ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 4, с. 126–139

УДК 532.59,539.37

ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ВОЗБУЖДЕНИИ ДЛИННЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ИСТОЧНИКОМ В УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С. Ю. Доброхотов[a,b], Х. Х. Ильясов[a,*], О. Л. Толстова[b,c]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[b] *Московский физико-технический институт, Москва, Россия*
[c] *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*
**e-mail:ilyasov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 12.01.2020 г.
После доработки 15.01.2020 г.
Принята к публикации 17.01.2020 г.

Рассматривается задача о возбуждении волн на поверхности слоя жидкости, лежащего на упругом полупространстве. Источник возбуждения располагается в упругой среде. Решается совместная система уравнений теории упругости в полупространстве и теории волн в жидкости. На основе полученных ранее упрощенного решения дисперсионного уравнения для водяной моды с учетом влияния упругого полупространства и интегрального представления перемещения поверхности жидкости, вызванных источником простого вида, строятся аналитические формулы для решения задачи в предположении длинных волн. Проводится сравнение результатов, полученных по аналитическим формулам и интегральным представлениям.

Ключевые слова: упругое полупространство, слой жидкости, поверхностные волны, задача Коши, возвышение свободной поверхности

DOI: 10.31857/S0572329920040030

1. Введение. Классическая модель, описывающая распространение длинных волн в океане основана на рассмотрении линеаризованных уравнений теории несжимаемой жидкости в предположении, что дно бассейна жесткое [1–4]. Однако предположение о жесткости дна не позволяет рассматривать процессы вне жидкого слоя, а следовательно, учитывать влияние на распространение волн очага землетрясения. Влияние очага описывают, как правило, начальные условия: обычно задается либо начальное возмущение в жидкости, либо начальное смещение дна. В такой классической постановке многие вопросы, связанные с распространением волн (в частности, волн цунами) остаются без ответа (например, какая часть энергии источника землетрясения переходит в энергию волны цунами, как влияют характеристики дна бассейна на скорость распространения волн в жидкости и т.д).

Существенно более сложная модель, основанная на совместном решении уравнений теории упругости в подстилающем полупространстве и теории волн в жидком слое, по-видимому, впервые была предложена Г.С. Подъяпольским и частично реализована им в [5]. Дальнейшее продолжение этот подход получил в работах [6–11].

Волновые процессы в системе упругое полупространство—слой несжимаемой жидкости можно представить [12, 13] как сумму распространяющихся с разными скоростями отдельных мод, которые в предельных случаях переходят в продольные, поперечные волны в упругом полупространстве, поверхностную волну Рэлея и волны возвышения на воде. При этом каждая из мод является “гибридной волной” в том смысле, что перемещения частиц как жидкости, так и упругой среды в ней отличны от нуля. В дальнейшем переходящую в предельном случае в волну возвышения в жидкости моду мы будем называть “водяной”. Значительное различие (более чем на порядок) в скоростях мод, переходящих в продольные, поперечные и рэлеевскую волны в упругой среде, по сравнению с “водяной” приводит к тому, что через сравнительно небольшое время с момента начального возмущения, возвышение свободной поверхности жидкости будет определяться только “водяной” модой. Этот факт позволяет построить решение задачи в виде относительно простой интегральной формулы [13].

В этой работе мы обсудим возможное влияние учета упругих свойств дна на некоторые характеристики распространяющихся волн в жидкости. Нас будут интересовать длинные волны. Мы хотим выяснить как повлияет отказ от жесткости дна и замена его на упругое основание на скорость распространения фронта длинной волны и ее профиль. При движении волны на большие расстояния возникают дисперсионные эффекты, которые могут приводить к изменению профиля и амплитуды волны. Учет дисперсионных эффектов важен с точки зрения определения размера источника.

2. Постановка задачи. *2.1. Система уравнений и граничных условий.* Мы ограничимся здесь случаем постоянной глубины. Считаем, что идеальная незавихренная жидкость заполняет водоем, дно которого – упругое полупространство. Волновые движения жидкости описываются потенциалом перемещений $\Psi(x, z, t)$, деформации упругого полупространства – вектором смещений $\mathbf{U}(x, z, t) = (u_1, u_2, u_3)$, где $\mathbf{x} \in R^2$ – горизонтальные координаты, z – вертикальная. Поверхность жидкости считаем свободной, невозмущенная поверхность жидкости задается уравнением $z = 0$, а граница раздела жидкого слоя и упругого полупространства – уравнением $z = -D$. Волны в упругом полупространстве описывают уравнения Ламэ

$$c_t^2\nabla^2\mathbf{U} + (c_l^2 - c_t^2)\nabla\operatorname{div}\mathbf{U} = \mathbf{U}_{tt}, \quad z < -D \tag{2.1}$$

Так как жидкость предполагается несжимаемой и безвихревой, в жидком слое имеем уравнение Лапласа для потенциала Ψ:

$$\nabla^2\Psi = 0, \quad -D < z < 0 \tag{2.2}$$

На невозмущенной поверхности жидкости выполняется кинематическое условие

$$\frac{1}{g}\Psi_{tt} + \Psi_z = 0, \quad z = 0 \tag{2.3}$$

На границе раздела $z = -D$

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{2.4}$$

$$(c_l^2 - c_t^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + 2c_t^2\frac{\partial u_3}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + (\rho - 1)u_3 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = u_3 \tag{2.6}$$

и при $z \to \infty$ $\mathbf{U} \to 0$. Здесь c_l, c_t – скорости продольных и поперечных волн в упругой среде, $\rho = \rho_w/\rho_e$ – отношение плотностей жидкости и упругой среды. Приблизительные значения физических параметров задачи: $g \approx 0.01$ км/сек^2, $\rho_w \approx 1024$ кг/м^3, $\rho_e \approx 3000$ кг/м^3 для базальта и 2600 кг/м^3 для гранита, $c_l \approx 22680$ км/ч (19800 км/ч), $c_t \approx 12600$ км/ч (10080 км/ч) для базальта (гранита). Глубина бассейна D изменяется в пределах 2–5 км. Таким образом, можно считать, что $\rho \approx 1/3$, $c = c_l/c_t \approx 1/\sqrt{3}$. Скорость распространения длинных волн v в слое жидкости находится в пределах 700–720 км/ч, $v/c_l \approx 0.035$, $v/c_t \approx 0.063$. Параметры начальных возмущений и размеры области, в которой изучаются решения, мы обсудим позже.

Если решения $\mathbf{U}$ и Ψ системы (2.1)–(2.6) найдено, то превышение свободной поверхности жидкости η может быть восстановлено по формуле

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\bigg|_{z=0} \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{2.7}$$

2.2. Приведение задачи к стандартному виду. Поставленную задачу можно решать двумя способами. В некотором смысле задача является гиперболической, поэтому можно решать ее с помощью метода характеристик. Сначала решим задачу в упругом полупространстве, а когда возмущения доходят до поверхности, подключаем водяной слой. Второй способ основан на разложении решения в интеграл и ряд Фурье. При решении поставленной задачи мы использовали второй способ, который в этом случае кажется нам более эффективным и простым. Мы можем использовать общие результаты из теории операторов, если представим задачу в стандартном для теории операторов виде

$$\mathbf{Y}_{tt} = \hat{L}\mathbf{Y} \tag{2.8}$$

где $\hat{L}$ – некоторый матричный дифференциальный оператор по переменным x и z. Для этого мы должны определить подходящим образом пространство, в котором заданы неизвестные функции. Нестандартность задачи обусловлена тем, что в системе (2.1)–(2.6) уравнение Лапласа не содержит производные по времени, но в некоторые граничные условия эти производные входят.

Наличие вариационного принципа, консервативность и физический смысл задачи показывают, что она должна быть самосопряженной, возможно, в пространстве со специальным скалярным произведением.

Для того чтобы представить задачу в стандартном виде (2.8), систему нужно преобразовать так, чтобы исключить уравнение Лапласа, а часть граничных условий будет играть роль уравнений.

Пусть R' – операция, сопоставляющая вектору $\psi = (\psi_0, \psi_D)$, где $\psi_0 = \Psi(x, 0, t)$, $\psi_D = \Psi(x, -D, t)$, вектор $(R'_D\psi, R'_0\psi)$, составленный из нормальных производных решений задачи Дирихле

$$\nabla^2\Psi = 0, \quad -D < z < 0 \tag{2.9}$$

$$\Psi(\mathbf{x}, 0, t) = \psi_0, \quad \Psi(\mathbf{x}, -D, t) = \psi_D, \quad \mathbf{x} \in (-\infty, \infty) \tag{2.10}$$

Используя в качестве неизвестной вектор-функцию из пяти компонент (индекс T означает транспонирование)

$$\mathbf{Y}^T = (u_1(\mathbf{x}, z, t), u_2(\mathbf{x}, z, t), u_3(\mathbf{x}, z, t), \psi_0(\mathbf{x}, t), \psi_D(\mathbf{x}, t))^T$$

разрешая (2.5) относительно $\partial^2\Psi/\partial t^2$, получим для $\mathbf{Y}$ задачу вида (2.8) с начальными условиями

$$\mathbf{Y}\big|_{t=0} = \mathbf{Y}^0, \quad \mathbf{Y}_t\big|_{t=0} = \mathbf{Y}^1$$

В работе [9] была доказана теорема о существовании и единственности решения полученной задачи в более общем случае переменного дна. Отметим, что оператор $\hat{L}$ не является даже симметричным в пространстве с обычным скалярным произведением. Для доказательства “почти” симметричности скалярное произведение было введено особым образом и будет приведено позднее. Для доказательства самосопряженности оператора $\hat{L}$ было построено семейство самосопряженных операторов, приближающих $\hat{L}$. Стоит отметить работу [11], в которой для доказательства самосопряженности в подобной задаче были использованы в качестве неизвестных превышение свободной поверхности жидкости η и вектор смещений в упругой среде $\mathbf{U}$.

3. Решение задачи в случае постоянного дна. *3.1. Метод Фурье и сведение задачи к одномерным операторным пучкам.* Будем искать некоторые частные решения задачи в виде

$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{Y}} e^{i\omega(\mathbf{p},k)t + i\mathbf{p}\mathbf{x}}$$

где $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ — двойственные по отношению к x_1, x_2 переменные. Решение задачи сводится к исследованию спектра оператора $\hat{L}(\mathbf{p}, \partial/\partial z)$, который действует на элементы $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{\mathbf{U}}(z,\mathbf{p}), \hat{\psi}_0(\mathbf{p}), \hat{\psi}_D(\mathbf{p}))^T$. Опишем спектр этого оператора при каждом фиксированном $\mathbf{p}$.

Очевидно, что функции $\hat{\mathbf{U}}$ вида $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{p})e^{kz}$ являются решениями данной задачи. Подставив их в уравнения Ламэ, из условия существования ненулевого решения однородной системы уравнений получим уравнение для определения k, откуда находим

$$k_t = \sqrt{\mathbf{p}^2 - \omega^2/c_t^2}, \quad k_l = \sqrt{\mathbf{p}^2 - \omega^2/c_l^2}$$

где $\mathbf{p}^2 = p_1^2 + p_2^2$.

Используя (2.9), (2.10) и граничные условия, получаем выражения для $\hat{\psi}_0$, $\hat{\psi}_D$ через значение вертикальной составляющей потенциала перемещений упругой среды на границе раздела:

$$\hat{\psi}_0 = \frac{g}{\operatorname{ch}(|\mathbf{p}|D)(\omega^2 - g|\mathbf{p}|\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D))}\hat{u}_3\big|_{z=-D}$$

$$\hat{\psi}_D = |\mathbf{p}|\frac{(g|\mathbf{p}| - \omega^2\operatorname{th}(\mathbf{p}D))}{|\mathbf{p}|(\omega^2 - g|\mathbf{p}|\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D))}\hat{u}_3\big|_{z=-D}$$

и уравнение, связывающее ω и $\mathbf{p}$, называемое дисперсионным уравнением:

$$\begin{gathered}(\lambda - g|\mathbf{p}|\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D))\left(-4\mathbf{p}^2k_tk_l + (k_t^2 + \mathbf{p}^2)^2 - \frac{\lambda g(\rho - 1)k_l}{c_t^4}\right)\\ + \frac{\lambda^2\rho k_l}{c_t^4}(g|\mathbf{p}| - \lambda\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D)) = 0\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\lambda = \omega^2$ соответствует второй производной по времени. Если ввести $v^2 = \lambda/\mathbf{p}^2$ (фазовую скорость), то (3.1) примет вид

$$\left(v^2 - \frac{g}{|\mathbf{p}|}\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D)\right)\left(-4\tilde{k}_t\tilde{k}_l + \left((\tilde{k}_t^2 + 1)^2 - \frac{g}{|\mathbf{p}|}\frac{(\rho - 1)v^2}{c_t^4}\tilde{k}_l^2\right) + \rho\frac{v^4}{c_t^4}\left(\frac{g}{|\mathbf{p}|} - v^2\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D)\right)\right) = 0 \tag{3.2}$$

$$\tilde{k}_t = \sqrt{1 - v^2/c_t^2}, \quad \tilde{k}_l = \sqrt{1 - v^2/c_l^2}$$

3.2. *Спектр операторного пучка.* Когда $\omega^2 < \mathbf{p}^2c_t^2$, т.е. $v < c_t$ уравнение (3.1) имеет два действительных корня $\lambda_W = \omega^2(|\mathbf{p}|)$ и $\lambda_R = \omega_R^2(|\mathbf{p}|)$, соответственно уравнение (3.2) имеет корни v_W и v_K, которые определяют две точки дискретного спектра, соответствующие поверхностным волнам в жидкости в предельном случае жесткого дна и волнам Рэлея в упругом полупространстве, когда слой жидкости отсутствует. Отвечающие им собственные функции обозначим соответственно $\overline{\mathbf{Y}}_W(\mathbf{p}, z)$ и $\overline{\mathbf{Y}}_R(\mathbf{p}, z)$.

Когда $\lambda \geq \mathbf{p}^2 c_t^2$, спектр становится непрерывным, при $\mathbf{p}^2 c_t^2 \leq \lambda \leq \mathbf{p}^2 c_l^2$ имеем двумерное подпространство собственных функций $(\overline{\mathbf{Y}}_t^{1,2}(\mathbf{p}, z))$, которые отвечают поперечным волнам в упругой среде, а при $\lambda > \mathbf{p}^2 c_l^2$ мы должны добавить решения, соответствующие продольным волнам в упругой среде (собственные функции $\overline{\mathbf{Y}}_l(\mathbf{p}, z)$).

Остановимся более подробно на исследовании точек дискретного спектра. Для корня уравнения (3.2), соответствующего поверхностным волнам в жидкости, мы можем считать значение отношения v^2/c_l^2 малой величиной, так как $Dg \leq 0.1$, $c_l \sim 6$, и тогда, считая $k_l \approx 1$, перепишем уравнение (3.2) в виде

$$v\left(v^2 - \frac{g}{|\mathbf{p}|}\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D)\right)\left(-4\tilde{k}_t + \left((\tilde{k}_t^2 + 1)^2 - \frac{g}{|\mathbf{p}|}\frac{(\rho - 1)v^2}{c_t^4}\right) + \rho\frac{v^4}{c_t^4}\left(\frac{g}{|\mathbf{p}|} - v^2\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D)\right)\right) = 0$$

Воспользовавшись асимптотическим разложением для $k_t \approx 1 - v^2/(2c_t^2)$, получим, вынося за скобки v^2/c_t^4:

$$\frac{v^2}{c_t^4}\left(\left(v^2 - \frac{g}{|\boldsymbol{p}|}\operatorname{th}(|\boldsymbol{p}|\,D)\right)\left(\frac{v^2}{2} - \frac{g}{|\boldsymbol{p}|}(\rho - 1)\right) + \rho v^2\left(\frac{g}{|\boldsymbol{p}|} - v^2\operatorname{th}(|\boldsymbol{p}|\,D)\right)\right) = 0$$

Корень $v^2 = 0$ интереса не представляет. Для нахождения других корней мы имеем биквадратное уравнение, которое в области существования дискретного спектра имеет решение

$$v^2 \approx g\left(1 - \frac{g\rho}{g + 2c_t^2\,|\mathbf{p}|}\right)\frac{\operatorname{th}(|\mathbf{p}|\,D)}{|\mathbf{p}|} \tag{3.3}$$

При малых значениях $|\mathbf{p}|$ (для очень длинных волн) $|\mathbf{p}|\,D \leq 0.1$ и мы можем заменить $\operatorname{th}(|\mathbf{p}|\,D)$ на $|\mathbf{p}|\,D$:

$$v^2 \approx g\left(1 - \frac{g\rho}{g + 2c_t^2\,|\mathbf{p}|}\right)D$$

или

$$\lambda \approx g\left(1 - \frac{g\rho}{g + 2c_t^2\,|\mathbf{p}|}\right)D\mathbf{p}^2 \tag{3.4}$$

откуда при $|\mathbf{p}| = 0$ имеем $v^2 \approx (1 - \rho)\,gD$.

Корень уравнения (3.2), соответствующий волнам Рэлея в упругом полупространстве, появляется при $|\mathbf{p}| = p_{cr}$, отщепляясь от прямой $v = c_t$, и при больших значениях $|\mathbf{p}|$ выходит на постоянное значение, соответствующее значению фазовой скорости волны Рэлея (при отсутствии слоя жидкости $v_R \approx 0.8c_t$. Учитывая значения c_t, c_l, D, g, можно при всех $|\mathbf{p}|$ отбросить члены с $\operatorname{th}(|\mathbf{p}|\,D)$, которые описывают влияние слоя жидкости на Рэлеевскую составляющую решения. В результате получим уравнение

$$-4c_t^2 v^2 + v^4 - \frac{g\tilde{k}_l}{|\mathbf{p}|}v^2 + c_t^4(4 - \tilde{k}_t\tilde{k}_l) = 0 \tag{3.5}$$

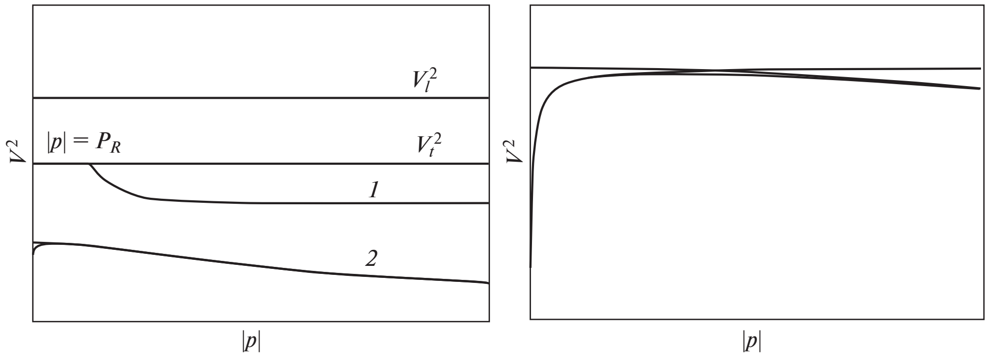

Рис. 1

или

$$|\mathbf{p}| = \frac{g\widetilde{k_l}v^2}{4c_t^4 - 4c_t^2v^2 + v^4 - 4c_t^4\widetilde{k_t}\widetilde{k_l}} \tag{3.6}$$

Полагая в (3.6) $v = c_t$, получаем, что

$$p_{cr} = \frac{g}{c_t^2}$$

При $|\mathbf{p}| \to \infty$ получаем известное уравнение для фазовой скорости волны Рэлея.

Схематичное изображение спектра оператора показано на рис. 1 слева, цифрой *1* обозначена мода Рэлея, цифрой *2* – водяная мода. Горизонтальная прямая $v = c_t$ определяет нижнюю границу непрерывного спектра, а $v = c_l$ определяет границу, при переходе через которую двукратно вырожденный спектр становится трехкратно вырожденным. Справа на рисунке представлены дисперсионные кривые для водяной моды.

3.3. Разложение решения по модам, интегральное представление решения и его упрощение для водяной моды. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$U\big|_{t=0} = U^0(x,z) \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,, \quad \psi_{W,D}\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial \psi_{W,D}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

$$U^0(x,z) \quad (x = 0, z_0), \quad z_0 < 0$$

$$U^0(x,z) = a\mathrm{e}(z)V(x)e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2b_3^2}}, \quad V(x) = \frac{1}{\left(1 + (x_1/b_1)^2 + (x_2/b_2)^2\right)^{3/2}} \tag{3.7}$$

Согласно общей теории решение задачи можно представить в виде разложения по собственным функциям оператора $\hat{L}$ (модам):

$$\begin{aligned} \Upsilon = \sum_{\pm}\Bigg\{\frac{1}{2\pi}\int_{R^2} e^{i\,\mathbf{p},\mathbf{x}}\Bigg[& e^{\pm it\omega_W(|\mathbf{p}|)t}C_W^{\pm}\tilde{\Upsilon}_W(\mathbf{p},z) + e^{\pm it\omega_R(|\mathbf{p}|)t}C_R^{\pm}\tilde{\Upsilon}_R(\mathbf{p},z) \\ &+ \int_0^\infty\left(e^{\pm it\omega_t(\mathbf{p},k)}\sum_{m=1}^{2}C_t^{\pm,m}\tilde{\Upsilon}_t^m(\mathbf{p},k,z) + e^{\pm it\omega_l(\mathbf{p},k)}C_l^{\pm}\tilde{\Upsilon}_l(\mathbf{p},k,z)\right)dk\Bigg]d\mathbf{p}\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $C_W^{\pm}(\mathbf{p})$ $C_R^{\pm}(\mathbf{p})$ $C_t^{\pm,1}(\mathbf{p},k)$ $C_t^{\pm,2}(\mathbf{p},k)$ $C_l^{\pm}(\mathbf{p},k)$ — коэффициенты Фурье разложения начальных данных.

Мы хотим определить, какой вклад в решение вносят слагаемые, соответствующие точке дискретного спектра, отвечающей водяной моде, так как при фиксированных x и достаточно больших временах в разложении решения по собственным функциям значимыми являются только слагаемые, соответствующие водяной моде. Нас интересует значение возвышения свободной поверхности η при временах, когда упругие моды уже не вносят существенный вклад в решение задачи. Это приводит к равенству

$$\eta = \sum_{\pm}\int_{R^2} e^{i(\mathbf{px}+\omega_W(\mathbf{p})t)} C_W^{\pm}(\mathbf{p})[\bar{\Upsilon}_W]_\eta(\mathbf{p})d\mathbf{p} \tag{3.9}$$

где $[\bar{\Upsilon}_W]_\eta(\mathbf{p})$ — компонента вектора $\bar{T}_W$, соответствующая η,

$$\tilde{\Upsilon}_W(\mathbf{p},z) = (\chi(\mathbf{p},z),\zeta_W(\mathbf{p}),\zeta_D(\mathbf{p}))$$

$\chi(\mathbf{p},z)$ соответствует $\tilde{U}$, а $\zeta = (\zeta_W(\mathbf{p}),\zeta_D(\mathbf{p}))$ соответствуют $(\tilde{\psi}_W,\tilde{\psi}_D)$

$$\chi = A\left(\begin{pmatrix}\mathbf{p}k_t\\ -i\mathbf{p}^2\end{pmatrix} e^{k_t(z+D)} + \frac{k_t^2+p^2}{2k_l}\begin{pmatrix}-\mathbf{p}\\ ik_l\end{pmatrix}e^{k_l(z+D)}\right),\quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}$$

$$\zeta_W = \frac{iAg\lambda_W}{2c_t^2\operatorname{ch}(|\mathbf{p}|D)(\lambda_W - g|\mathbf{p}|\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D))},\quad \zeta_D = \zeta_W\left(1-\frac{\lambda_W\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D)}{g|\mathbf{p}|}\right)$$

Из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{-D}\langle\bar{\chi},\chi\rangle dz + \langle\bar{\zeta},R(p)\zeta\rangle = 1,\quad \text{где}\quad R = \begin{pmatrix}|\mathbf{p}|\operatorname{cth}(|\mathbf{p}|D) & -|\mathbf{p}|/\operatorname{sh}(|\mathbf{p}|D)\\ |\mathbf{p}|/\operatorname{sh}(|\mathbf{p}|D) & -|\mathbf{p}|\operatorname{cth}(|\mathbf{p}|D)\end{pmatrix}$$

находим

$$A = \left(\frac{\mathbf{p}^2(k_t^2+\mathbf{p}^2)}{2k_t} + \frac{(k_t^2+\mathbf{p}^2)^2(k_l^2+\mathbf{p}^2)}{8k_l^3} - \frac{\mathbf{p}^2(k_t^2+\mathbf{p}^2)}{k_l}\right. \\ \left. + \frac{\rho\lambda_W^2|\mathbf{p}|\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D)}{4c_t^4(\lambda_W - g|\mathbf{p}|\operatorname{th}(|p|D))^2}\left(g^2 - 2g\frac{\lambda_W}{|\mathbf{p}|}\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D) + \frac{\lambda_W^2}{\mathbf{p}^2}\right)\right)^{-1/2} \tag{3.10}$$

Используя приведенные формулы, получаем

$$\eta = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\pm}\int_{\mathbb{R}_p^2} e^{i(\langle\mathbf{p},\mathbf{x}\rangle\pm t\omega(|\mathbf{p}|))}\frac{i\omega^4 C_W(\mathbf{p})A}{2c_t^2\operatorname{ch}(|\mathbf{p}|D)(\lambda_W(|\mathbf{p}|) - g|\mathbf{p}|\operatorname{th}(|\mathbf{p}|D))}d\mathbf{p} \tag{3.11}$$

$$C_W(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-D}\bar{\chi}(\mathbf{p},z)\left(\int_{\mathbb{R}_x^2} e^{-i\langle\mathbf{p},\mathbf{x}\rangle}U^0(\mathbf{x},z)\,d\mathbf{x}\right)dz$$

Учитывая, что преобразование Фурье от функции V равно

$$V = b_1b_2e^{-|\mathbf{p}|\sqrt{b_1^2\cos^2\psi+b_2^2\sin^2\psi}}$$

и учитывая выражение для собственных функций, получаем

$$C_W = -iAb_1b_2e^{-|\mathbf{p}|b(\psi)}\left((ik_t\langle\mathbf{p},\mathbf{a}\rangle - \mathbf{p}^2a_3)e^{k_t(z_0+D)}F_t + \frac{k_t^2+p^2}{2k_l}(-i\langle\mathbf{p},\mathbf{a}\rangle + k_la_3)e^{k_l(z_0+D)}F_l\right) \tag{3.12}$$

$$b(\psi) = \sqrt{b_1^2\cos^2\psi + b_2^2\sin^2\psi},\quad \langle\mathbf{p},\mathbf{a}\rangle = p_1a_1 + p_2a_2$$

$$F_{t,l} = \int_{-\infty}^{-D} \mathrm{e}(z) e^{k_{l,t}(z-z_0)} e^{\frac{-(z-z_0)^2}{2b_3^2}} dz \tag{3.13}$$

Теперь попробуем упростить полученные формулы. Предполагая, что источник возбуждения расположен достаточно глубоко, его вертикальные размеры не велики, т.е. $|z_0| - D \gg b_3$, верхний предел в интегралах (3.13) можно заменить на ∞. Тогда получим, что

$$F_{t,l} \approx b_3\sqrt{2\pi} e^{\frac{b_3^2 k_{t,l}^2}{2}} \mathrm{e}(z_0 + b_3^2 k_{t,l}) \tag{3.14}$$

Далее воспользуемся упрощенным выражением (3.3) для водяной моды (для λ_W), малостью величин gD/c_t^2, gD/c_l^2, заменим $k_t \approx |\mathbf{p}|(1 - \lambda 2c_t^2 p^2)$, в результате получим

$$\eta \approx -\frac{b_1 b_2 b_3 g}{4\sqrt{2\pi} c_t^2} \sum_{\pm} \int_{\mathbb{R}_p^2} e^{i(\langle \mathbf{p},\mathbf{x}\rangle \pm t\omega(|\mathbf{p}|))} \frac{\mathrm{e}^{-|\mathbf{p}|\sqrt{b_1^2\cos^2\psi + b_2^2\sin^2\psi}} \left(1 - \rho + \frac{2|\mathbf{p}|c_t^2}{\mathrm{g}}\right)^2 \mathrm{sh}(|\mathbf{p}|D)}{\mathbf{p}^2\left(1 + \frac{2|\mathbf{p}|c_t^2}{\mathrm{g}}\right)(\rho\,\mathrm{ch}^2(|\mathbf{p}|D) + \mathrm{th}(|\mathbf{p}|D))} \times$$
$$\times\left((ik_t\langle \mathbf{p},\mathbf{a}\rangle - \mathbf{p}^2 a_3) e^{k_t(z_0+D)} e^{\frac{b_3^2 k_t^2}{2}} + \frac{k_t^2 + p^2}{2k_l}(-i\langle \mathbf{p},\mathbf{a}\rangle + k_l a_3) e^{k_l(z_0+D)} e^{\frac{b_3^2 k_l^2}{2}}\right) d\mathbf{p} \tag{3.15}$$

Обозначим φ — полярный угол вектора x, ψ — полярный угол вектора $\mathbf{p}$, $\langle \mathbf{p},\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}| r\cos(\psi - \varphi)$, $r = |\mathbf{p}|$. В интеграле (3.15) перейдем к полярным координатам (r, ψ) и при этом будем предполагать, что точка x нодится достаточно далеко от начала координат. Применим метод стационарной фазы по углу ψ (см., например, [14]). Это даст дополнительные слагаемые с $e^{i(\pm r|\mathbf{x}| \pm \omega t)}$. Так как $\partial\omega/\partial r > 0$, то при $t > 0$ слагаемое с $e^{\pm(|\mathbf{x}|r + t\omega(\mathbf{p}))}$ вносит вклад в асимптотику меньше, чем слагаемые с $e^{\pm(|\mathbf{x}|r - t\omega(\mathbf{p}))}$ (в силу соображений, которые использовались при вычислении асимптотик быстроменяющихся интегралов) [15]. В результате получим

$$\eta_F \approx \frac{b_1 b_2 b_3 g^2}{8\pi c_t^2 c_l^2 \sqrt{|\mathbf{x}|}} \mathrm{Re}\left[\int_0^\infty e^{i(|\mathbf{x}|r - t\omega(r) - \pi/4)} \frac{e^{-r(b(\psi) - z_0 - D)}(1 - \rho + 2rc_t^2/g)^3 \mathrm{sh}^2(Dr)}{\sqrt{r}(1 + 2rc_t^2/g)^2(\rho\,\mathrm{ch}^3(Dr) + \mathrm{sh}(Dr))} Q dr\right] \tag{3.16}$$

$$Q = e^{\frac{b_3^2 r^2}{2}}(a_3(c^2 - R) + ia_h(\varphi)(1 + R))\mathrm{e}(z_0 + b_3^2 r)$$

$$R = (c^2 - 1)r(D + b_3^2 r + z_0), \quad c = c_l/c_t, \quad a_h(\varphi) = a_1\cos(\varphi) + a_2\sin(\varphi)$$

3.4. Длинноволновое приближение. Если рассматривать длинноволновое приближение, то $|\mathbf{p}|D$ можно считать достаточно малой величиной, а $b_j + |z_0| \gg D$, $\sin(Dr) \approx Dr$, $\mathrm{ch}(Dr) \approx 1$. В результате получим

$$\eta_L = \frac{b_1 b_2 b_3 g}{4\pi c_l^2} \frac{D^2}{\sqrt{|\mathbf{x}|}} \mathrm{Re}\left[\int_0^\infty r^{5/2} e^{i(|\mathbf{x}|r - t\tilde{\omega}(r) - \pi/4)} \frac{e^{-r(b(\psi) - z_0 - D)} e^{b_3^2 r^2/2}}{(\rho + Dr)} Q\mathrm{e}(z_0 + b_3^2 r) dr\right] \tag{3.17}$$

где $Q = (a_3(c^2 - R) + ia_h(\varphi)(1 + R))$, $R = (c^2 - 1)(D + b_3^2 r + z_0)r$

Дальнейшие упрощения связаны со следующими фактами. Во-первых, можно одновременно отбросить экспоненту $e^{b_3^2 r^2/2}$, $b_3 r$ в множителе R, а также “срезающую” функцию. Кроме того, учитывая наличие в интеграле множителя $r^{5/2}$, быстрое стремление к 0 подынтегральной функции и существенное изменение подынтегральной функции лишь при очень малых r, частоту $\tilde{\omega}$ (дисперсионное соотношение) можно заменить на $\tilde{\omega} = \sqrt{gDr} = Cr$. В результате приходим к следующей формуле:

$$\eta_L = \frac{b_1 b_2 b_3 g}{4\pi c_l^2}\frac{D^2}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}\operatorname{Re}\left[\int_0^\infty r^{5/2}e^{i((|\mathbf{x}|-tC)r-\pi/4)}\frac{e^{-r(b(\psi)+h)}}{(\rho+Dr)}(a_3(c^2-R)+ia_h(\varphi)(1+R))dr\right] \tag{3.18}$$

$$R \approx -(c^2-1)hr, \quad h = -z_0 - D$$

Величина h характеризует глубину залегания источника, считая от границы раздела вода–упругое основание.

Ясно, что последний интеграл сводится к вычислению двух интегралов

$$I_k = I_k(y, L, \gamma, D) = \int_0^\infty r^{k+1/2}\frac{e^{(iy-L)\,r}}{\gamma+Dr}dr = \left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\int_0^\infty \sqrt{r}\,\frac{e^{(iy-L)\,r}}{\gamma+Dr}dr$$

где $y = |\mathbf{x}| - Ct,\ L = b(\psi) + h, k = 2, 3$. Тогда (3.18) примет вид

$$\eta_L = \frac{b_1 b_2 b_3 g}{4\pi c_l^2}\frac{D^2}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}\operatorname{Re}[e^{-i\pi/4}(a_3(c^2+ia_h(\varphi))I_2 + (a_3 - ia_h(\varphi))(c^2-1)hI_3)]\Big|_{y=|\mathbf{x}|-Ct} \tag{3.19}$$

Интегралы $I_{2,3}$ вычисляются точно (см., например, [15]):

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{D^3}\left[\frac{3D^2 - 2D\gamma\xi + 4(\gamma\xi)^2}{4\xi^{5/2}} - \frac{\sqrt{\pi}\gamma^{5/2}}{\sqrt{D}}e^{\gamma\xi/D}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma\xi}{D}}\right)\right]$$

$$I_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{D^4}\left[\frac{15D^3 - 6D^2\gamma\xi + 4D(\gamma\xi)^2 - 8(\gamma\xi)^3}{8\xi^{7/2}} + \frac{\sqrt{\pi}\gamma^{7/2}}{\sqrt{D}}e^{\gamma\xi/D}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma\xi}{D}}\right)\right]$$

где аргумент у $\xi = L - iy$ лежит на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$. При больших значениях вещественной части аргумента z функцию $\operatorname{erfc}(z)$ можно представить в виде асимптотического разложения:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z}\left(1 + \sum_{m=1}^\infty (-1)^m\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{(2z^2)^m}\right)$$

что дает

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{D^3}\left[\frac{3D^2 - 2D\gamma\xi + 4(\gamma\xi)^2}{4\xi^{5/2}} - \frac{\gamma^2}{\sqrt{\xi}}\left(1 - \frac{D}{2\gamma\xi} + \frac{3D^2}{4(\gamma\xi)^2}\ldots\right)\right] \\ &\equiv -\frac{\sqrt{\pi}\gamma^2}{\sqrt{\xi}}\sum_{m=3}^\infty(-1)^m\frac{(2m-1)!\,D^{m-3}}{2^{m-1}(m-1)!(2\gamma\xi)^m} \\ I_3 &= \frac{\sqrt{\pi}}{D^4}\left[\frac{15D^3 - 6D^2\gamma\xi + 4D(\gamma\xi)^2 - 8(\gamma\xi)^3}{8\xi^{7/2}} + \frac{\gamma^3}{\sqrt{\xi}}\left(1 - \frac{D}{2\gamma\xi} + \frac{3D^2}{4(\gamma\xi)^2} - \frac{15D^3}{8(\gamma\xi)^3}\ldots\right)\right] \\ &\equiv \frac{\sqrt{\pi}\gamma^3}{\sqrt{\xi}}\sum_{m=4}^\infty(-1)^m\frac{(2m-1)!\,D^{m-4}}{2^{m-1}(m-1)!(2\gamma\xi)^m} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Можно воспользоваться другим способом вычисления интегралов $I_{2,3}$. Имеют место формулы

$$\int_0^\infty r^{k+1/2}e^{-\xi r}dr = \left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \int_0^\infty \sqrt{r}e^{-\xi r}dr = \left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}\xi^{3/2+k}}$$

Поэтому, если в формуле (3.18) подынтегральное выражение аппроксимировать функцией $Qr^{k+1/2}e^{-\tilde{L}r}$, подобрав параметры $\tilde{L}$ и Q так, чтобы у этой функции и функции $r^{k+1/2}/(\gamma + Dr)e^{-Lr}$, совпали точка r_0, в которой достигается максимум, и значение этого максимума, то мы получим явные приближенные выражения для решения.

Соответствующие вычисления, выполненные с помощью программы Mathematica [16], приводят к следующим формулам:

$$\frac{r^\alpha e^{-Lr}}{\gamma + Dr} \approx Q(\alpha)r^\alpha e^{-\tilde{L}(\alpha)r}, \quad Q(\alpha) = (\tilde{L}(\alpha) - L)e^{(D(1+\alpha)+L\gamma-w(\alpha))/(2D)}$$

$$\tilde{L}(\alpha) = \frac{D(1-\alpha) + L\gamma - w(\alpha)}{2\gamma}, \quad w(\alpha) = \sqrt{4\alpha DL\gamma + ((1-\alpha)D + L\gamma)^2}$$

Выберем $\alpha = k + 1/2$ и положим

$$w_k = w\left(k+\frac{1}{2}\right) \equiv \sqrt{4\left(k+\frac{1}{2}\right)DL\gamma + \left(\left(\frac{1}{2}-k\right)D + L\gamma\right)^2}$$

$$L_k = \tilde{L}\left(k+\frac{1}{2}\right) \equiv \frac{(1/2-k)D + L\gamma + w_k}{2\gamma}$$

$$Q_k = Q\left(k+\frac{1}{2}\right) \equiv (L_k - L)e^{((k+3/2)D+L\gamma-w_k)/(2D)}$$

Напомним, что $L = b(\varphi) + h \equiv \sqrt{b_1^2\cos\varphi + b_2^2\sin\varphi} + h$; отсюда получим

$$I_k = \frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!Q_k}{2^{k+1}(L_k - iy)^{3/2+k}}$$

и простые приближенные формулы для решения

$$\eta_L = \frac{15b_1b_2b_3gD^2}{64\pi^{3/2}c_l^2\sqrt{|\mathbf{x}|}}\mathrm{Re}\left[e^{-i\pi/4}\left(\frac{Q_2(a_3c^2 + ia_h(\varphi))}{(L_2-iy)^{5/2}} + \frac{5Q_3(a_3 - ia_h(\varphi))(c^2-1)h}{2(L_3-iy)^{7/2}}\right)\right]\Bigg|_{y=|\mathbf{x}|-Ct} \quad (3.21)$$

$$a_h(\varphi) = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi$$

где φ — полярный угол вектора x.

4. Результаты численных расчетов. Приведем некоторые расчеты для действующего в вертикальном направлении $a_1 = a_2 = 0$ осесимметричного источника с $b_1 = b_2 = b_3 \equiv b$. На рис. 2 показаны результаты расчетов возвышения поверхности жидкости в зависимости от расстояния от эпицентра в некоторый фиксированный момент времени (пространственные профили): полученные по формулам (3.11)–(3.13) — сплошная линия и по формулам из [12] — пунктирная линия. Амплитуда у источников задавалась таким образом, чтобы максимальное значение возвышения жидкости для обоих решений совпадали. Глубина залегания источника и его размер для расчетов по (3.11)–(3.13) задавались 43 км и 2 км, соответственно. Характеристический размер источника для вычислений по [12] на левом графике равен 5, на правом 3.5. Как видно из рисунка, несмотря на то, что множители $\mathrm{e}^{-(b-z_0)|\mathbf{p}|}$ в (3.11)–(3.13) и $\mathrm{e}^{-l|\mathbf{p}|}$ в [12] определяют размер источника, прямого соответствия между ними нет. Довольно хорошее согласие

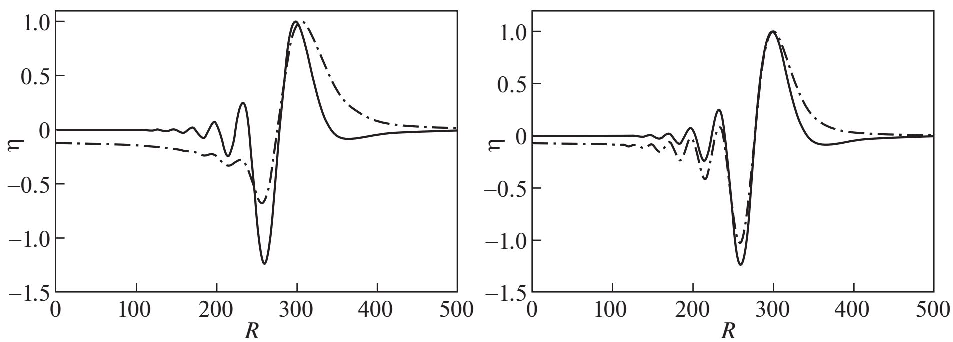

Рис. 2

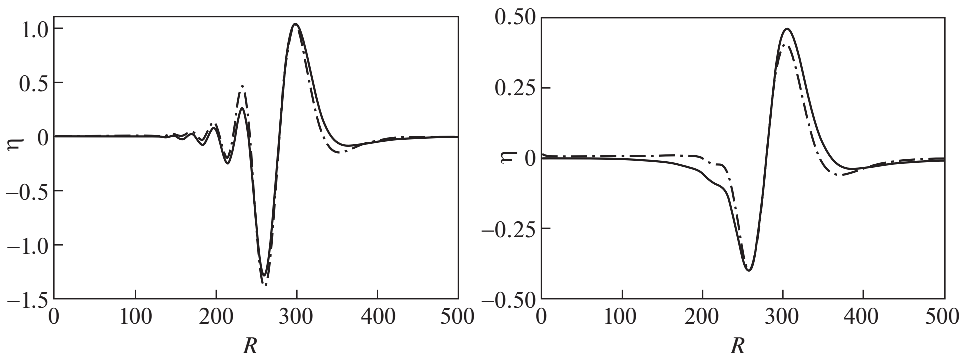

Рис. 3

пространственных профилей достигается в том случае, когда характерный размер l почти в 3 раза меньше глубины залегания $b - z_0$ источника.

Обратим внимание и на то, что в случае расположенного в упругом основании источника, головной гребень волны становится более крутым, а перед ним появляется характерное понижение уровня жидкости по отношению к невозмущенному состоянию. Как следует из расчетов, дисперсионные эффекты в волнах, порождаемых источником в упругой среде, выражены слабее, чем в волнах от источника на дне.

На рис. 3 показаны результаты расчетовЖ выполненных по (3.11)–(3.13) – сплошная линия в сравнении с длинноволновым приближением (3.18) – пунктирная линия. На графике слева глубина залегания источника составляет 43 км, на графике справа – 63 км, характерный размер источника равен 2 км, амплитуда источника для обоих графиков одинакова. Для профилей волн, полученных по длинноволновому приближению, передний фронт головного гребня круче, а впадина перед ним более заметна.

Рис. 4 демонстрирует зависимость профиля волны от глубины залегания источника. Графики слева рассчитаны по (3.11)–(3.13), справа – по (3.18); параметры для расчета: $b = 2$. $z_0 = -43$ – сплошные, $z_0 = -53$ – штрихпунктирные, $z_0 = -63$ – пунктирные линии. С увеличением глубины источника на волновых профилях уменьшаются амплитуды “хвостовых” (следующих за головным) гребней, вплоть до их полного исчезновения. Волны становятся все более похожими на те, которые порождаются источником на дне [12] с большим значением характерного размера l, но при этом длина порождаемых волн меняется незначительно.

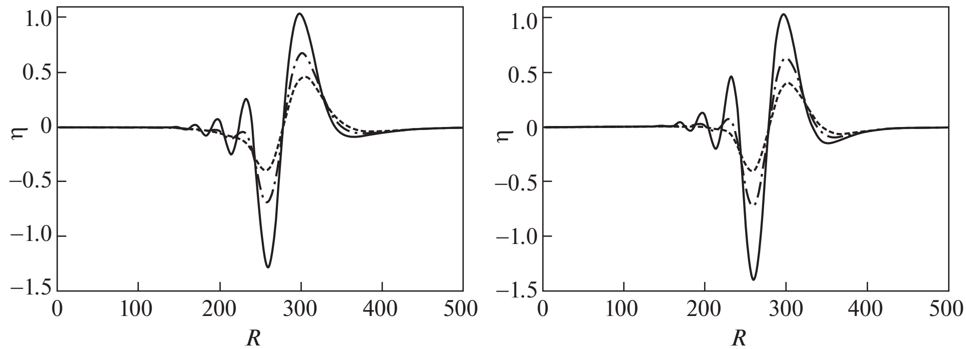

Рис. 4

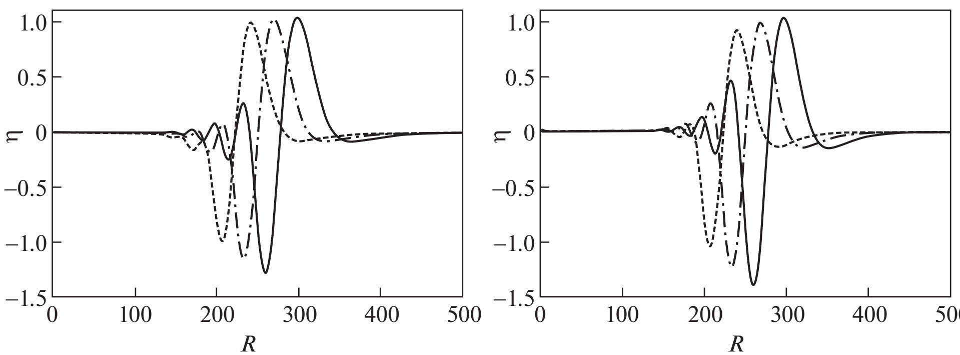

Рис. 5

Поведение профилей волны в зависимости от толщины слоя жидкости показано на рис. 5; левый график рассчитан по (3.11)–(3.13), правый – по (3.18). Данные для расчетов: $b = 2$, $z_0 = -43$. Сплошные линии соответствуют толщине слоя $D = 5$, штрихпунктирные – $D = 4.5$, пунктирные – $D = 4$. Видно, что уменьшение толщины слоя приводит к снижению проявления "дисперсионных" эффектов в волнах: уменьшается количество хвостовых волн и их амплитуды. Из сравнения левого и правого графиков видно, что длинноволновая формула (3.18) дает большее изменение амплитуды волны в зависимости от толщины слоя.

Уменьшение скорости поперечной волны в упругой среде, результаты расчетов приведены на рис. 6, приводит к незначительному увеличению амплитуд генерируемых волн, практически не влияя при этом на их длину. Длинноволновое приближение дает на 8–9% меньшие значения для головных впадин, при практически одинаковых амплитудах головного гребня. График слева построен по (3.11)–(3.13), справа – по (3.18). Скорости поперечных волн: $c_t = 2900$ – сплошные, $c_t = 2800$ – штрихпунктирные, $c_t = 2700$ – пунктирные линии. Остальные параметры: $b = 2$, $z_0 = -43$, $D = 5$.

Результаты расчета волновых профилей для достаточно длинных волн, выполненные по точным формулам – сплошные линии и явным аналитическим зависимостям (3.19) – штрихпунктирные линии, представлены на рис. 7. Параметры для расчета взяты следующими: $b = 2$, $z_0 = -83$, $D = 5$, $c_t = 2900$. Сравнение показывает, что волновые

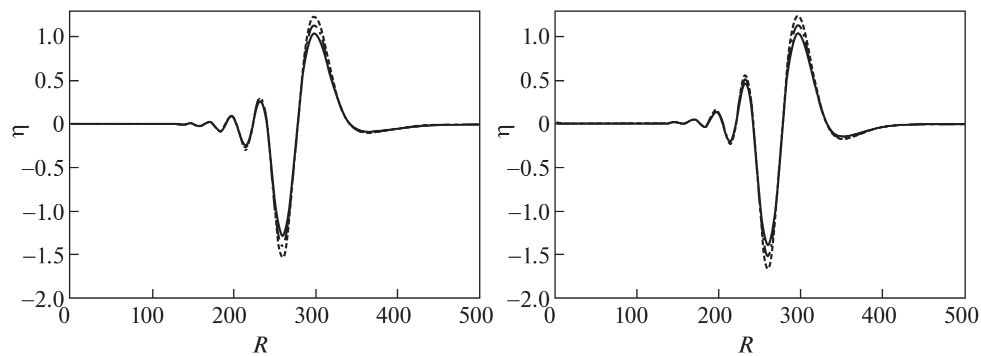

Рис. 6

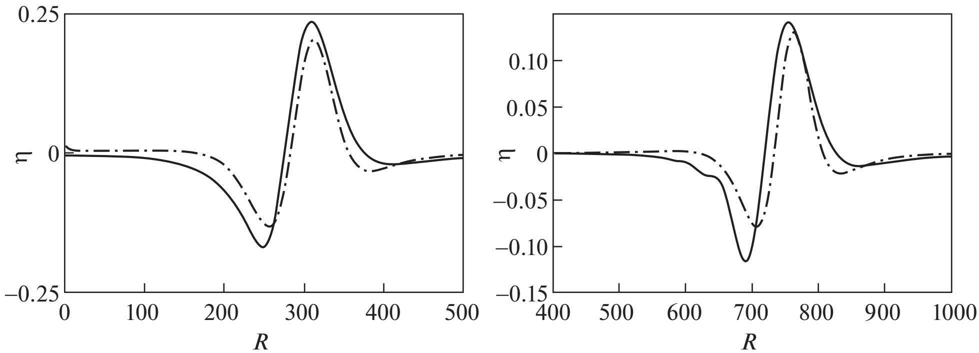

Рис. 7

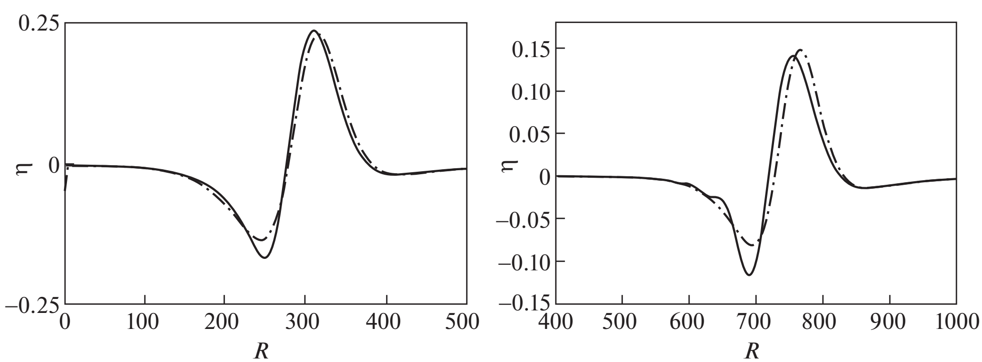

Рис. 8

профили полученные по явным формулам демонстрируют чуть меньшие амплитуды у головных гребня и впадины, а также более быстрый выход на стационарное значение. С увеличением расстояния (график справа) в волнах, полученных по точным зависимостям, начинают проявляться дисперсионные эффекты, отсутствующие в волнах, рассчитанных по (3.19).

На рис. 8 приведено сравнение волновых профилей, рассчитанных по точным формулам – сплошные и аналитическим зависимостям (3.20) – штрихпунктирные линии, для тех же параметров, что и на предыдущем рисунке.

Заключение. Получены простые формулы, позволяющие изучать влияние параметров источника и среды на распространение возбуждаемых этим источником длинных волн. Вывод этих формул опирается, в том числе, на предложенный способ упрощения подынтегральных выражений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00644 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород.: Институт прикладной физики РАН, 1996. 276 с.

2. *Kanamori H.* Mechanism of tsunami earthquakes // Phys. Earth Planet. Inter. 1972. № 6. P. 349–359.

3. *Yamashita T., Sato R.* Generation of tsunami by a fault model // J. Phys. Earth. 1974. № 22. P. 415–440.

4. *Levin B.W., Nosov M.A.* Physics of Tsunamis. Second Ed. Springer, 2016. 388 p.

5. *Подъяпольский Г.С.* Возбуждение цунами землетрясением // Методы расчета возникновения и распространения цунами. М.: Наука, 1978. С. 30–87.

6. *Sabatier P.C.* On water waves produced by ground motions // J. Fluid Mech. 1983. № 126. P. 27–58.

7. *Гусяков В.К., Чубаров Л.Б.* Численное моделирование возбуждения и распространения цунами в прибрежной зоне // Изв. РАН. Физика Земли. 1987. Вып. 11. С. 53–64.

8. *Фрагела А. К.* К задаче о движении идеальной жидкости в неограниченном упругом бассейне // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. Вып. 8. С. 1417–1426.

9. *Доброхотов С.Ю., Толстова О.Л., Чудинович И.Ю.* Волны в жидкости на упругом основании. Теорема существования и точные решения // Матем. заметки, 1993. Т. 54. Вып. 3. С. 33–55.

10. *Зволинский Н.В., Карпов И.И., Никитин И.С., Секерж-Зенькович С.Я.* Возбуждение волн цунами и Рэлея гармоническим двумерным центром вращения // Изв. РАН. Физика Земли. 1994. Вып. 9. С. 29–33.

11. *Гринив Р.О., Доброхотов С.Ю., Шкаликов А.А.* Операторная модель задачи о колебаниях жидкости на упругом основании // Матем. заметки. 2000. Т. 68. Вып. 1. С. 57–70.

12. *Dobrokhotov S.Yu, Tolstova O.L., Sekerzh-Zenkovich S.Ya, Vargas C.A.* Influence of the elastic base of a basin on the propagation of waves on the water surface // Russ. J. Math. Physics. 2018. T. 25. № 4. P. 459–469.

13. *Доброхотов С.Ю., Ильясов Х.Х., Секерж-Зенькович С.Я., Толстова О.Л.* Простые решения задачи о волнах на поверхности жидкости в рамках линейной гидроупругой модели // ДАН. 2019. Т.18. № 4. С. 370–375.

14. *Федорюк М.В.* Асимптотика, интегралы и ряды. М.:Наука, 1987. 544 с.

15. *Dobrokhotov S.Yu, Nazaikinskii V.E.* Tirozzi, Asymptotic solutions of 2-D wave equations with variable velocity and localized right-hand side // Russian Journal of Mathematical Physics. 2010. V. 17. № 1. P. 66–76.

16. Wolfram Mathematica, www.wolfram.com/mathematica/