ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020,
№ 5, с. 21–26

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕНЗОР-ФУНКЦИИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ И НЕКОТОРЫЕ “ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ” НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Д. В. Георгиевский[a,b,*]

[a]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[b]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 25.11.2019 г.
После доработки 08.12.2019 г.
Принята к публикации 10.02.2020 г.

Исследуется общее представление в трехмерном пространстве симметричной изотропной тензор-функции второго ранга, зависящей от двух тензорных аргументов также второго ранга. В данное представление входят восемь скалярных материальных функций десяти инвариантов зависимых тензоров, включая четыре совместных инварианта. Тензор-функция интерпретируется как определяющее соотношение изотропного нелинейного материала, выражающее связь деформаций с напряжениями и скоростями напряжений. Выбирается определенный вид напряженного состояния, соответствующий комбинации осевого растяжения стержня постоянной силой и (θz)-кручения периодическим по времени моментом. Показывается, что при надлежащем подборе упомянутых восьми материальных функций как функций инвариантов напряженного состояния можно описать гораздо более сильное изменение осевых деформаций при совместном растяжении и циклическом кручении, чем при отдельном растяжении без кручения. Такой “ортогональный эффект” напряженно-деформированного состояния близок по форме к известным в экспериментальной механике рэтчеттингу и виброползучести.

Ключевые слова: нелинейная тензор-функция, изотропия, напряжение, деформация, скорость напряжений, рэтчеттинг, виброползучесть, “ортогональный эффект”

DOI: 10.31857/S0572329920040042

1. Общий вид тензорно-нелинейной изотропной функции двух аргументов. Остановимся на достаточно общем в тензорном анализе представлении в трехмерном евклидовом пространстве симметричной изотропной тензор-функции второго ранга

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \tag{1.1}$$

двух симметричных тензорных аргументов $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ также второго ранга:

$$\begin{gathered}\mathbf{C} = K_0\mathbf{I} + K_1\mathbf{A} + K_2\mathbf{B} + K_3\mathbf{A}^2 + K_4\mathbf{B}^2 + K_5(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) + \\ + K_6(\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^2) + K_7(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\cdot\mathbf{A}) + K_8(\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\cdot\mathbf{A}^2)\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга, $\mathbf{K}_0,\ldots,\mathbf{K}_8$ – девять скалярных функций, зависящих от десяти функционально независимых инвариантов

$$\begin{gathered} I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{A}, \quad I_2 = \mathrm{tr}\mathbf{B}, \quad I_3 = \sqrt{\mathrm{tr}\mathbf{A}^2}, \quad I_4 = \sqrt{\mathrm{tr}\mathbf{B}^2}, \quad I_5 = \sqrt[3]{\mathrm{tr}\mathbf{A}^3} \\ I_6 = \sqrt[3]{\mathrm{tr}\mathbf{B}^3}, \quad I_7 = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}, \quad I_8 = \sqrt[3]{\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B})} \\ I_9 = \sqrt[3]{\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^2)}, \quad I_{10} = \sqrt[4]{\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}^2)} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Поскольку тензор $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, вообще говоря, не является положительным, без ограничения общности допустим, что инвариант I_7 может быть как действительной, так и мнимой величиной.

Представлениям нелинейных тензор-функций любого ранга от двух переменных для разных типов анизотропии и возникающим группам симметрии посвящена работа [1]. Развитие теории в случае большего числа тензорных аргументов – от трех до шести, а также многие важные элементы теории инвариантов содержатся в монографии [2]. Вопросы существования скалярного потенциала $W(I_1, \ldots, I_{10})$ такого, что $\mathbf{C} = \partial W/\partial\mathbf{A}$, и возникающие 21 условие потенциальности рассмотрены в [3].

Тензорная запись уравнений позволяет формулировать инвариантные (не зависящие от выбора системы координат) зависимости, поэтому аппарат теории тензор-функций находит значительное применение в теории определяющих соотношений механики сплошной среды [4–9].

Пусть в цилиндрической системе координат (r, θ, z) ненулевые физические компоненты тензоров $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ следующие:

$$A_{zz} = A_0(\mathbf{x},t), \quad A_{\theta z} = A_{z\theta} = A_1(\mathbf{x},t), \quad B_{\theta z} = B_{z\theta} = B_1(\mathbf{x},t) \tag{1.4}$$

Вычислим физические компоненты других тензоров, входящих в связь (1.2). Для наглядности прибегнем к матричной форме записи, где первые столбец и строка отвечают координате z цилиндрической системы, вторые – θ, третьи – r:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} A_0^2 + A_1^2 & A_0A_1 & 0 \\ A_0A_1 & A_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} A_0(A_0^2 + 2A_1^2) & (A_0^2 + A_1^2)A_1 & 0 \\ (A_0^2 + A_1^2)A_1 & A_0A_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & B_1^3 & 0 \\ B_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2A_1B_1 & A_0B_1 & 0 \\ A_0B_1 & 2A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2A_0A_1B_1 & (A_0^2 + 2A_1^2)B_1 & 0 \\ (A_0^2 + 2A_1^2)B_1 & 2A_0A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2A_0B_1^2 & 2A_1B_1^2 & 0\\ 2A_1B_1^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\cdot\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}2(A_0^2+A_1^2)B_1^2 & 2A_0A_1B_1^2 & 0\\ 2A_0A_1B_1^2 & 2A_1^2B_1^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Десять инвариантов (1.3) имеют вид

$$\begin{gathered}I_1=A_0,\quad I_2=I_6=0,\quad I_3=\sqrt{A_0^2+2A_1^2},\quad I_4=\sqrt{2}|B_1|\\ I_5=\sqrt[3]{A_0(A_0^2+3A_1^2)},\quad I_7=\sqrt{2A_1B_1},\quad I_8=\sqrt[3]{2A_0A_1B_1}\\ I_9=\sqrt[3]{A_0B_1^2},\quad I_{10}=\sqrt[4]{(A_0^2+2A_1^2)B_1^2}\end{gathered}\tag{1.6}$$

С учетом соотношений (1.5) и согласно представлению (1.2) ненулевые компоненты тензора $\mathbf{C}$ в случае задания $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в виде (1.4) следующие:

$$\begin{gathered}C_{zz}=K_0+K_1A_0+K_3(A_0^2+A_1^2)+K_4B_1^2+2K_5A_1B_1+\\ +2K_6A_0A_1B_1+2K_7A_0B_1^2+2K_8(A_0^2+A_1^2)B_1^2\\ C_{\theta\theta}=K_0+K_3A_1^2+K_4B_1^2+2K_5A_1B_1+2K_6A_0A_1B_1+2K_8A_1^2B_1^2\\ C_{\theta z}=C_{z\theta}=K_1A_1+K_2B_1+K_3A_0A_1+K_5A_0B_1+\\ +K_6(A_0^2+2A_1^2)B_1+2K_7A_1B_1^2+2K_8A_0A_1B_1^2,\quad C_{rr}=K_0\end{gathered}\tag{1.7}$$

2. Тензорно нелинейные эффекты. Под “ортогональными эффектами” напряженно-деформированного состояния в точке среды [10] понимаются ситуации, когда угол между девиаторами напряжений и деформаций (или скоростей деформаций) в этой точке не равен нулю и пренебречь этим фактом в моделировании нельзя. Положительность угла равносильна любому из трех утверждений: а) данные два девиатора непропорциональны; б) единичные направляющие девиаторов отличаются друг от друга; в) определяющие соотношения материала описываются аппаратом тензорно нелинейных функций [11, 12].

В середине XIX века, проводя опыты с кручением металлических цилиндров, Г. Вертгейм обнаружил и измерил удлинение цилиндров. Им было проведено около шестидесяти таких опытов [13], в них осуществлялись малые деформации сплошных и полых, стальных и латунных цилиндров кругового и эллиптического сечения. В начале XX века Дж. Пойнтинг также наблюдал изменение длины и объема скручиваемых стальных образцов, но уже при больших деформациях [14]. Относительное удлинение образца приближенно пропорционально квадрату угла закручивания, а при фиксированном значении угла удлинение пропорционально квадрату радиуса. Пойнтингом же показано, что удлинение и изменение объема скорее всего не связаны с изменением упругих постоянных, т. е. с деформациионной анизотропией.

Для явления возникновения деформаций в направлении, ортогональном чисто сдвиговым усилиям, был введен термин “эффект Пойнтинга”. В [15] это явление было отнесено к так называемым эффектам второго порядка. Его количественному описанию для изотропных и анизотропных материалов при малых и конечных деформациях посвящено большое количество работ [16–19].

В [20, 21] приведены результаты проведенных Б.М. Малышевым в Институте механики МГУ первых экспериментальных исследований по кручению различных образцов под действием крутящих моментов при непрерывном пластическом растяжении. В [20] испытания велись при нагружении, мало отличающемся от простого. После некоторой осевой деформации момент внезапно прикладывался и снимался. Отмечены различные аномалии в поведении образцов, свидетельствующие еще об одном помимо эффекта Пойнтинга явлении, непосредственно указывающем на тензорную нелинейность определяющих соотношений, – рэтчеттинге. Он заключается в гораздо более сильном изменении осевых деформаций при совместном растяжении и циклическим кручении с ненулевым средним, чем при отдельном осевом растяжении без кручения (см. литературу и анализ тенденций в изучении в [22]). К числу аналогичных по кинематике и геометрии деформирования явлений в реономных моделях можно отнести виброползучесть [23].

Придадим тензору $\mathbf{C}$ смысл некоторой меры деформации, так что компоненты C_{zz}, $C_{\theta\theta}$ и $C_{\theta z}$ (1.7) отвечают за относительное осевое удлинение, кольцевую деформацию и (θz)-сдвиг соответственно. Компонентам A_{zz} и $A_{\theta z}$ (1.4) придадим смысл осевого и сдвигового напряжений, причем положим

$$A_0(\mathbf{x},t) = \sigma_0(\mathbf{x}), \quad A_1(\mathbf{x},t) = \tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t \tag{2.1}$$

где $\sigma_0(\mathbf{x})$, $\tau_0(\mathbf{x})$, $\tau_1(\mathbf{x})$ – не зависящие от t функции, обеспечивающие выполнение уравнений равновесия (движения) и условий совместности. Пусть также компонента $B_{\theta z}$ (1.4) имеет вид

$$B_1(\mathbf{x},t) = \omega\tau_1(\mathbf{x})\cos\omega t \tag{2.2}$$

т.е. является частной производной по времени от $A_{\theta z}$. Таким образом, представление (1.2) и его частный случай (1.7) интерпретированы как определяющие соотношения, связывающие меру деформации $\mathbf{C}$ с некоторыми мерами напряжений $\mathbf{A}$ и скоростей напряжений $\mathbf{B}$.

Оставим в (1.2) ненулевыми только материальные функции K_0, K_1 и K_7:

$$\mathbf{C} = K_0\mathbf{I} + K_1\mathbf{A} + K_7(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\cdot\mathbf{A}) \tag{2.3}$$

Заметим, что тензор-функция $\mathbf{C}$ (2.3) тензорно линейна по $\mathbf{A}$, т.е. угол между девиаторами тензоров $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ нулевой при любом $\mathbf{B}$. Согласно (1.7) имеем

$$\begin{gathered} C_{zz} = K_0 + \sigma_0(K_1 + 2K_7\omega^2\tau_1^2\cos^2\omega t), \quad C_{\theta\theta} = C_{rr} = K_0 \\ C_{\theta z} = (\tau_0 + \tau_1\sin\omega t)(K_1 + 2K_7\omega^2\tau_1^2\cos^2\omega t) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Для простоты положим скалярные функции K_1 и K_7 материальными константами k_1 и k_7, а K_0 линейной функцией $k_0\sigma_0$ первого инварианта напряжений σ_0. Из соотношений (2.4) следует, что

$$\begin{gathered} C_{zz} = (k_0 + k_1)\sigma_0 + 2k_7\omega^2\sigma_0\tau_1^2\cos^2\omega t, \quad C_{\theta\theta} = C_{rr} = k_0\sigma_0 \\ C_{\theta z} = (\tau_0 + \tau_1\sin\omega t)(k_1 + 2k_7\omega^2\tau_1^2\cos^2\omega t) \end{gathered} \tag{2.5}$$

При $k_7 = 0$ определяющие соотношения (2.5) физически линейны. Наличие ненулевой постоянной k_7 приводит к “ортогональному эффекту” типа рэтчеттинга и виброползучести, заключающемся в том, что осевая компонента C_{zz} (2.5) наряду с зависимостью от первого слагаемого $(k_0 + k_1)\sigma_0$ явно зависит от частоты ω и амплитуды τ_1 крутильных (θz)-напряжений. Относительное влияние парамтеров ω и τ_1 на C_{zz} характеризуется безразмерным отношением

$$\sup_t\left|\frac{C_{zz} - C_{zz}|_{k_7=0}}{C_{zz}|_{k_7=0}}\right| = \frac{2k_7}{k_0 + k_1}\omega^2\tau_1^2 \tag{2.6}$$

За счет увеличения частоты вибрации ω отношение (2.6) даже при малой амплитуде $\tau_1(\mathbf{x})$ крутильных напряжений ($\tau_1 \ll \sigma_0$) может достичь конечной величины, сопоставимой с единицей.

Отметим, что привлечение тензор-функции (2.3) именно в таком виде для моделирования описанного "ортогонального эффекта" приводит еще к двум следствиям:

– в (2.6) не входит присутствующая в (2.1) функция $\tau_0(\mathbf{x})$, т.е. на дополнительную осевую деформацию не влияет, с нулевым или с ненулевым средним осуществляется вибрационный (θz)-процесс по напряжениям;

– аналогично (2.6) для кольцевой компоненты $C_{\theta\theta}$ имеем

$$\sup_t \left| \frac{C_{\theta\theta} - C_{\theta\theta}|_{k_7=0}}{C_{\theta\theta}|_{k_7=0}} \right| = \frac{2k_7}{k_1}\omega^2\tau_1^2 \tag{2.7}$$

Работа выполнена в рамках госзадания АААА-А20-120011690136-2 при поддержке РФФИ (гранты 18-29-10085мк, 19-01-00016а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 393–417.
2. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с. *Spencer A.J.M.* Continuum Physics. V. 1. Part III. Theory of Invariants. N.-Y. London, 1971. P. 239–353.
3. *Георгиевский Д.В.* О потенциальных изотропных тензор-функциях двух тензорных аргументов в МДТТ // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 220–224.
4. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
5. *Аннин Б.Д.* Формула Лагранжа–Сильвестра для тензорной функции, зависящей от двух тензоров // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 4. С. 743–744.
6. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
7. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
8. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
9. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.
10. *Георгиевский Д.В.* Об "ортогональных эффектах" напряженно-деформированного состояния в механике сплошной среды // Вестн. Киевского нац. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2013. № 3. С. 114–116.
11. *Георгиевский Д.В.* Об угле между девиаторами напряжений и скоростей деформаций в тензорно-нелинейной изотропной среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2013. № 6. С. 63–66.
12. *Георгиевский Д.В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.
13. *Wertheim G.* Me′moire sur la torsion. Premi`e re Partie // Annales de Chimie et de Physique. 1857. Ser. 50. P. 195–321.
14. *Poynting J.H.* On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distorsional waves in steel // Proc. Roy. Soc. London. 1912. Ser. A86. P. 534–561.
15. *Green A.E.* A note on second-order effect in the torsion of incompressible cylinders // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1954. V. 50. № 3. P. 488–490.
16. *Batra R.C., dell'Isola F., Ruta G.C.* Generalized Poynting effects in prismatic bars // J. Elasticity. 1998. V. 50. № 2. P. 181–196.
17. *Akinola A.* An energy function for transversely isotropic elastic material and the Poynting effect // Korean J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 6. № 3. P. 639–649.
18. *Астапов В.Ф., Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Кручение сплошного цилиндра из изотропного упругого материала // Изв. Тульского ГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1999. Т. 5. Вып. 2. С. 43–48.

19. *Гавриляченко Т.В., Карякин М.И.* Об особенностях нелинейно-упругого поведения сжимаемых тел цилиндрической формы при кручении // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 188–193.
20. *Малышев Б.М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1958. № 1. С. 55–68.
21. *Малышев Б.М.* Кручение трубок при ступенчатом изменении крутящего момента в процессе непрерывного растяжения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1958. № 2. С. 33–46.
22. *Васин Р.А., Быля О.И., Чистяков П.В.* О некоторых тенденциях в исследовании ретчеттинга // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 4.
23. *Локощенко А.М.* Виброползучесть металлов при одноосном и сложном напряженных состояниях // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 111–120.