$. В случае кратных корней, матрица **P** (с точностью до матрицы перестановок) состоит из диагональных блоков, размеры которых определяются кратностями соответствующих корней.

Представим унитарную матрицу $\mathbf{U}^* = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, .., \mathbf{u_6})$, в виде столбцов. Из (2.18) следует, что $\mathbf{QU}^* = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\lambda}$, т. е. столбец $\mathbf{u_i}$ – является собственным вектором матрицы $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Qu_i} = \lambda_i \mathbf{u_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{3.2}$$

Так как матрица $\mathbf{U}^*$ – унитарна, то ее столбцы ортонормированы, т. е. скалярное произведение $(\mathbf{u_i^*} \cdot \mathbf{u_j}) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = (1$, если $i = j$; 0, если $i \neq j)$ – тензор Кронекера. Записывая соотношение (3.2) для комплексно-сопряженных величин $(\mathbf{\bar{Q}\bar{u}_i} = \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i}\mathbf{\bar{u}_i})$, и учитывая (2.16), (2.17) получим:

$$\mathbf{Q(D\bar{u}_i)} = \lambda_\mathrm{i}\mathbf{(D\bar{u}_i)} \tag{3.3}$$

То есть, вектор $\mathbf{(D\bar{u}_i)}$, как и вектор $\mathbf{u_i}$ является собственным вектором, соответствующий собственному значению λ_i. Из третьего соотношения (2.17) следует, что $\mathbf{\bar{Q}} = \mathbf{\bar{U}}^*\boldsymbol{\lambda}\mathbf{\bar{U}} = \mathbf{DU}^*\lambda\mathbf{UD}$, т.е. можно принять, что $\mathbf{\bar{u}_i} = \mathbf{Du_i}$, или

$$\mathbf{\bar{U}}^* = \mathbf{DU}^*, \quad \mathbf{\bar{U}} = \mathbf{UD} \tag{3.4}$$

То есть столбцы матрицы $\mathbf{U}^*$ имеют ту же структуру, что и вектора $\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}$. Это следует так же из результатов работы [18]. Соотношения (3.4) можно доказать и непосредственно, используя тот факт, что вектор $\mathbf{x_i} = \mathbf{u_i} + \mathbf{D\bar{u}_i}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{Q}$, и обладает свойством: $\mathbf{D\bar{x}_i} = \mathbf{x_i}$. Поэтому при повороте осей координат столбцы матрицы $\mathbf{U}^*$ преобразуются по закону (2.7), или

$$\mathbf{U'}^* = \mathbf{V_n U}^* \tag{3.5}$$

Запишем в развернутом виде матрицы $\mathbf{U}, \mathbf{U}^*$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & u_{11} & \overset{0}{u}_{13} & \bar{u}_{14} & u_{14} & \overset{0}{u}_{16} \\ \bar{u}_{22} & u_{22} & \overset{0}{u}_{23} & \bar{u}_{24} & u_{24} & \overset{0}{u}_{26} \\ \bar{u}_{31} & u_{31} & \overset{0}{u}_{33} & \bar{u}_{34} & u_{34} & \overset{0}{u}_{36} \\ \bar{u}_{41} & u_{41} & \overset{0}{u}_{43} & \bar{u}_{44} & u_{44} & \overset{0}{u}_{46} \\ \bar{u}_{51} & u_{51} & \overset{0}{u}_{53} & \bar{u}_{55} & u_{55} & \overset{0}{u}_{56} \\ \bar{u}_{61} & u_{61} & \overset{0}{u}_{63} & \bar{u}_{64} & u_{64} & \overset{0}{u}_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{22} & u_{31} & u_{41} & u_{51} & u_{61} \\ \bar{u}_{11} & \bar{u}_{22} & \bar{u}_{31} & \bar{u}_{41} & \bar{u}_{51} & \bar{u}_{61} \\ \overset{0}{u}_{13} & \overset{0}{u}_{23} & \overset{0}{u}_{33} & \overset{0}{u}_{43} & \overset{0}{u}_{53} & \overset{0}{u}_{63} \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{55} & u_{64} \\ \bar{u}_{14} & \bar{u}_{24} & \bar{u}_{34} & \bar{u}_{44} & \bar{u}_{55} & \bar{u}_{64} \\ \overset{0}{u}_{16} & \overset{0}{u}_{26} & \overset{0}{u}_{36} & \overset{0}{u}_{46} & \overset{0}{u}_{56} & \overset{0}{u}_{66} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Как видно из (3.6) матрица $\mathbf{U}^*$ имеет 12 комплексных компонент и 12 действительных компонент, или описывается 36 действительными компонентами. Кроме того, первый–второй, четвертый–пятый столбцы матрицы $\mathbf{U}$ комплексно сопряжены, а третий и шестой – действительные.

Отметим, что матрицу $\mathbf{D}$ (которая переставляет строки, или столбцы) можно представить в виде матрицы поворота против часовой стрелки на угол π вокруг оси Ox_1:

$$\mathbf{V_п^*}\left(\xi_1 = \xi_2 = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}\right) = V_n\left(\xi_1 = \xi_2 = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}\right) = D, \quad (\delta = \pi, c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0)$$

Сделаем еще одно важное замечание. Рассмотрим, например, матрицу $\lambda' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)^T = D'\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)^T D'^*$, где матрица перестановок $\mathbf{D'}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{D'} = \begin{pmatrix} \mathbf{D''} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D'^* \cdot D' = D' \cdot D'^* = E}$$

Тогда

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\lambda}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*(\mathbf{D}'^*\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{D}')\mathbf{U} = \mathbf{U}'^*\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{U}', \quad \mathbf{U}'^* = \mathbf{U}^*\mathbf{D}'^*, \quad \mathbf{U}' = \mathbf{D}'\mathbf{U}$$

Т.е. второй и третий столбцы матрицы $\mathbf{U}'^*$ получаются перестановкой второго и третьего столбцов матрицы $\mathbf{U}^*$, а на главной диагонали в разложении матрицы $\mathbf{Q}$ стоит уже диагональная матрица $\boldsymbol{\lambda}'$. Поэтому собственные значения в диагональной матрице $\boldsymbol{\lambda}$ можно располагать в любом порядке, например, в порядке их убывания. При этом столбцы матрицы $\mathbf{U}'^*$ будут получаться перестановкой соответствующих столбцов матрицы $\mathbf{U}^*$. Следовательно, с точностью до перестановки столбцов матрицы $\mathbf{U}^*$, ее структура будет одна и та же.

4. Линейные инварианты. Поскольку столбцы $\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_6}$ матрицы $\mathbf{U}^*$ образуют ортонормируемый базис в шестимерном комплексном пространстве, то вектора $\mathbf{T}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ можно разложить по этому базису:

$$\mathbf{T} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_6\mathbf{u}_6, \quad \varepsilon = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_6\mathbf{u}_6$$

или в матричной форме:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\alpha} \\ \beta = (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6)^T, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)^T \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь α_i, β_i – координаты разложения $\mathbf{T}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ по базису $\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_6}$, $\alpha_i = (\mathbf{u}_\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{T})$; $\beta_i = (\mathbf{u_i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$. В силу закона Гука (2.3), (3.2) и ортонормированности векторов $\mathbf{u_i}$, имеем:

$$\beta_\omega\mathbf{u}_\omega = \mathbf{Q}\alpha_\omega\mathbf{u}_\omega = \alpha_\omega\mathbf{Q}\mathbf{u}_\omega = \alpha_\omega\lambda_\omega\mathbf{u}_\omega$$

Так как вектора $\mathbf{u}_\omega$ – линейно независимы, то

$$\beta_i = \lambda_i\alpha_i, \quad (i = 1,2,\ldots,6) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda\alpha} \tag{4.2}$$

Покажем, что $\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{\beta} = \bar{\boldsymbol{\beta}}$, т.е. вектора $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ – действительные. $\mathbf{Du_i} = \bar{\mathbf{u}}_\mathbf{i}$, тогда $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{U}}^*\bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{D}\mathbf{U}^*\bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{U}^*\boldsymbol{\beta}$. Отсюда $\boldsymbol{\beta} = \bar{\boldsymbol{\beta}}$. Аналогично показываем, что $\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}$. При повороте осей координат вектора $\mathbf{u_i}$, $\mathbf{T}$, согласно (2.7), (3.5) преобразуются по закону $\mathbf{u}'_\mathbf{i} = \mathbf{V}_\text{п}\mathbf{u}_\mathbf{i}$, $\mathbf{T}' = \mathbf{V}_\text{п}\mathbf{T}$. Тогда $\alpha'_i = (\mathbf{u}'^*_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}') = (\mathbf{u}^*_\mathbf{i}\mathbf{V}^*_\text{п} \cdot \mathbf{V}_\text{п}\mathbf{T}) = (\mathbf{u}^*_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}) = \alpha_i$, т.е. вектор $\boldsymbol{\alpha}$ – инвариант. Аналогично доказывается, что вектор $\boldsymbol{\beta}$ – инвариант. Тогда нетрудно показать, что упругий потенциал $\tilde{P}$ – тоже инвариант, и

$$\tilde{P} = \frac{1}{4}\alpha_\omega\beta_\omega = \frac{1}{4}\lambda_\omega\alpha_\omega^2 = \frac{\beta_\omega^2}{4\lambda_\omega} \tag{4.3}$$

Соотношения (4.2) воспроизводят закон Гука в первозданном виде: “деформации пропорциональны напряжениям”, и аналогичны соотношениям (7.3) из работы [18].

Используя закон Гука (2.3), запишем первые инварианты тензоров деформаций $I_\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ и напряжений $I_T = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_5}{\sqrt{2}}\right) = \left(\bar{c} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}\right)T_2 + \left(c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right)\bar{T}_2 + \left(a + \frac{i_0}{\sqrt{2}}\right)T_1 + \\ &+ \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right)T_3 + \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right)T_3 + \left(i_0 + \frac{k}{\sqrt{2}}\right)T_5, \\ I_T &= \left(T_1 + \frac{T_5}{\sqrt{2}}\right) = \left(\bar{C} + \frac{\bar{N}}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon_2 + \left(C + \frac{N}{\sqrt{2}}\right)\bar{\varepsilon}_2 + \left(A + \frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon_1 + \\ &+ \left(\bar{J} + \frac{\bar{M}}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon_3 + \left(\bar{J} + \frac{\bar{M}}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon_3 + \left(I_0 + \frac{K}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon_5 \end{aligned} \tag{4.4}$$

В главных осях матрицы анизотропии **Q** (тензор $K_{ij} = a_{ij\alpha\alpha}$ – диагональный [17]), что равносильно выполнению соотношений:

$$(a_{14} + a_{24} + a_{34}) = 0, \quad (a_{15} + a_{25} + a_{35}) = 0, \quad (a_{16} + a_{26} + a_{36}) = 0$$

или в комплексной записи

$$\left(\bar{c} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}\right) = \left(c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(j + \frac{m}{\sqrt{2}}\right) = \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right) = 0 \tag{4.5}$$

Аналогично имеем: в главных осях матрицы анизотропии $\mathbf{Q}^{-1}$ (тензор $K_{ij}^{-1} = A_{ij\alpha\alpha}$ – диагональный [17]), что равносильно выполнению соотношений:

$$(A_{14} + A_{24} + A_{34}) = 0, (A_{15} + A_{25} + A_{35}) = 0, (A_{16} + A_{26} + A_{36}) = 0$$

или в комплексной записи

$$\left(\bar{C} + \frac{\bar{N}}{\sqrt{2}}\right) = \left(C + \frac{N}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(J + \frac{M}{\sqrt{2}}\right) = \left(\bar{J} + \frac{\bar{M}}{\sqrt{2}}\right) = 0 \tag{4.6}$$

С другой стороны, используя (4.1) первые инварианты $I_\varepsilon, I_\text{T}$ можно представить как:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \left(u_{13}^0 + \frac{u_{16}^0}{\sqrt{2}}\right)\beta_1 + \left(u_{23}^0 + \frac{u_{26}^0}{\sqrt{2}}\right)\beta_2 + \ldots\left(u_{63}^0 + \frac{u_{66}^0}{\sqrt{2}}\right)\beta_6, \\ I_T &= \left(u_{13}^0 + \frac{u_{16}^0}{\sqrt{2}}\right)\alpha_1 + \left(u_{23}^0 + \frac{u_{26}^0}{\sqrt{2}}\right)\alpha_2 + \ldots\left(u_{63}^0 + \frac{u_{66}^0}{\sqrt{2}}\right)\alpha_6 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Величины, стоящие в левой части (4.7) – инварианты. Посмотрим, как изменяются коэффициенты, стоящие при α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ в (4.7) при трехмерном повороте, используя соотношения (3.5).

$$\begin{aligned} u_{13}'^0 &= \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 2\varphi(\theta^2 u_{11} + \bar{\theta}^2\bar{u}_{11}) + \left(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right)u_{13}^0 - \frac{\sqrt{2}}{4}\sin 4\varphi(u_{14}\theta + \bar{u}_{14}\bar{\theta}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 2\varphi u_{16}^0, \\ u_{16}'^0 &= -\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi(\theta^2 u_{11} + \bar{\theta}^2\bar{u}_{11}) + \frac{\sqrt{2}\sin^2 2\varphi}{2}u_{13}^0 + \frac{1}{2}\sin 4\varphi(u_{14}\theta + \bar{u}_{14}\bar{\theta}) + \cos^2 2\varphi u_{16}^0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Из соотношений (4.8) следует: $\left(u_{13}'^0 + \dfrac{u_{16}'^0}{\sqrt{2}}\right) = \left(u_{13}^0 + \dfrac{u_{16}^0}{\sqrt{2}}\right) = m_1$. Аналогично проверяется, что

$$\left(u_{i3}'^0 + \frac{u_{i6}'^0}{\sqrt{2}}\right) = \left(u_{i3}^0 + \frac{u_{i6}^0}{\sqrt{2}}\right) = m_i, \quad (i = 2, \ldots, 6) \tag{4.9}$$

Т.е, m_i – инварианты. Структура вектора $\mathbf{u_i}$ такова, что его компоненты представляют линейные комбинации некоторого симметричного тензора второго ранга, а m_i есть след этого тензора, который является инвариантом. Поэтому этот результат можно было бы предвидеть заранее.

Используя условия ортогональности столбцов матрицы U^* и соотношения (4.9) нетрудно получить:

$$\mathbf{m} = U\mathbf{F} = \bar{U}\mathbf{F}, \quad \mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_6)^T, \quad \mathbf{F} = \left(0, 0, 1, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_6^2 = 3/2 \tag{4.10}$$

С учетом (4.9), соотношения (4.7) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + \ldots m_6\beta_6 = m_1\lambda_1\alpha_1 + m_2\lambda_2\alpha_2 + \ldots m_6\lambda_6\alpha_6; \\ I_T &= m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots m_6\alpha_6 = m_1\lambda_1^{-1}\beta_1 + m_2\lambda_2^{-1}\beta_2 + \ldots m_6\lambda_6^{-1}\beta_6 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Обозначим

$$\mathbf{L} = \left\{\left(c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right), \left(\bar{c} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}\right), \left(a + \frac{i_0}{\sqrt{2}}\right), \left(j + \frac{m}{\sqrt{2}}\right), \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right), \left(i_0 + \frac{k}{\sqrt{2}}\right)\right\}^T \tag{4.12}$$

Тогда

$$\mathbf{L} = \mathbf{U^*\lambda m} = \mathbf{U^*\lambda UF} = \mathbf{QF} \tag{4.13}$$

Из (4.12), (4.13) следует:

$$\left(a + \frac{i_0}{\sqrt{2}}\right) = \lambda_1 m_1 u_{13}^0 + \lambda_2 m_2 u_{23}^0 + \ldots + \lambda_6 m_6 u_{63}^0,$$
$$\left(i_0 + \frac{k}{\sqrt{2}}\right) = \lambda_1 m_1 u_{16}^0 + \lambda_2 m_2 u_{26}^0 + \ldots + \lambda_6 m_6 u_{66}^0$$

и тогда

$$\begin{aligned} I_{н\varepsilon} &= \left(a + \frac{i_0}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i_0 + \frac{k}{\sqrt{2}}\right) = \left(a + \sqrt{2}i_0 + \frac{k}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\{(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 2(a_{12} + a_{13} + a_{23})\} = \lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \ldots + \lambda_6 m_6^2 = \mathbf{F^*QF} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Т.е., $I_{н\varepsilon} = a + \sqrt{2}i_0 + k/2$ – линейный инвариант, совпадающий со следом тензора $\mathbf{K}_{ij} = a_{ij\alpha\alpha}$ [17]. Отметим также, что след матрицы $\mathbf{Q}$ также является линейным инвариантом:

$$I_Q = 2b + a + 2p + k = \{(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 2(a_{44} + a_{55} + a_{66})\} \tag{4.15}$$

Аналогично выписываются линейные инварианты $I_{Q^{-1}}$, I_T для матрицы $\mathbf{Q}^{-1}$. Нетрудно проверить, что вектор $\mathbf{F}' = \mathbf{V}_\mathbf{п}^*\mathbf{F} = \mathbf{V}_\mathbf{п}\mathbf{F} = \mathbf{F}$ при повороте не изменяется, поскольку вектор $\mathbf{F}$ представляет собой компоненты шарового тензора. Из соотношения (4.13) следует, что

$$|\mathbf{L}|^2 = (\mathbf{L^*U^* \cdot UL}) = (\mathbf{m^*\lambda^2 m}) = m_1^2\lambda_1^2 + \ldots + m_6^2\lambda_6^2 = \mathbf{F^*Q^2F} \tag{4.16}$$

Аналогично вводится вектор

$$\mathbf{l} = \mathbf{Q^{-1}F} = \left\{\left(C + \frac{N}{\sqrt{2}}\right), \left(\bar{C} + \frac{\bar{N}}{\sqrt{2}}\right), \left(A + \frac{I_0}{\sqrt{2}}\right), \left(J + \frac{M}{\sqrt{2}}\right), \left(\bar{J} + \frac{\bar{M}}{\sqrt{2}}\right), \left(I_0 + \frac{K}{\sqrt{2}}\right)\right\}^T \tag{4.17}$$

для которого $|\mathbf{l}|^2 = m_1^2\lambda_1^{-2} + \ldots + m_6^2\lambda_6^{-2} = \mathbf{F^*Q^{-2}F}$, $(\mathbf{L^* \cdot l}) = 3/2$. Таким образом модули векторов $\mathbf{L}, \mathbf{l}$ и их скалярное произведение $(\mathbf{L^* \cdot l}) = 3/2$ – инварианты. Скалярное произведение $(\mathbf{L^* \cdot l})$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L^* \cdot l}) &= \left(\bar{c} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}\right)\left(C + \frac{N}{\sqrt{2}}\right) + \left(c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right)\left(\bar{C} + \frac{\bar{N}}{\sqrt{2}}\right) + \left(a + \frac{i_0}{\sqrt{2}}\right)\left(A + \frac{I_0}{\sqrt{2}}\right) + \\ &+ \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right)\left(J + \frac{M}{\sqrt{2}}\right) + \left(j + \frac{m}{\sqrt{2}}\right)\left(\bar{J} + \frac{\bar{M}}{\sqrt{2}}\right) + \left(i_0 + \frac{k}{\sqrt{2}}\right)\left(I_0 + \frac{K}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= |\mathbf{L}||\mathbf{l}|\cos(\measuredangle(\mathbf{L}, \mathbf{l})) = 3/2 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Отсюда находим косинус угла рассогласования в шестимерном комплексном пространстве главных осей матриц анизотропии $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^{-1}$:

$$\cos(\measuredangle(\mathbf{L}, \mathbf{l})) = \frac{3}{2|\mathbf{L}||\mathbf{l}|} \tag{4.19}$$

Так как $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^{-1}$ – эрмитовые матрицы, то можно ввести шестимерные вектора

$$\begin{gathered}\mathbf{L}^{(\mathbf{k})} = \mathbf{Q}^{\mathbf{k}}\mathbf{F}, \quad \mathbf{l}^{(\mathbf{k})} = \mathbf{Q}^{-\mathbf{k}}\mathbf{F}, \quad I_{н\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{F}^*\mathbf{Q}^{\mathbf{k}}\mathbf{F}, \quad I_{нT}^{(k)} = \mathbf{F}^*\mathbf{Q}^{-\mathbf{k}}\mathbf{F}, \\ \mathbf{Q}^{\mathbf{k}} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}\mathbf{U}, \quad \mathbf{Q}^{-\mathbf{k}} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\lambda}^{-\mathbf{k}}\mathbf{U}\end{gathered} \tag{4.20}$$

где k – любое число. Для них, как нетрудно видеть, справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}\left|\mathbf{L}^{(\mathbf{k})}\right|^2 = \lambda_1^{2k}m_1^2 + \lambda_2^{2k}m_1^2 + ... + \lambda_6^{2k}m_6^2, \\ \left|\mathbf{l}^{(\mathbf{k})}\right|^2 = \lambda_1^{-2k}m_1^2 + \lambda_2^{-2k}m_1^2 + ... + \lambda_6^{-2k}m_6^2, \quad (\mathbf{L}^{*(\mathbf{k})} \cdot \mathbf{l}^{(\mathbf{k})}) = \frac{3}{2}, \\ I_{н\varepsilon}^{(k)} = \lambda_1^{k}m_1^2 + \lambda_2^{k}m_1^2 + ... + \lambda_6^{k}m_6^2, \quad I_{нT}^{(k)} = \lambda_1^{-k}m_1^2 + \lambda_2^{-k}m_1^2 + ... + \lambda_6^{-k}m_6^2\end{gathered} \tag{4.21}$$

Заметим, что условия (4.5), (4.6) есть условия приведения векторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{l}$ к главным осям, которые аналогичны (2.14). Поэтому существуют повороты (их можно вычислить) осей координат, которые приводят к главным осям матрицы анизотропии $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^{-1}$.

Отметим также, что в случае кратных корней, матрица $\mathbf{U}^*$ согласно (3.1) определяется с точностью до унитарной матрицы $\mathbf{P}$ $(\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{P})$, $\mathbf{U}'^* = \mathbf{U}^*\mathbf{P}^*$. Так как $\mathbf{U}' = \mathbf{P}\mathbf{U}$, $\bar{\mathbf{U}}' = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{U}}$, $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{D}\mathbf{U}$, то отсюда следует, что $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}$ (т.е. $\mathbf{P}$ – действительная ортогональная матрица). Кроме того, инварианты матриц $\mathbf{U}', \mathbf{U}$ связаны соотношением $\mathbf{m}' = \mathbf{U}'\mathbf{F} = \mathbf{PUF} = \mathbf{Pm}$. Поэтому инварианты столбцов матрицы $\mathbf{U}'^*$, соответствующие кратным собственным значениям могут быть выбраны по-разному. Если фиксировать инварианты матрицы $\mathbf{U}'^*$, например, условием $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$, то тогда $\mathbf{P} = \mathbf{E}$. То есть столбцы матрицы $\mathbf{U}'^*$ определяются однозначно (с точностью до множителя $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$).

5. Собственные вектора и собственные значения. Характеристическое уравнение для вычисления собственных значений имеет вид:

$$G(\lambda) = \lambda^6 - J_1\lambda^5 + J_2\lambda^4 - J_3\lambda^3 + J_4\lambda^2 - J_5\lambda + J_6E = 0, \tag{5.1}$$

где $J_i\ (i = 1, 2, \ldots, 6)$ – сумма всех главных миноров матрицы $\mathbf{Q}$ порядка i, а $\boldsymbol{\lambda}$ – диагональная матрица собственных значений. Умножая (5.1) слева на $\mathbf{U}^*$, и справа на $\mathbf{U}$, учитывая (2.18), получим теорему Гамильтона–Кэли, которая утверждает, что матрица $\mathbf{Q}$ удовлетворяет характеристическому уравнению:

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{6}} - J_1\mathbf{Q}^{\mathbf{5}} + J_2\mathbf{Q}^{\mathbf{4}} - J_3\mathbf{Q}^{\mathbf{3}} + J_4\mathbf{Q}^{\mathbf{2}} - J_5\mathbf{Q} + J_6\mathbf{E} = 0 \tag{5.2}$$

Если (5.2) умножим справа на вектор $\mathbf{F}$, то согласно (4.20) будем иметь:

$$\mathbf{L}^{(6)} - J_1\mathbf{L}^{(5)} + J_2\mathbf{L}^{(4)} - J_3\mathbf{L}^{(3)} + J_4\mathbf{L}^{(2)} - J_5\mathbf{L}^{(1)} + J_6\mathbf{F} = 0 \tag{5.3}$$

Если теперь (5.3) умножим слева на вектор $\mathbf{F}^*$, то согласно (4.20) получим:

$$I_{н\varepsilon}^{(6)} - J_1I_{н\varepsilon}^{(5)} + J_2I_{н\varepsilon}^{(4)} - J_3I_{н\varepsilon}^{(3)} + J_4I_{н\varepsilon}^{(2)} - J_5I_{н\varepsilon}^{(1)} + \frac{3}{2}J_6 = 0 \tag{5.4}$$

Нетрудно записать аналоги соотношений (5.3), (5.4) для обратной матрицы:

$$\mathbf{l}^{(6)} - J_1'\mathbf{l}^{(5)} + J_2'\mathbf{l}^{(4)} - J_3'\mathbf{l}^{(3)} + J_4'\mathbf{l}^{(2)} - J_5'\mathbf{l}^{(1)} + J_6'\mathbf{F} = 0 \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered}I_{нT}^{(6)} - J_1'I_{нT}^{(5)} + J_2'I_{нT}^{(4)} - J_3'I_{нT}^{(3)} + J_4'I_{нT}^{(2)} - J_5'I_{нT}^{(1)} + \frac{3}{2}J_6' = 0 \\ J_1' = J_5/J_6, \quad J_2' = J_4/J_6, \quad J_3' = J_3/J_6, \quad J_4' = J_2/J_6, \quad J_5' = J_1/J_6, \quad J_6' = 1/J_6\end{gathered} \tag{5.6}$$

Здесь J_i' – инварианты обратной матрицы.

Рассмотрим вырожденные проективные матрицы (проекторы) вида : $\mathbf{A_i} = \mathbf{u_i u_i^*}$, где $\mathbf{u_i}$ – i столбец матрицы $\mathbf{U}^*$. Они, как нетрудно видеть, обладают следующими свойствами:

$$A_\mathbf{i} = \mathbf{A_i^*}, \quad \mathbf{A_i^2} = \mathbf{A_i}, \quad \mathbf{A_i A_j} = \mathbf{A_j A_i} = \mathbf{0} \quad (i \neq j),$$
$$\mathbf{A_i u_i} = \mathbf{u_i}, \quad \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \ldots + \mathbf{A_6} = \mathbf{E} \tag{5.7}$$

Последнее равенство (5.7) называется разбиением единицы. Из соотношений (3.2), (5.7) следует:

$$\mathbf{QA_i} = \mathbf{A_i Q} = \lambda_i \mathbf{A_i} \tag{5.8}$$

а из соотношений (4.10) имеем:

$$m_i \mathbf{u_i} = \mathbf{A_i F} \tag{5.9}$$

Зависимости (5.7), (5.8) позволяют получить матричные равенства [31]:

$$\begin{gathered}
\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \ldots + \mathbf{A_6} = \mathbf{E} \\
\lambda_1 \mathbf{A_1} + \lambda_2 \mathbf{A_2} + \ldots + \lambda_6 \mathbf{A_6} = \mathbf{Q} \\
\lambda_1^2 \mathbf{A_1} + \lambda_2^2 \mathbf{A_2} + \ldots + \lambda_6^2 \mathbf{A_6} = \mathbf{Q^2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_1^5 \mathbf{A_1} + \lambda_2^5 \mathbf{A_2} + \ldots + \lambda_6^5 \mathbf{A_6} = \mathbf{Q^5}
\end{gathered} \tag{5.10}$$

Система (5.10) представляет линейную систему матричных уравнений с определителем Ван-Дермонда. Сначала рассмотрим случай простых корней. Решение системы уравнений (5.10) записывается в виде [23]:

$$\begin{gathered}
\mathbf{A_n} = \frac{1}{\Delta_n}(\mathbf{Q} - \lambda_1 \mathbf{E})\ldots(\mathbf{Q} - \lambda_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{Q} - \lambda_{n+1}\mathbf{E})\ldots(\mathbf{Q} - \lambda_6 \mathbf{E}), \\
\Delta_n = (\lambda_n - \lambda_1)\ldots(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_n - \lambda_{n+1})\ldots(\lambda_n - \lambda_6)
\end{gathered} \tag{5.11}$$

Соотношения (5.11) можно записать также в развернутом виде:

$$\mathbf{A_n} = \chi_{n1}\mathbf{E} + \chi_{n2}\mathbf{Q} + \chi_{n3}\mathbf{Q}^2 + \chi_{n4}\mathbf{Q}^3 + \chi_{n5}\mathbf{Q}^4 + \chi_{n6}\mathbf{Q}^5 \tag{5.12}$$

причем, коэффициенты $\chi_{n1},\ldots,\chi_{n6}$ легко вычисляются через собственные значения. Например, для $\mathbf{n} = 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\chi_{11} = \frac{J_6}{\lambda_1 k_1}, \quad \chi_{12} = -\frac{\{\lambda_4\lambda_5\lambda_6(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3(\lambda_4(\lambda_5 + \lambda_6) + \lambda_5\lambda_6)\}}{k_1}, \\
&k_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\ldots(\lambda_6 - \lambda_1), \\
&\chi_{13} = \frac{\{\lambda_2\lambda_3(\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) + \lambda_4(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_5 + \lambda_6) + \lambda_5\lambda_6(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}}{k_1}, \\
&\chi_{15} = \frac{1}{k_1}\{J_1 - \lambda_1\}, \\
&\chi_{14} = -\frac{\{\lambda_2\lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) + \lambda_4\lambda_5 + \lambda_4\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6\}}{k_1}, \quad \chi_{16} = -\frac{1}{k_1}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Из (5.13) видно, что в знаменателях коэффициентов $\chi_{11},\ldots,\chi_{16}$ стоит величина k_1, а в числителях главные инварианты матрицы $\mathbf{Q}$ (выраженные через собственные значения), в которых отсутствуют члены с λ_1. Вычисляя по формулам (5.12) проекторы $\mathbf{A_n}$, определим собственные вектора $\mathbf{u_n}$ и инварианты m_n $(n = 1, 2, \ldots, 6)$.

Можно поступить и по-другому. Умножая соотношение (5.12) справа на вектор **F** и учитывая (5.9), получим:

$$\begin{aligned} m_n\mathbf{u_n} &= (\chi_{n1}\mathbf{E} + \chi_{n2}\mathbf{Q} + \chi_{n3}\mathbf{Q^2} + \chi_{n4}\mathbf{Q^3} + \chi_{n5}\mathbf{Q^4} + \chi_{n6}\mathbf{Q}^5)\mathbf{F} = \\ &= (\chi_{n1}\mathbf{F} + \chi_{n2}\mathbf{L^{(1)}} + \chi_{n3}\mathbf{L^{(2)}} + \chi_{n4}\mathbf{L^{(3)}} + \chi_{n5}\mathbf{L^{(4)}} + \chi_{n6}\mathbf{L^{(5)}}) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Умножая (5.14) слева на вектор $\mathbf{F}^*$ будем иметь:

$$m_n^2 = \frac{3}{2}\chi_{n1} + \chi_{n2}I_{н\varepsilon}^{(1)} + \chi_{n3}I_{н\varepsilon}^{(2)} + \chi_{n4}I_{н\varepsilon}^{(3)} + \chi_{n5}I_{н\varepsilon}^{(4)} + \chi_{n6}I_{н\varepsilon}^{(5)} \geq 0, \quad (n = 1, 2, \ldots, 6) \tag{5.15}$$

Из (5.15) определяем m_n со знаком "+" перед радикалом (вектора $\mathbf{u_n}$ определяются с точностью до произвольного множителя $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$). Если все $m_n \neq 0$, то из (5.14), (5.15) однозначно определяются вектора $\mathbf{u_n}$ (с точностью множителя $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$). Они, как нетрудно видеть, составляют ортонормируемый базис, и следовательно, известна матрица **U***.

Если, например, $m_1 = m_2 = 0$, а остальные инварианты $m_i \neq 0$, $(i = 3, 4, 5, 6)$ не равны нулю, то из (5.14) имеем:

$$\begin{aligned} 0 = m_1\mathbf{u_1} &= (\chi_{11}\mathbf{E} + \chi_{12}\mathbf{Q} + \chi_{13}\mathbf{Q^2} + \chi_{14}\mathbf{Q^3} + \chi_{15}\mathbf{Q^4} + \chi_{16}\mathbf{Q^5})\mathbf{F}, \\ 0 = m_2\mathbf{u_2} &= (\chi_{21}\mathbf{E} + \chi_{22}\mathbf{Q} + \chi_{23}\mathbf{Q^2} + \chi_{24}\mathbf{Q^3} + \chi_{25}\mathbf{Q^4} + \chi_{26}\mathbf{Q^5})\mathbf{F} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Из этой системы уравнений определяем $\mathbf{Q^4F}$, $\mathbf{Q^5F}$ и подставим в (5.14), тогда получим соотношения:

$$m_n\mathbf{u_n} = (\chi'_{n1}\mathbf{E} + \chi'_{n2}\mathbf{Q} + \chi'_{n3}\mathbf{Q^2} + \chi'_{n4}\mathbf{Q^3})\mathbf{F} \tag{5.17}$$

в которых $\chi'_{n1}, \chi'_{n2}, \chi'_{n3}, \chi'_{n4}$ уже не зависят от λ_1, λ_2. Вектора $m_n\mathbf{u_n}$ можно так же получить непосредственно из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} m_3\mathbf{u_3} + \ldots + m_6\mathbf{u_6} &= \mathbf{F} \\ \lambda_3 m_3\mathbf{u_3} + \ldots + \lambda_6 m_6\mathbf{u_6} &= \mathbf{QF} \\ \lambda_3^2 m_3\mathbf{u_3} + \ldots + \lambda_6^2 m_6\mathbf{u_6} &= \mathbf{Q^2F} \end{aligned}$$

которая получается из (5.10), если первые три уравнения умножить справа на **F** и учесть (5.9). Значения инвариантов m_n определяются соотношениями:

$$m_n^2 = \frac{3}{2}\chi'_{n1} + \chi'_{n2}I_{н\varepsilon}^{(1)} + \chi'_{n3}I_{н\varepsilon}^{(2)} + \chi'_{n4}I_{н\varepsilon}^{(3)} > 0, \quad (n = 3, \ldots, 6) \tag{5.18}$$

Тогда известны $\mathbf{u_n}$, а следовательно, и $\mathbf{A_n}$. Затем из первых двух уравнений (5.10) определяются проекторы $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, а по ним и вектора $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$.

В случае кратных корней формулы (5.11) для вычисления проекторов остаются в силе, но с некоторыми видоизменениями. Пусть, для примера, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, а остальные корни простые. Объединяя проекторы $\mathbf{A_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, соответствующие кратному корню λ_1 в один проектор $\mathbf{A'_1}$, и обозначая $\mathbf{A'_1} = \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_3}$ получим систему уравнений в виде (спектральное разложение) [31]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A'_1} + \mathbf{A_4} + \mathbf{A_5} + \mathbf{A_6} &= \mathbf{E} \\ \lambda_1\mathbf{A'_1} + \lambda_4\mathbf{A_4} + \lambda_5\mathbf{A_4} + \lambda_6\mathbf{A_6} &= \mathbf{Q} \\ \lambda_1^2\mathbf{A'_1} + \lambda_4^2\mathbf{A_4} + \lambda_5^2\mathbf{A_5} + \lambda_6^2\mathbf{A_6} &= \mathbf{Q^2} \\ \lambda_1^3\mathbf{A'_1} + \lambda_4^3\mathbf{A_4} + \lambda_5^3\mathbf{A_5} + \lambda_6^3\mathbf{A_6} &= \mathbf{Q^3} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Отсюда по формулам (5.12) определяем $\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6$. Тогда известны $\mathbf{u}_n$, m_n $(n = 4, 5, 6)$, и

$$\begin{gathered}\mathbf{A}'_1\mathbf{F} = (m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 + m_3\mathbf{u}_3) = (\chi_{11}\mathbf{E} + \chi_{12}\mathbf{Q} + \chi_{13}\mathbf{Q}^2 + \chi_{14}\mathbf{Q}^3)\mathbf{F} \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \frac{3}{2}\chi_{11} + \chi_{12}I_{н\varepsilon}^{(1)} + \chi_{13}I_{н\varepsilon}^{(2)} + \chi_{14}I_{н\varepsilon}^{(3)}\end{gathered} \tag{5.20}$$

Поскольку λ_1 — трехкратный корень, то матрица $\mathbf{U}^*$ определяется с точностью до действительной ортогональной матрицы $\mathbf{P}$, размера 3×3. Вычисление собственных векторов $\mathbf{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, соответствующих трехкратному собственному значению λ_1 лучше всего проводить непосредственно как решения системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{Q} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{u}_i = 0$. Ранг матрицы $(\mathbf{Q} - \lambda_1\mathbf{E})$ в данном случае равен трем, и найденные вектора будут зависеть от трех свободных параметров, что соответствует свободным параметрам ортогональной действительной матрицы $\mathbf{P}$. Первое и второе соотношения (5.20) в данном случае служат для контроля вычисления. Регулируя свободные параметры определенным образом можно добиться того, чтобы инварианты m_1, m_2, m_3 достигали определенных значений.

Заметим, что если имеются кратные корни характеристического уравнения, то все корни вычисляются в радикалах. В случае простых корней и при определенных значениях инвариантов m_i они могут быть вычислены тоже в радикалах. Ниже будут приведены примеры.

6. Примеры. Поставим вопрос так. Какая должна быть структура матрицы упругих параметров $\mathbf{Q}$, чтобы вектор $\mathbf{L}$ (4.12) был инвариантен относительно трехмерных поворотов? Нетрудно видеть, что данном случае $\mathbf{L} = c_0\mathbf{F}$, где c_0 — скаляр, а $\mathbf{F}$ — вектор (4.10), компоненты которого соответствуют шаровому тензору. В покомпонентной записи имеем:

$$c_0 = (a + i_0/\sqrt{2}), \quad (c + n/\sqrt{2}) = (j + m/\sqrt{2}) = 0, \quad (i_0 + k/\sqrt{2}) = (a + i_0/\sqrt{2})/\sqrt{2} \tag{6.1}$$

в любой системе координат. В справедливости (6.1) можно убедиться и непосредственно, используя таблицы преобразования упругих модулей (раздел “полезные соотношения”). При выполнении (6.1) выполняются соотношения (6.1) и для преобразованных упругих модулей. В силу инвариантности компонент вектора $\mathbf{L}$ и произвольности углов $(\Omega, \theta, \varphi)$ из таблиц следует (6.1), а также (6.1) для преобразованных модулей. Таким образом, все величины, стоящие в соотношениях (6.1), инварианты в любой системе координат. Как нетрудно убедиться число независимых упругих параметров матрицы $\mathbf{Q}$ не более 16.

Из соотношений (4.13), (6.1) нетрудно получить:

$$\{(a + i_0/\sqrt{2})\mathbf{E} - \boldsymbol{\lambda}\}\mathbf{m} = 0 \tag{6.2}$$

Поэтому хотя бы один корень характеристического уравнения всегда равен $(a + i_0/\sqrt{2})$. Если $m_i \neq 0$, то $\lambda_i = (a + i_0/\sqrt{2})$.

Рассмотрим случай простых корней. Можно считать, что $\lambda_3 = (a + i_0/\sqrt{2})$, т.к. всегда можно переставить столбцы и собственные значения и их переобозначить согласно вышеприведенному замечанию в п. 3. Тогда из соотношений (4.10), (4.13), (6.2) получим:

$$m_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad m_i = 0 \quad (i = 1, 2, 4, 5, 6), \quad \mathbf{u}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{F} \tag{6.3}$$

Из соотношений (4.10), (4.20), (6.3) следует:

$$\mathbf{L^{(k)}} = \lambda_3^k \mathbf{F}, \quad \mathbf{l^{(k)}} = \lambda_3^{-k}\mathbf{F}, \quad (k = 1, 2, \ldots\ldots) \tag{6.4}$$

Т.е. все вектора $\mathbf{L^{(k)}}$, $\mathbf{l^{(k)}}$ пропорциональны вектору $\mathbf{F}$. Но тогда

$$\begin{gathered}(c^{(k)} + n^{(k)}/\sqrt{2}) = (j^{(k)} + m^{(k)}/\sqrt{2}) = 0, \quad (i_0^{(k)} + k^{(k)}/\sqrt{2}) = (a^{(k)} + i_0^{(k)}/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \\ (C^{(k)} + N^{(k)}/\sqrt{2}) = (J^{(k)} + M^{(k)}/\sqrt{2}) = 0, \quad (I_0^{(k)} + K^{(k)}/\sqrt{2}) = (A^{(k)} + I_0^{(k)}/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \\ \left|\mathbf{L^{(k)}}\right| = \lambda_3^k m_3, \quad \left|\mathbf{l^{(k)}}\right| = \lambda_3^{-k} m_3, \quad \cos(\measuredangle(\mathbf{L^{(k)}}, \mathbf{l^{(k)}})) = 1\end{gathered} \tag{6.5}$$

Последнее соотношение (6.5) показывает, что в шестимерном пространстве рассогласование главных осей анизотропии матриц $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^{-1}$ отсутствует. Угол рассогласования $\measuredangle(\mathbf{L}, \mathbf{l}) = 0$.

Учитывая (4.4), (6.5) получаем связь между первыми инвариантами тензоров деформаций и напряжений:

$$I_\varepsilon = \lambda_3 I_T = (a + i_0/\sqrt{2}) I_T, \quad I_{\text{нε}} = \frac{3}{2}\lambda_3 \tag{6.6}$$

Рассмотрим в шестимерном комплексном пространстве ортонормируемый базис следующего вида:

$$\begin{gathered}\mathbf{e_1} = (x, \bar{x}, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{e_2} = (\bar{x}, x, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{e_3} = (0, 0, \sqrt{2}/\sqrt{3}, 0, 0, 1/\sqrt{3})^T \\ \mathbf{e_4} = (0, 0, 0, x, \bar{x}, 0)^T, \quad \mathbf{e_5} = (0, 0, 0, \bar{x}, x, 0)^T, \quad \mathbf{e_6} = (0, 0, -1/\sqrt{3}, 0, 0, \sqrt{2}/\sqrt{3})^T \\ x = \frac{1}{2}(1 + i), \quad \bar{x} = \frac{1}{2}(1 - i)\end{gathered} \tag{6.7}$$

Матрицу, составленную из столбцов (6.7) обозначим через $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S = (e_1, e_2, \ldots, e_6)} \tag{6.8}$$

Теперь рассмотрим изотропное тело, для которого $p = b$, $i_0 = (a - b)/\sqrt{2}$, $k = (a + b)/2$, остальные упругие модули равны нулю, а собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = b$, $\lambda_3 = (3a - b)/2$. При этом $\mathbf{U^* = S}$.

Инварианты у матрицы $\mathbf{U}^*$ для изотропного тела такие же, как и соответствующие инварианты у рассматриваемой выше матрицы $\mathbf{Q}$. Связь между первыми инвариантами тензоров деформаций и напряжений в обоих случаях одна и та же, и дается формулой (6.6). Разница заключается в том, что в первом случае у матрицы $\mathbf{Q}$ все корни простые, а для изотропного тела – один корень кратности пять и один кратности один. В первом случае имеем частный вид триклинной сингонии, во втором случае имеем изотропное тело. Для первого случая главные оси тензоров напряжений и деформаций рассогласованные, для второго случая они соосны.

Рассмотрим второй пример, для которого $m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = 0$, $m_3 = 1$, $m_6 = 1/\sqrt{2}$. Запишем систему уравнений

$$\begin{gathered}m_3\mathbf{u_3} + m_6\mathbf{u_6} = \mathbf{F} \\ \lambda_3 m_3 \mathbf{u_3} + \lambda_6 m_6 \mathbf{u_6} = \mathbf{QF}\end{gathered} \tag{6.9}$$

решение которой дает:

$$\mathbf{u_3} = \frac{(\mathbf{Q} - \lambda_6\mathbf{E})\mathbf{F}}{(\lambda_3 - \lambda_6)} =$$

$$= \frac{(c + n/\sqrt{2}, \bar{c} + \bar{n}/\sqrt{2}, a + i_0/\sqrt{2} - \lambda_6, \bar{j} + m/\sqrt{2}, j + \bar{m}/\sqrt{2}, i_0 + k/\sqrt{2} - \lambda_6/\sqrt{2})^T}{(\lambda_3 - \lambda_6)},$$

$$\lambda_3 \neq \lambda_6, \tag{6.10}$$

$$\mathbf{u_6} = \frac{\sqrt{2}(\lambda_3\mathbf{E} - \mathbf{Q})\mathbf{F}}{(\lambda_3 - \lambda_6)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(-(c+n/\sqrt{2}), -(\bar{c}+\bar{n}/\sqrt{2}), \lambda_3 - (a+i_0/\sqrt{2}), -(\bar{j}+m/\sqrt{2}), -(j+\bar{m}/\sqrt{2}), \lambda_3/\sqrt{2} - (i_0 + k/\sqrt{2}))^T}{(\lambda_3 - \lambda_6)}$$

Условия того, что $|\mathbf{u_3}| = |\mathbf{u_6}| = 1$ и соотношения (6.10) позволяют определить собственные упругие модули λ_3, λ_6:

$$(\lambda_3)_{1,2} = \frac{(2I_{\text{нε}} \mp D_0)}{3} > 0, \quad (\lambda_6)_{1,2} = \frac{2(I_{\text{нε}} \pm D_0)}{3} > 0,$$
$$D_0^2 = (k + i_0/\sqrt{2} - a)^2 + 6(|c + n/\sqrt{2}|^2 + |\bar{j} + m/\sqrt{2}|^2) \geq 0 \tag{6.11}$$

Заметим, что условия ортогональности векторов $\mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_6}$ выполняется автоматически. Нетрудно вычислить $|\mathbf{L}|^2$, $I_{\text{нε}}$:

$$|\mathbf{L}|^2 = 2\left|c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right|^2 + 2\left|j + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left(a + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(i + \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 = \lambda_3^2 + \frac{\lambda_6^2}{2},$$
$$I_{\text{нε}} = \lambda_3 + \frac{\lambda_6}{2} \tag{6.12}$$

Отсюда следует уравнение:

$$\lambda_6^2 - \frac{4\lambda_6}{3}I_{\text{нε}} + \frac{4}{3}(I_{\text{нε}}^2 - |\mathbf{L}|^2) = 0$$

корни которого

$$(\lambda_6)_{1,2} = \frac{2}{3}(I_{\text{нε}} \pm \sqrt{3|\mathbf{L}|^2 - 2I_{\text{нε}}^2}) \tag{6.13}$$

Сравнивая (6.11) и (6.13), получим:

$$\lambda_6 = \frac{2}{3}(I_{\text{нε}} \pm D_0) = \frac{2}{3}(I_{\text{нε}} \mp (\lambda_3 - \lambda_6)) \tag{6.14}$$

Соотношения (6.14) дают два варианта: 1) $\lambda_6 = \frac{2}{3}(I_{\text{нε}} - (\lambda_3 - \lambda_6))$, и тогда

$$\lambda_3 = \frac{(2I_{\text{нε}} + D_0)}{3}, \quad \lambda_6 = \frac{2(I_{\text{нε}} - D_0)}{3} \tag{6.15}$$

2) $\lambda_6 = \frac{2}{3}(I_{\text{нε}} + (\lambda_3 - \lambda_6))$, и тогда $5\lambda_6 - 2\lambda_3 = 2I_{\text{нε}}$, $\lambda_3 + \frac{\lambda_6}{2} = I_{\text{нε}}$, следовательно

$$\lambda_6 = \lambda_3 = \frac{2}{3}I_{\text{нε}} \tag{6.16}$$

Поэтому в случае разных корней λ_3, λ_6 реализуется первый вариант, и корни λ_3, λ_6 определяются однозначно по формулам (6.15). Но, тогда остальные корни характеристического уравнения вычисляются в радикалах.

Для случая кратных корней $\lambda_3 = \lambda_6$, система уравнений, аналогичная (6.9) дает соотношение: $(\mathbf{Q} - \lambda_3\mathbf{E})\mathbf{F} = 0$, из которого следуют соотношения (6.5), (6.6), справедливые в любой системе координат.

В первом примере все корни простые, во втором — имеется двукратный корень, но тем не менее оба анизотропных материала обладают общими свойствами (6.5), (6.6). По всей видимости, существуют (во всяком случае теоретически) анизотропные материалы и с другим распределением кратностей корней, которые обладают свойствами (6.5), (6.6). В этом направлении необходимо провести более детальные исследования. Приведенные примеры показывают, что инварианты m_i несут в себе важную информацию о структуре анизотропного материала.

Отметим, что, если два, три, четыре инварианта m_i — нулевые, то собственные значения λ_i вычисляются в радикалах.

7. Матрицы Хаусхольдера. Приведение матрицы упругих параметров к каноническому виду. Рассмотрим произвольный комплексный вектор $\mathbf{w}$ и построим матрицу Хаусхольдера (матрицу отражений) [25]:

$$\mathbf{U_w} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{2}}{|\mathbf{w}|^2}\mathbf{ww}^*, \quad |\mathbf{w}|^2 = (\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}) \tag{7.1}$$

Матрица Хаусхольдера обладает свойствами: $\mathbf{U}^*_\mathbf{w} = \mathbf{U_w}$, $\mathbf{U}^2_\mathbf{w} = \mathbf{E}$ — т.е. она унитарна, эрмитова. Кроме того $\mathbf{U_w w} = -\mathbf{w}$, и если вектор $\mathbf{g}$ — ортогонален вектору $\mathbf{W}$, то $\mathbf{U_w g} = \mathbf{g}$ [25].

Докажем следующую *лемму*. Рассмотрим два произвольных вектора вида $\mathbf{x} = (x_2, \bar{x}_2, x_1^0, x_3, \bar{x}_3, x_5^0)^T$, $\mathbf{y} = (y_2, \bar{y}_2, y_1^0, y_3, \bar{y}_3, y_5^0)^T$, причем $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$. Тогда существует матрица Хаусхольдера $\mathbf{U_w}$ такая, которая переводит вектор $\mathbf{x}$ в $\mathbf{y}$, и наоборот. То есть,

$$\mathbf{U_w x} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{U_w y} = \mathbf{x}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Положим $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, и образуем матрицу Хаусхольдера вида (7.2). Для векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, в силу их структуры, имеем: $(\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{y}^* \cdot \mathbf{x})$, $|\mathbf{w}|^2 = \mathbf{2}(|\mathbf{x}|^2 - (\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{y}))$, и $(\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{w}|^2$. Здесь учтено, что $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$. Определим, куда переходит вектор $\mathbf{x}$ при действии на него матрицы $\mathbf{U_w}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{U_w x} &= \mathbf{x} - \frac{2}{|\mathbf{w}|^2}\mathbf{w}(\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*)\mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{2}{|\mathbf{w}|^2}\mathbf{w}(|\mathbf{x}|^2 - (\mathbf{y}^* \cdot \mathbf{x})) = \\ &= \mathbf{x} - \frac{2\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\left(|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^2 + \frac{\mathbf{1}}{2}|\mathbf{w}|^2\right) = \mathbf{y}\end{aligned} \tag{7.3}$$

Умножая (7.3) слева на матрицу $\mathbf{U_w}$, получим второе соотношение (7.2).

Теперь образуем матрицу Хаусхольдера:

$$\mathbf{U_6} = \mathbf{E} - \frac{2}{|\mathbf{y_6}|^2}\mathbf{y_6 y_6^*}, \quad \mathbf{y_6} = \mathbf{u_6} - \mathbf{e_6} \tag{7.4}$$

где $\mathbf{e_i}$ — базисные вектора матрицы $\mathbf{S}$ (6.8). Тогда $\mathbf{U_6 u_6} = \mathbf{e_6}$. То есть вектор $\mathbf{u_6}$ переходит в вектор $\mathbf{e_6}$. Обозначим $\mathbf{u_i^{(6)}} = \mathbf{U_6 u_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, $\mathbf{U_6^{*(6)}} = \mathbf{U_6 U^*}$, $\mathbf{Q_6} = \mathbf{U_6 Q U_6} = \mathbf{U_6^{*(6)} \boldsymbol{\lambda} U_6^{(6)}}$. Тогда

$$\mathbf{Q_6 e_6} = \lambda_6 \mathbf{e_6} \tag{7.5}$$

Из соотношений (6.8), (7.4) следует, что $\mathbf{\bar{U}_6 = DU_6D}$, и тогда с учетом (2.17), имеем: $\mathbf{\bar{U}_6^{*(6)}} = \mathbf{DU_6^{*(6)}}$, $\mathbf{\bar{Q}_6 = DQ_6D}$. То есть матрицы $\mathbf{Q, U}$ переходят, соответственно, в матрицы $\mathbf{Q_6}$, $\mathbf{U_6^{(6)}}$ не меняя своей структуры. Поэтому все результаты справедливые для матриц $\mathbf{Q, U}$ остаются в силе и для матриц $\mathbf{Q_6}$, $\mathbf{U^{*(6)}}$, при этом, матрица собственных значений матриц $\boldsymbol{\lambda}$ у матриц $\mathbf{Q, Q_6}$ одна и та же.

Далее рассмотрим матрицу Хаусхольдера следующего вида:

$$\mathbf{U_5 = E} - \frac{2}{|\mathbf{y_5}|^2}\mathbf{y_5 y_5^*}, \quad \mathbf{y_5 = u_5^{(6)} - e_5} \tag{7.6}$$

При ее действии на вектора выполняются соотношения (выводятся по аналогии с действием матрицы $\mathbf{U_6}$): $\mathbf{U_5 u_5 = e_5}$, $\mathbf{u_i^{(5)} = U_5 u_i}$, $\mathbf{\bar{U}_5^{*(5)} = DU_5^{*(5)}}$, $\mathbf{\bar{Q}_5 = DQ_5D}$, $\mathbf{Q_5 e_5} = \lambda_5 \mathbf{e_5}$. При этом матрицы $\mathbf{Q_6, U^{(6)}}$ переходят, соответственно, в матрицы $\mathbf{Q_5, U_5^{(5)}}$ не меняя своей структуры, а вектор $\mathbf{e_6}$ остается на месте (т.к. вектор $\mathbf{e_6}$ ортогонален векторам $\mathbf{e_5, u_5^{(6)}}$). Строя и применяя последовательно матрицы Хаусхольдера $\mathbf{U_4, U_3, U_2, U_1}$, получим, что общее комбинированное унитарное преобразование $\mathbf{U_k = U_1U_2U_3U_4U_5U_6}$ переводит матрицу $\mathbf{U^*}$ в $\mathbf{S}$, а матрицу $\mathbf{Q}$ – в матрицу $\mathbf{Q}_k$, где

$$\mathbf{S = U_k U^*}, \quad \mathbf{Q_k = S\lambda S^* = U_k Q U_k^*} \tag{7.7}$$

Если ввести вектора $\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{SU}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{SUT} = \mathbf{S}\boldsymbol{\alpha}$, то закон Гука запишется в форме:

$$\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{Q_k}\boldsymbol{\alpha}' \tag{7.8}$$

Вектора $\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\alpha}'$ ($\bar{\boldsymbol{\beta}}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\beta}'$, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}'$) представляют комплексные компоненты, соответственно, тензоров деформаций и напряжений. При этом упругий потенциал, как нетрудно видеть, не изменяется: $4\tilde{P} = (\boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{T}) = (\boldsymbol{\beta}^* \cdot \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\beta}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{\alpha}')$.

Из соотношений (2.4), (6.7), (6.8), (7.7) получаем каноническое представление матрицы упругих параметров через ее собственные значения:

$$\mathbf{Q_k} = \begin{pmatrix} b_k & d_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_k & b_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_k & 0 & 0 & i_{0k} \\ 0 & 0 & 0 & p_k & q_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{q}_k & p_k & 0 \\ 0 & 0 & i_{0k} & 0 & 0 & k_k \end{pmatrix}$$

$$b_k = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}, \quad d_k = \frac{i(\lambda_1 - \lambda_2)}{2}, \quad a_k = \frac{(2\lambda_3 + \lambda_6)}{3}, \quad i_{0k} = \frac{\sqrt{2}(\lambda_3 - \lambda_6)}{3} \tag{7.9}$$
$$p_k = \frac{(\lambda_4 + \lambda_5)}{2}, \quad q_k = \frac{i(\lambda_4 - \lambda_5)}{2}, \quad k_k = \frac{(\lambda_3 + 2\lambda_6)}{3}, \quad a_k = \frac{i_{0k}}{\sqrt{2}} + k_k$$

Матрица $\mathbf{Q_k^{-1}}$ имеет ту же структуру, что и матрица $\mathbf{Q_k}$. Чтобы получить ее элементы необходимо в (7.9) заменить λ_i на λ_i^{-1}. Таким образом, с помощью унитарного преобразования в шестимерном евклидовом пространстве матрицу упругих модулей $\mathbf{Q}$ можно привести к каноническому виду, в котором все упругие модули однозначно выражаются через собственные упругие модули, а закон Гука записывается в форме (7.9).

Соотношения (7.7)–(7.9) можно также получить чисто формально из закона Гука. Действительно, из соотношения $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{QT} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\lambda}\mathbf{UT}$ следует, что $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{U}\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda\mathbf{UT} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$. Умножим это равенство слева на матрицу $\mathbf{S}$ (6.8), тогда получим закон Гука в форме (7.8), и все остальные соотношения (7.7)–(7.9). Из (7.7) определяется матрица $\mathbf{U_k} = \mathbf{SU}$, при этом инварианты m_i, вообще говоря, изменяются. Нетрудно видеть, что соотношения (7.7)–(7.9) – это запись закона Гука в базисе (6.7), когда $\mathbf{U}^* = \mathbf{S}$.

Каноническая матрица $\mathbf{Q_k}$ обладает свойствами (6.5), (6.6), ее можно строить по-разному, главное, чтобы ее вид был наиболее простой. Например, если в качестве базисных векторов выбрать матрицу в виде (6.7), где вектора $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_4}$, $\mathbf{e_5}$ остаются прежними, а вектора $\mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_6}$ заменяются на вектора $\mathbf{e_3} = (0,0,1,0,0,0)^T$, $\mathbf{e_6} = (0,0,0,0,0,1)^T$, то в результате каноническая матрица $\mathbf{Q_k}$ будет иметь вид (7.9). При этом, $i_{0k} = 0$, $a_k = \lambda_3$, $k_k = \lambda_6$, остальные коэффициенты остаются прежними, и инварианты m_3, m_6 – сохраняются. Матрица $\mathbf{Q_k}$ расщепилась, ее первые верхние три строки описывают плоскую деформацию, а три нижние – пространственную деформацию, типа кручения с осевым растяжением.

Далее рассмотрим следующий базис:

$$\begin{gathered}
\mathbf{e_1} = (1/2\,,1/2\,,0,1/2\,,1/2\,,0)^T, \quad \mathbf{e_2} = (i/2\,,-i/2\,,0,i/2\,,-i/2\,,0)^T \\
\mathbf{e_3} = (0,0,\sqrt{2}/\sqrt{3}\,,0,0,1/\sqrt{3})^T, \quad \mathbf{e_4} = (-1/2\,,-1/2\,,0,1/2\,,1/2\,,0)^T \\
\mathbf{e_5} = (i/2\,,-i/2\,,0,-i/2\,,i/2\,,0)^T, \quad \mathbf{e_6} = (0,0,-1/\sqrt{3},0,0,\sqrt{2}/\sqrt{3})^T
\end{gathered}$$

Тогда

$$\mathbf{Q_k} = \begin{pmatrix} b & d_0 & 0 & e_0 & g_0 & 0 \\ d_0 & b & 0 & g_0 & e_0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & i_0 \\ e_0 & g_0 & 0 & b & d_0 & 0 \\ g_0 & e_0 & 0 & d_0 & b & 0 \\ 0 & 0 & i_0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered}
c = n = j = m = 0, \quad b = p = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5)/4 \\
q = d_0 = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_5)/4, \quad e_0 = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5)/4 \\
g_0 = (\lambda_1 + \lambda_5 - \lambda_2 - \lambda_4)/4, \quad a = (2\lambda_3 + \lambda_6)/3 \\
i_0 = \sqrt{2}(\lambda_3 - \lambda_6)/3, \quad k = (\lambda_3 + 2\lambda_6)/3
\end{gathered} \tag{7.10}$$

Таким образом, канонический базис можно выбирать по-разному, по усмотрению исследователя. Заметим, что если умножить закон Гука в форме (7.8) слева на матрицу поворота $\mathbf{V_n}$, то он запишется в виде:

$$\boldsymbol{\beta}'' = \mathbf{Q}'_\mathbf{k}\boldsymbol{\alpha}'', \quad \boldsymbol{\beta}'' = \mathbf{V_n}\boldsymbol{\beta}', \quad \boldsymbol{\alpha}'' = \mathbf{V_n}\boldsymbol{\alpha}', \quad \mathbf{Q}'_\mathbf{k} = \mathbf{V_n}\mathbf{Q_k}\mathbf{V}_\mathbf{n}^* \tag{7.11}$$

При этом, коэффициенты матрицы $\mathbf{Q}'_\mathbf{k}$ выражаются через собственные упругие модули λ_i и три угла поворота (ξ_1,ξ_2,φ), но базовой точкой отсчета является канонический базис (6.7), выбранный в какой-либо форме.

8. О классификации анизотропных материалов. В работах [19–21] предложена классификация анизотропных упругих материалов с помощью собственных упругих модулей и их кратностей. Более точно, это выглядит так. Каждому анизотропному материалу ставится в соответствие структурный символ $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r)$, причем $r \le 6$, $\gamma_r \ge 1$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_r = 6$, где r – число различных собственных модулей λ_i, а γ_i – их кратности.

При этом все упругие собственные модули занумерованы в порядке убывания. Как показано в работах [19–21], все материалы разбиваются на 32 класса, и каждому материалу однозначно соответствует символ $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$, который характеризует структуру материала.

Сделаем одно замечание. Если перейти от закона Гука, записанного в комплексных переменных в форме (2.3) к закону Гука, записанному в действительных переменных с помощью невырожденной матрицы, которая легко составляется на основе соотношений (2.2), то матрицы упругих параметров в действительных и комплексных переменных будут подобны. Следовательно, их собственные модули (собственные значения) совпадают. Ранее было указано, что диагональные элементы матрицы λ мы можем располагать в любом порядке. Поэтому предложенная в [19–21] методика классификации анизотропных упругих материалов проходит и в нашем случае. Проводить подобную классификацию лучше всего на основе канонического представления матрицы упругих параметров, например, в форме (7.9). При этом все матрицы упругих параметров разбиваются на 32 класса эквивалентности. А именно, все матрицы, подобные канонической форме матрицы упругих параметров с одинаковым структурным символом относятся к одному и тому же классу.

Возьмем два анизотропных материала триклинной и моноклинной сингоний, у которых собственные упругие модули представляют простые корни соответствующих характеристических уравнений. Такие матрицы, как нетрудно видеть, существуют. Диагональные матрицы собственных значений у этих сингоний λ – различны, но структурные символы одинаковы и равны $(1,1,1,1,1,1)$. Одинаковый структурный символ соответствует разным сингониям. Поэтому структурный символ является необходимым, но не достаточным условием классификации анизотропных материалов. В работе [19] отмечается, что для более детальной классификации анизотропных материалов необходимо учитывать собственные векторы и собственные значения. Это сделано в работе [22] для всех сингоний, за исключением триклинной (главной) сингонии. В этом направлении для триклинной сингонии необходимо провести более детальный (не простой) анализ с использованием информации об инвариантах m_i собственных векторов, собственных значений, и т.д. Но эта тема отдельного исследования, которая не является предметом исследования данной работы.

9. Об одной инвариантной форме закона Гука. Столбцы матрицы $\mathbf{U}^*$ представляют комплексные компоненты симметричных тензоров второго ранга, поэтому с помощью трехмерного поворота можно привести, например, первый столбец матрицы $\mathbf{U}^*$ к главным осям. Систему координат, в которой первый столбец матрицы $\mathbf{U}^*$ приведен к главным осям назовем базовой системой координат № 1 (или базой 1). В базе 1 первый столбец (см. (2.14)) имеет вид: $\mathbf{u}_1^{(1)} = (u_2^{0(1)}, u_2^{0(1)}, u_1^{0(1)}, 0, 0, u_5^{0(1)})^T$. Но тогда существует и обратный поворот $\mathbf{V}_\mathbf{n}^{(1)}$, который вектор $\mathbf{u}_1^{(1)}$ из базы 1 переводит в вектор $\mathbf{u}_1$ исходной системы координат, и при этом $\mathbf{u}_1 = \mathbf{V}_\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{u}_1^{(1)}$. Аналогичные рассуждения проходят для любого столбца матрицы $\mathbf{U}^*$, причем у каждого столбца будет своя база, и $\mathbf{u}_\mathbf{k} = \mathbf{V}_\mathbf{n}^{(\mathbf{k})}\mathbf{u}_\mathbf{k}^{(\mathbf{k})}$. Тогда матрицу $\mathbf{U}^*$ в исходной системе координат и закон Гука можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_6) = \mathbf{V}_\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{U}'^*(\mathbf{u}_1^{(1)}, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_6),\\ \mathbf{u}'_\mathbf{k} = \mathbf{V}_\mathbf{n}^{*(1)} \cdot \mathbf{V}_\mathbf{n}^{(\mathbf{k})} \cdot \mathbf{u}_\mathbf{k}^{(\mathbf{k})}, \quad (k = 2, 3, \ldots, 6)\end{gathered} \tag{9.1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{V}_\mathbf{n}^{*(1)}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{U}'^*\lambda\mathbf{U}'\mathbf{T}', \quad \mathbf{T}' = \mathbf{V}_\mathbf{n}^{*(1)}\mathbf{T}' \tag{9.2}$$

Нетрудно видеть, что закон Гука в форме (9.2), записанной в базовой системе координат № 1 – представлен в инвариантной форме. Все вектора $\boldsymbol{\varepsilon}'$, $\mathbf{T}'$, матрица $\mathbf{U}'^*$ не за-

Таблица 1

	1. Преобразование действительных модулей
1	$\begin{aligned} b' = {} & \left\{\cos^2 2\varphi + \frac{\sin^4 2\varphi}{8}\right\} b + \frac{\sin^4 2\varphi}{4}\left\{\frac{a}{2} + k - \sqrt{2} i_0 + \frac{x_1^0}{4} - x_8^0\right\} + \\ & + \sin^2 2\varphi\left\{1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right\}\left\{p + \frac{\sqrt{2}}{4}(x_2^0 - \sqrt{2} x_5^0)\right\} + \\ & + \frac{\sin 4\varphi}{2}\left\{1-\frac{\sin^2 2\varphi}{4}\right\}x_3^0 + \frac{\sqrt{2}}{8}\sin^2 2\varphi \sin 4\varphi\left\{x_6^0 - \sqrt{2} x_7^0 - \frac{x_4^0}{\sqrt{2}}\right\} \end{aligned}$
2	$\begin{aligned} a' = {} & \frac{\sin^4 2\varphi}{8}\left\{b + \frac{x_1^0}{2} + 2x_5^0 + 2k\right\} + \sqrt{2} \sin^2 2\varphi\left\{1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right\}\left\{i_0 + \frac{x_2^0}{2}\right\} + a\left\{1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right\}^2 - \\ & - \frac{\sin 4\varphi}{\sqrt{2}}\left\{1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right\}x_6^0 - \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\sin 4\varphi\{x_3^0 + x_4^0 + 2x_4^0\} + \frac{\sin^2 4\varphi}{4}\left\{p + \frac{x_8^0}{2}\right\} \end{aligned}$
3	$\begin{aligned} p' = {} & \sin^2 2\varphi\left\{1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right\}b - \frac{\sin^4 2\varphi}{4}x_1^0 + \frac{\sin^2 4\varphi}{4}\left\{\frac{a}{2} - \sqrt{2} i_0 + k - \frac{x_2^0}{\sqrt{2}} + x_5^0\right\} - \frac{\sin 4\varphi}{2}\cos^2 2\varphi x_3^0 + \\ & + \frac{\sin 4\varphi}{2}\sin^2 2\varphi x_4^0 + \frac{(\cos^2 4\varphi + \cos^2 2\varphi)}{2}p - \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\{4\cos^2 2\varphi - 1\}x_8^0 + \frac{\sin 8\varphi}{4}\left\{\frac{x_6^0}{\sqrt{2}} - x_7^0\right\} \end{aligned}$
4	$\begin{aligned} i_0' = {} & -\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^4 2\varphi\left\{b+\frac{x_1^0}{2}\right\} - \frac{\sqrt{2} \sin^2 4\varphi}{8}\left\{2p + \frac{x_2^0}{\sqrt{2}} + x_8^0 - k\right\} + \frac{\sqrt{2}\sin 4\varphi}{4}\sin^2 2\varphi\{x_3^0 + x_4^0\} + \\ & + \frac{\sin 4\varphi}{2}\cos^2 2\varphi x_6^0 + \left\{\cos^4 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right\}i_0 - \frac{\sqrt{2} \sin 8\varphi}{8}x_7^0 + \\ & + \frac{\sqrt{2}\sin^2 2\varphi}{4}\cos 4\varphi x_5^0 + \frac{\sin^2 2\varphi}{\sqrt{2}}\left\{1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right\}a \end{aligned}$
5	$\begin{aligned} k' = {} & \frac{\sin^4 2\varphi}{2}\left\{b + \frac{x_1^0}{2} - \sqrt{2} x_2^0 + a\right\} + \frac{\sin^2 4\varphi}{4}\left\{p + \frac{i_0}{\sqrt{2}} + \frac{x_8^0 - x_5^0}{2}\right\} + \\ & + \frac{\sin 4\varphi}{\sqrt{2}}\sin^2 2\varphi\left\{x_6^0 - \frac{x_3^0 + x_4^0}{\sqrt{2}}\right\} + \sin 4\varphi\cos^2 2\varphi x_7^0 + k\cos^4\varphi \end{aligned}$
	Здесь $x_1^0 = (d\theta^4 + \bar{d}\bar{\theta}^4)$, $x_2^0 = (c\theta^2 + \bar{c}\bar{\theta}^2)$, $x_3^0 = (e\theta + \bar{e}\bar{\theta})$, $x_4^0 = (g\theta^3 + \bar{g}\bar{\theta}^3)$, $x_5^0 = (n\theta^2 + \bar{n}\bar{\theta}^2)$, $x_6^0 = (j\theta + \bar{j}\bar{\theta})$, $x_7^0 = (m\theta + \bar{m}\bar{\theta})$, $x_8^0 = (q\theta^2 + \bar{q}\bar{\theta}^2)$
	Величины $\mathrm{tr}\mathbf{Q} = 2b + a + 2p + k$, $I_{H\varepsilon} = a + \sqrt{2} i_0 + \dfrac{k}{2}$ – линейные инварианты.
	2. Преобразование комплексных модулей
1	$\begin{aligned} \bar{\Omega}^4 \cdot d' = {} & \left\{\cos 2\varphi\left(1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right)d\theta^4 + x_1^0\sin^8\varphi\right\} + \\ & + \frac{\sin^4 2\varphi}{8}z_0 + \frac{\sin^2 2\varphi}{\sqrt{2}}\{z_1\cos^4\varphi + \bar{z}_1\sin^4\varphi\} - \\ & - \frac{\sin^3 2\varphi}{2}\{z_2\cos^2\varphi - \bar{z}_2\sin^2\varphi\} + 2\sin 2\varphi\left\{\left(1-\frac{3\sin^2 2\varphi}{4}\right)g\theta^3 - x_4^0\sin^6\varphi\right\} \end{aligned}$

Таблица 1. Продолжение

2	$\bar\Omega^3 \cdot g' = \sin 2\varphi\left\{x_1^0 \sin^6\varphi - \left(1-\frac{3\sin^2 2\varphi}{4}\right)d\theta^4\right\} + \frac{\sin 4\varphi \sin^2 2\varphi}{8} z_0 +$ $+\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt2}\{z_1\cos^4\varphi(1-4\sin^2\varphi) - \bar z_1 \sin^4\varphi(1-4\cos^2\varphi)\} -$ $-\frac{\sin^2 2\varphi}{4}\{z_2\cos^2\varphi(3-8\sin^2\varphi) + \bar z_2\sin^2\varphi(3-8\cos^2\varphi)\} +$ $+\left\{\cos 2\varphi\left(1-\frac{9}{4}\sin^2 2\varphi\right)g\theta^3 - x_4^0\sin^6\varphi(3+4\cos 2\varphi)\right\}$
3	$\bar\Omega^2\cdot c' = \frac{\sqrt2}{4}\sin 2\varphi\left\{r_0 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}z_0 + x_1^0\sin^4\varphi + d\theta^4\cos 2\varphi\right\} + \{x_2^0\sin^4\varphi + c\theta^2\cos 2\varphi\} -$ $-\frac{\sin 2\varphi\sin 4\varphi}{4}\{z_1\cos^2\varphi - \bar z_1\sin^2\varphi\} -$ $-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt2}\{z_2\cos^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) - \bar z_2\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi)\} +$ $+\sqrt2\sin 2\varphi\{m\theta - \sin^2\varphi x_7^0\} + \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt2}\left\{(1-3\sin^2 2\varphi)\frac{g\theta^3}{2} - x_4^0\sin^4\varphi(1+2\cos 2\varphi)\right\}$
4	$\bar\Omega^2\cdot n' = -\frac{\sin^2 2\varphi}{4}\left\{r_1^0 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}z_0 + x_1^0\sin^4\varphi + d\theta^4\cos 2\varphi\right\} + \frac{\sqrt2\sin 2\varphi\sin 4\varphi}{4}\{z_1\cos^2\varphi - \bar z_1\sin^2\varphi\} +$ $+\sin 2\varphi\{z_2\cos^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2 2\varphi) - \bar z_2\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi)\} + \{n\theta^2\cos 2\varphi + x_5^0\sin^4\varphi\} +$ $+\sin 2\varphi\{(\sqrt2 j - m)\theta - (\sqrt2 x_6^0 - x_7^0)\sin^2\varphi\} - \sin 2\varphi\{(1-3\sin^2 2\varphi)g\theta^3 - x_4^0\sin^4\varphi(1+2\cos 2\varphi)\}$
5	$\bar\Omega^2\cdot q' = \frac{\sin^2 2\varphi}{2}\{(p/2-b) + (z_0+2p)\cos^2 2\varphi + 2x_1^0\sin^4\varphi + 2d\theta^4\cos 2\varphi\} + \frac{\sin^2\varphi\sin 2\varphi\sin 4\varphi}{\sqrt2}\bar z_1 +$ $+\{x_8^0\sin^4\varphi + \cos^2 2\varphi(1-4\sin^2\varphi)q\theta^2\} + \frac{\sin 4\varphi}{2}\{z_2\cos^2\varphi(1-2\cos 2\varphi) + \bar z_2\sin^2\varphi(1+2\cos 2\varphi)\} -$ $-2\sin 2\varphi\left\{x_4^0\sin^4\varphi + \left(1-\frac{3\sin^2 2\varphi}{2}\right)g\theta^3\right\} + \sin 2\varphi\{e\theta - x_3^0\sin^2\varphi\}$
6	$\bar\Omega^2\cdot e' = \frac{\sin 4\varphi}{2}\left\{(p-b) + \frac{\sin^2 2\varphi}{4}z_0\right\} + \frac{\sin^3 2\varphi}{4}\{d\theta^4 - x_1^0\sin^2\varphi\} + \frac{3\sin 2\varphi\sin 4\varphi}{8}\{x_4^0\sin^2\varphi - g\theta^3\} +$ $+\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt2}\{z_1\cos^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2 2\varphi) - \bar z_1\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi)\} + \sin 2\varphi\{x_8^0\sin^2\varphi - q\theta^2\} -$ $-\frac{\sin^2 2\varphi}{4}\{z_2(2\cos^2 2\varphi - \sin^2\varphi) + \bar z_2(2\cos^2 2\varphi - \cos^2\varphi)\} + \{e\theta\cos 2\varphi - x_3^0\sin^2\varphi(1+2\cos 2\varphi)\}$
7	$\bar\Omega^2\cdot j' = \frac{\sqrt2\sin 4\varphi}{4}\left\{(a-p) - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}z_0\right\} + \frac{\sqrt2}{4}\sin^2 2\varphi\{\sin^2\varphi(d\theta^4 - x_1^0\cos^2\varphi) -$ $-(1-4\cos 2\varphi)x_4^0 - 8g\theta^3\cos 2\varphi\} + \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt2}\{\sqrt2 z_1\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi) -$ $-\sqrt2\bar z_1\cos^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2 2\varphi) + (x_8^0 - 2x_5^0)\cos^2\varphi + (2n-q)\theta^2\} +$ $+\frac{\sqrt2}{4}\sin^2 2\varphi\{z_2(2\cos^2 2\varphi - \cos^2\varphi) + \bar z_2(2\cos^2 2\varphi - \sin^2\varphi)\} -$ $-\{j\theta\cos 2\varphi + x_6^0\cos^2\varphi(1-2\cos 2\varphi)\}$

Таблица 1. Окончание

8	$\bar{\Omega}^2 \cdot m' = \frac{\sin 4\varphi}{2}\left\{r_2^0 + \frac{\sin^2 2\varphi}{2} z_0\right\} - \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\{\sin 2\varphi(d\theta^4 - x_1^0 \cos^2 \varphi) -$
	$-(1 - 4\cos 2\varphi)x_4^0 - 8g\theta^3 \cos 2\varphi\} - \sin 2\varphi\left\{\sqrt{2}z_1\left(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{4}(1 - 2\cos 2\varphi)\right) -\right.$
	$\left.-\sqrt{2}\bar{z}_1\left(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{4}(1 + 2\cos 2\varphi)\right) + x_8^0(1 + \sin^2 2\varphi) - x_5^0 - 3(q - n)\theta^2\right\} -$
	$-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\{z_2(2\cos^2 2\varphi - \sin^2 \varphi) + \bar{z}_2(2\cos^2 2\varphi - \cos^2 \varphi)\} +$
	$+\{((2\sqrt{2}j + m)\theta - x_6^0)\cos 2\varphi - x_7^0 \sin^2 \varphi(1 + 2\cos 2\varphi)\}$
	Здесь $z_0 = \{b + a - 4p - 2\sqrt{2}i_0 + 2k\}$, $z_1 = (c + \sqrt{2}q - \sqrt{2}n)\theta^2$, $z_2 = (e + 2m - \sqrt{2}j)\theta$, $r_0 = (b + a - 2p - 2\sqrt{2}i_0)$, $r_1^0 = (b - 2p - 3i_0/\sqrt{2} + k)$ $r_2^0 = (p - i_0/\sqrt{2} - k)$.
	Полезные соотношения
1	$\bar{\Omega}^2\left(c' + \frac{m'}{\sqrt{2}}\right) = \left(c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right)\theta^2 \cos^4 \varphi + \left(\bar{c} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta}^2 \sin^4 \varphi +$
	$+\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\left(\frac{(a + i_0/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} - (i_0 + k/\sqrt{2})\right) + \sin 2\varphi\left\{\left(j + \frac{m}{\sqrt{2}}\right)\theta \cos^2 \varphi - \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta} \sin^2 \varphi\right\}$
2	$\bar{\Omega}\left(j' + \frac{m'}{\sqrt{2}}\right) = -\sin 2\varphi\left\{\left(c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right)\theta^2 \cos^2 \varphi - \left(\bar{c} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta}^2 \sin^2 \varphi\right\} +$
	$+\frac{\sin 4\varphi}{2}\left(\frac{(a + i_0/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} - (i_0 + k/\sqrt{2})\right) +$
	$+\left(j + \frac{m}{\sqrt{2}}\right)\theta \cos^2 \varphi(2\cos 2\varphi - 1) - \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta} \sin^2 \varphi(2\cos 2\varphi + 1)$
3	$a' - \left(\frac{i_0'}{\sqrt{2}} + k'\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin^2 2\varphi\left\{\left(c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right)\theta^2 + \left(\bar{c} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta}^2\right\} -$
	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}\sin 4\varphi\left\{\left(j + \frac{m}{\sqrt{2}}\right)\theta + \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta}\right\} + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 2\varphi\right)\left\{a - \frac{i_0}{\sqrt{2}} - k\right\}$
4	$a' + \frac{i_0'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 2\varphi\left\{\left(c + \frac{n}{\sqrt{2}}\right)\theta^2 + \left(\bar{c} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta}^2\right\} -$
	$-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 4\varphi\left\{\left(j + \frac{m}{\sqrt{2}}\right)\theta + \left(\bar{j} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta}\right\} + \left\{a + \frac{i_0}{\sqrt{2}}\right\} + \frac{1}{2}\sin^2 \varphi\left\{\frac{i_0}{\sqrt{2}} + k - a\right\}$

висят от поворота основной системы координат. Если мы теперь умножим слева соотношение (9.2) на произвольную матрицу поворота $\mathbf{V_n}$, то получим обычный закон Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathbf{V_n}\boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathbf{U}''^{*}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{U}''\mathbf{T}'', \quad \mathbf{U}'' = \mathbf{V_n}\mathbf{U}', \quad \mathbf{T}'' = \mathbf{V_n}\mathbf{T}' \tag{9.3}$$

в котором отчет ведется от базы № 1. При выводе инвариантной формы закона Гука (9.2) мы “вынесли” матрицу $\mathbf{V_n^{(1)}}$ из-под матрицы $\mathbf{U}^*$. Понятно, что можно “вынести” любую матрицу $\mathbf{V_n^{(k)}}$. Поэтому существует шесть инвариантных форм, и шесть базовых систем координат, которые порождают эти формы. Эти базы несут информацию о физике анизотропного упругого тела как на макро-, так и на микроуровнях, которую следует установить и понять. Необходимо так же определить максимальное число независимых линейных инвариантов матрицы **Q**, и многое другое. Решение этих задач несомненно будет способствовать созданию адекватных паспортов анизотропных упругих тел.

Заключение. Во введении достаточно подробно освещены результаты данного исследования. В процессе изложения настоящего исследования были сформулированы положения, которые нуждаются в детальной проработке.

Заметим, что аналогично тому, как это сделано в данной работе, можно разработать модель анизотропного упругого тела, когда тензора напряжений и деформаций несимметричны. При этом, матрица **Q** будет эрмитовой и положительно определенной, а число независимых констант в ней будет равно 45.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И.* Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. 2008. Т. 19. № 6. С. 131–151.
2. *Zhu H.X.* Size-dependent clastic properties of micro-and nano-honeycombs // J. Mech. Fnd Phys. Solid. 2010. V. 58. № 5. P. 696–709.
3. *Jivkov A.P., Yates J.R.* Elastic behavior of a regular lattice for meso-scale modelling of solids // Jnt. J. Struct. 2012. V. 49. № 22. P. 3089–3099.
4. *Нацик В.Д., Смирнов С.Н.* Механика 2D кристаллов, переход от атомного решеточного описания к уравнениям теории упругости // Физ. низ. температур. 2013. Т. 39. № 6. С. 690–703.
5. *Трусов П.В.* О несимметричных мерах напряженного и деформированного состояния в законе Гука // Вестник МГУ. 2014. Сер. 1. № 1. С. 30–39.
6. *Журавков М.А., Репченков В.И., Нагорный Ю.Е., Оковитый А.В.* Тензор модулей упругости, матрица силовых постоянных и наноразмерные структуры // Физ. мезомех. 2015. № 18. С. 43–51.
7. *Катнев Ю.П.* Соотношение между деформациями, скоростями деформаций и напряжениями при деформировании твердых и жидких сред // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2015. № 3. С. 49–55.
8. *Francesco I., Steigman D.* A two-dimensional gradient-elasticity theory for women fabrics // J. Elast. 2015. V. 118. № 1. P. 113–125.
9. *Malyarenko A., Ostoja-Starzenski M.* A randon fields formulation of Hooks law in all tlasticity // J. Elast. 2017. V. 127. P. 269–302.
10. *Болтаев П.И.* Упругие характеристики анизотропного материала при произвольном повороте системы координат // Конструкции из композиционных материалов. 2018. № 3. С. 9–18.
11. *Polizzotto C.* Anisotropy in straim gradient elasticity: Simplified models with different forms ojf internal length and moduli tensors //Eur. J. Mech. 2018. V. 71. P. 51–63.
12. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
13. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
14. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.190 с.
15. *Мартынов Н.И.* Интегральные уравнения плоских статических краевых задач теории упругости неоднородной анизотропной среды // Известия РАН. Механика твердого тела. 2016. № 4. С. 94–117.
16. *Гордеев В.Н.* Кватернионы и бикватернионы с приложением в геометрии и механики. Киев: Сталь. 2016. 316 с.
17. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз,1958.370 с.
18. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.

19. *Остросаблин Н.И.* О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды. 1985. № 71. С. 82–96.
20. *Остросаблин Н.И.* О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // ПМТФ. 1986. № 4. С. 127–135.
21. *Остросаблин Н.И.* О матрице коэффициентов линейной теории упругости // ДАН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 63–65.
22. *Остросаблин Н.И.* Об уравнениях линейной теории упругости // ПМТФ. 1992. № 3. С. 131–140.
23. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.: Гостехиздат, 1956. 340 с.
24. *Korn G.A., Korn N.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Endineers. McGraw-Hill Book Comhany, 1968. = *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
25. *Horn R.A., Jonson C.R.* Matrix Analysis. Cambridge University Pryss, 1989. = *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.