ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 5, с. 95–106

УДК 539.373,539.6,532.613.1

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ОКРУЖНОСТЯМИ

© 2020 г. Д. В. Гандилян[a],*, К. Б. Устинов[a],**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: david.ghandilyan@mail.ru*
***e-mail: ustinov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2020 г.
После доработки 10.03.2020 г.
Принята к публикации 20.04.2020 г.

В работе рассмотрены некоторые задачи теории упругости для областей, ограниченных неконцентрическими окружностями, с учетом поверхностных эффектов, таких как поверхностная упругость и поверхностные напряжения. Решения получены путем разложения в ряды Фурье переменных, записанных в биполярной системе координат. Интересующие величины поверхностных напряжений и концентраций напряжений получены с использованием рекуррентных соотношений. Рассмотрен вклад, вносимый поверхностными эффектами.

Ключевые слова: поверхностная упругость, поверхностное напряжение, биполярная система координат, ряды Фурье

DOI: 10.31857/S0572329920050062

Введение. Механические свойства тел вблизи поверхности могут существенно отличаться от свойств вещества вдали от поверхности в силу ряда причин – начиная от отличия в химических связях для приповерхностных атомов и наличия свободных радикалов, до присутствия оксидных пленок (напр., [1–3]). При рассмотрении объектов малых размеров (порядка микро- и нанометров) роль поверхностных эффектов возрастает. Удобным способом учета поверхностных явлений является использование наряду с уравнениями теории упругости уравнений поверхностной упругости [4]. Достаточно общий метод решения задач теории упругости с учетом поверхностных эффектов заключается в использовании специфических граничных условий, соответствующих уравнениям поверхностной упругости. Данный метод для двумерного случая в сочетании с применением методов теории функции комплексного переменного был развит в работах [5, 6]. Следует отметить, что количество полученных аналитических решений для конкретных задач ограничено, что может быть связано с довольно неудобным видом граничных условий. Большинство полученных решений ограничено достаточно простыми геометриями, такими как сферическая пора [7–10], плоскость с одиночным круговым отверстием [11], одиночная пластина [12]. Однако рассмотрение одиночных круговых (в двумерном случае) и сферических (в трехмерном) отверстий наименее интересно с точки зрения влияния поверхностных эффектов, поскольку в этих случаях их вклад минимален. В данной работе рассмотрены задачи: о двух равных круговых отверстиях в плоскости и об эксцентрической трубе под действием равномерного давления. Несмотря на достаточно простую геометрию, из-за малого расстояния между границами можно ожидать более существенного вклада от поверхностных эффектов.

Для всех рассматриваемых случаев среды предполагаются линейно упругими, свойства которых определяются постоянными Ламе: λ, μ при этом λ_s, μ_s – постоянные, характеризующие аналогичные поверхностные свойства.

1. Задача о двух круглых отверстиях в плоскости. *1.1. Биполярная система координат. Основные уравнения.* Задача о пластине с двумя отверстиями в случае классической упругости была решена Лингом [14] с использованием общего решения Джеффри [13]. Ниже будет получено обобщение данного решения, учитывающее поверхностные эффекты. Следуя [13], введем биполярные координаты (α, β), связанные с декартовыми координатами (x, y) следующим образом:

$$x + iy = -a\coth\left(i\frac{\alpha + i\beta}{2}\right); \quad \alpha + i\beta = \ln\left(\frac{x + i(y + a)}{x + i(y - a)}\right) \tag{1.1}$$

Полюсы O_1, O_2 расположены на расстоянии 2a друг от друга. Масштабный коэффициент определяется как

$$g = 1/\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2} = \frac{\cosh\alpha - \cos\beta}{a} \tag{1.2}$$

Для любой точки P, расположенной на расстоянии r_1, r_2 от точек O_1, O_2, так что их радиус-векторы образуют углы θ_1, θ_2 с осью x биполярные координаты суть

$$\alpha = \ln\frac{r_1}{r_2}; \quad \beta = \theta_1 - \theta_2 \tag{1.3}$$

Линии $\alpha = \text{const}$ представляют собой набор окружностей с центрами на оси Oy. Окружности, соответствующие положительным значениям α, лежат выше оси Ox, а отрицательным – ниже оси Ox, сама ось Ox соответствует значению $\alpha = 0$ (рис. 1).

Линии $\beta = \text{const}$ представляют собой дуги окружностей, проходящих через точки O_1, O_2 и ортогональные окружностям $\alpha = \text{const}$. С правой стороны от оси Oy $\beta > 0$, а с левой стороны – $\beta < 0$, ось Oy соответствует значению $\beta = 0$, за исключением сегмента O_1, O_2, где $\beta = \pm\pi$. В точках O_1, O_2 – $\alpha = \pm\infty$, а β неопределенно.

Будем полагать, что постоянное значение $\alpha = \pm\gamma$ соответствует контурам отверстий, тогда для радиуса отверстий R и расстояния между центрами отверстий $2d$ имеют место следующие соотношения

$$R = a/\sinh\gamma; \quad d = a\coth\gamma; \quad d/R = \cosh\gamma \tag{1.4}$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} выражаются через бигармоническую функцию напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$ следующим образом:

$$\Delta^2\Phi = 0; \quad \left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right](g\Phi) = 0 \tag{1.5}$$

$$a\sigma_{\alpha\alpha} = \left[(\cosh\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \sinh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \cosh\alpha\right](g\Phi)$$

$$a\sigma_{\beta\beta} = \left[(\cosh\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \sinh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta\right](g\Phi) \tag{1.6}$$

$$a\sigma_{\alpha\beta} = -(\cosh\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi)$$

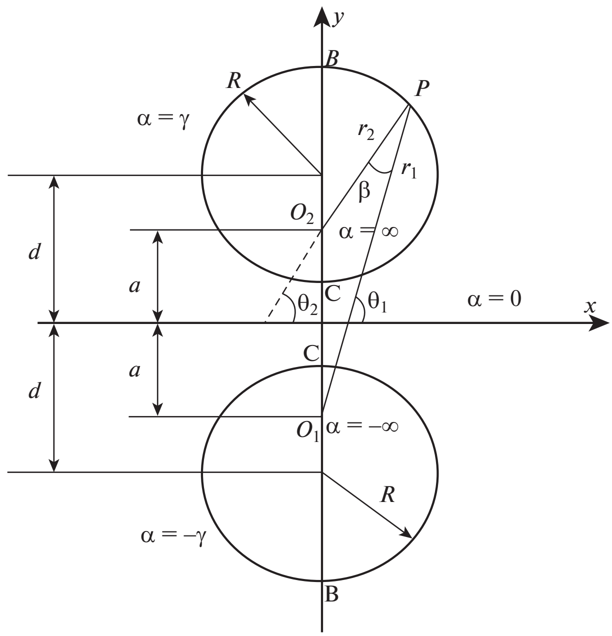

Рис. 1

Функция напряжения $\Phi(\alpha,\beta)$ представляется в виде суммы [14]

$$g\Phi = g\Phi_0 + apgF$$

где функция Φ_0 соответствует заданным напряжениям на бесконечности, а функция F снимает усилия, возникающие от функции Φ_0 на контурах отверстий. В частности, в случае всестороннего растяжения функция $\Phi(\alpha, \beta)$ имеет вид

$$\frac{g\Phi}{ap} = \frac{1}{2}(\cosh\alpha + \cos\beta) + K(\cosh\alpha - \cos\beta)\ln(\cosh\alpha - \cos\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha)\cos n\beta \tag{1.7}$$

$$f_n(\alpha) = A_n\cosh(n+1)\alpha + B_n\cosh(n-1)\alpha \tag{1.8}$$

В дополнении к (1.7) должно выполняться условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n) = 0 \tag{1.9}$$

что соответствует условию gF на бесконечности (т.е. при $\alpha = \beta = 0$).

Для удовлетворения граничных условий на контуре (из-за симметрии достаточно рассмотреть только один контур $\alpha = \gamma$) представим напряжения на контуре в виде рядов Фурье, которые в случае указанной симметрии имеют вид

$$a\sigma_{\alpha\alpha} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos n\beta$$

$$a\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\beta \tag{1.10}$$

$$a\sigma_{\beta\beta} = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n\beta$$

где коэффициенты c_k, b_k, d_k выражаются через параметры A_n, B_n, K.

1.2. Постановка задачи. Граничные условия. В общем случае граничные условия описываются обобщенным законом Лапласа–Юнга и имеют вид [16]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -\nabla_s \boldsymbol{\sigma}^s \tag{1.11}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор объемных напряжений, $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности, $\boldsymbol{\sigma}^s$ – тензор поверхностных напряжений, ∇_s – поверхностный градиент [16]. В случае криволинейной поверхности $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}^s$ выражается следующим образом

$$\begin{gathered}\nabla_s \boldsymbol{\sigma}^s = -\left[\frac{\sigma_{11}^s}{R_1} + \frac{\sigma_{22}^s}{R_2}\right] + \\ + \frac{\mathbf{e}_1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2\sigma_{11}^s)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(h_1\sigma_{21}^s)}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial h_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}^s - \frac{\partial h_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{22}^s\right] + \\ + \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_1\sigma_{22}^s)}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(h_2\sigma_{12}^s)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial h_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{21}^s - \frac{\partial h_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{11}^s\right]\end{gathered} \tag{1.12}$$

где R_1, R_2 – радиусы кривизны, h_1, h_2 – метрические коэффициенты, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – орты криволинейной системы координат (α_1, α_2), также α_1, α_2 являются двумя параметрами, определяющими поверхность так, что при $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$ получаем два набора взаимно ортогональных кривых на поверхности. Для рассматриваемого случая, когда поверхность образована окружностью (цилиндром), при $\alpha = \gamma$ в биполярной (бицилиндрической) системе координат (1.11), имеем [17]

$$\alpha_1 = \alpha; \quad \alpha_2 = z; \quad R_1 = R; \quad 1/R_2 = 0; \quad h_1 = 1/g; \quad h_2 = 1 \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{1}{R}\sigma_{\beta\beta}^s \\ \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{R}\frac{\cosh\alpha - \cos\beta}{\sinh\alpha}\frac{\partial\sigma_{\beta\beta}^s}{\partial\beta}\end{gathered} \tag{1.14}$$

Второе уравнение (1.14) с помощью первого уравнения представляется в виде

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\cosh\alpha - \cos\beta}{\sinh\alpha}\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}}{\partial\beta} \tag{1.15}$$

Однако поверхностное напряжение $\sigma_{\beta\beta}^s$ все еще неизвестно. Чтобы получить граничные условия, выразим поверхностное напряжение через определяющие соотношения (Законы Гука и Шаттлворса):

$$\sigma_{\beta\beta}^s = C_{\beta\beta\beta\beta}^s \epsilon_{\beta\beta}; \quad \epsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{E}[\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}] \tag{1.16}$$

где $C_{\beta\beta\beta\beta}^s$ – модуль поверхностной упругости, $\epsilon_{\beta\beta}$ – окружная поверхностная деформация, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Отсюда следует

$$\frac{\sigma_{\beta\beta}^s}{R} = \varepsilon[\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}]; \quad \varepsilon = \frac{C_{\beta\beta\beta\beta}^s}{ER} \tag{1.17}$$

С учетом (1.17) граничные условия (1.14), (1.15) переписываются следующим образом

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \varepsilon\left[\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}\right] \tag{1.18}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon\frac{\cosh\alpha - \cos\beta}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}\right] \tag{1.19}$$

Решение указанной задачи может быть получено путем приравнивания коэффициентов при синусах и косинусах β, что однако приводит к довольно сложным манипуляциям с рядами. Альтернативный способ заключается в разложении всех функций по малому параметру ε:

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m\sigma_{ij}; \quad b = \sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m b^m; \quad c = \sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m c^m; \quad d = \sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m d^m \tag{1.20}$$

Теперь, приравнивая члены с равными степенями при ε, получаем рекуррентные системы для граничных условий

$$\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \\
\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} = \sigma_{\beta\beta}^{(0)}; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{\cosh\alpha - \cos\beta}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\sigma_{\beta\beta}^{(0)} \\
\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} = [\sigma_{\beta\beta}^{(m-1)} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}^{(m-1)}]; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{\cosh\alpha - \cos\beta}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}[\sigma_{\beta\beta}^{(m-1)} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}^{(m-1)}], \quad m \geq 1
\end{gathered} \tag{1.21}$$

1.3. Нулевое приближение (классическая упругость). В случае нулевых правых частей в (1.11), что соответствует случаю классической упругости, решение [14] имеет вид

$$\begin{gathered}
A_n^{(0)} = 2K^{(0)}\frac{(e^{-n\gamma}\sinh(n\gamma) + ne^{-\gamma}\sinh\gamma)}{n(n+1)(n\sinh 2\gamma + \sinh(2n\gamma))}, \quad n \geq 1 \\
B_n^{(0)} = -2K^{(0)}\frac{(e^{-n\gamma}\sinh(n\gamma) + ne^{\gamma}\sinh\gamma)}{n(n-1)(n\sinh 2\gamma + \sinh(2n\gamma))}, \quad n \geq 2 \\
B_1^{(0)} = -1 + \frac{K^{(0)}}{2}\tanh\gamma\cosh 2\gamma \\
K^{(0)} = \left(\frac{1}{2} + \tanh\gamma\sinh^2\gamma - 4\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-n\gamma}\sinh(n\gamma) + n\sinh\gamma(n\sinh\gamma + \cosh\gamma)}{n(n^2-1)(n\sinh 2\gamma + \sinh(2n\gamma))}\right)^{-1}
\end{gathered} \tag{1.22}$$

Здесь коэффициенты отмечены верхним индексом 0 соответствуют классическому решению при отсутствии поверхностной упругости. Они также служат нулевым приближением в разложении по параметру ε соответствующих решений задачи, учитывающей поверхностную упругость.

1.4. Рекуррентное решение. В разделе 1.2 посредством (1.21) рассматриваемая задача сводится к набору последовательных задач для каждого члена разложения по малому параметру ε.

Действительно, зная $(m-1)$-е решение для компонент напряжения (т.е. зная $A_n^{(m-1)}$, $B_n^{(m-1)}$, $K^{(m-1)}$), аналогично (1.10) с помощью (1.6), (1.7) получаем

$$a\sigma_{\alpha\alpha}^{(m-1)} = c_0^{(m-1)} + \sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(m-1)}\cos n\beta; \quad a\sigma_{\beta\beta}^{(m-1)} = d_0^{(m-1)} + \sum_{n=1}^{\infty}d_n^{(m-1)}\cos n\beta \tag{1.23}$$

где $c_n^{(m-1)}$, $d_n^{(m-1)}$ имеют вид

$$c_0^{(m-1)} = B_1^{(m-1)} + A_1^{(m-1)}\cosh 2\gamma - \frac{1}{2}K^{(m-1)}\cosh 2\gamma$$

$$\begin{gathered} c_n^{(m-1)} = \delta_{n,1}K^{(m-1)}\cosh\gamma - \frac{1}{2}\delta_{n,2}K^{(m-1)} - \\ - A_n^{(m-1)}[(n^2-1)\cosh\gamma\cosh(n+1)\gamma + (n+1)\sinh\gamma\sinh(n+1)\gamma] - \\ - B_n^{(m-1)}[(n^2-1)\cosh\gamma\cosh(n-1)\gamma + (n-1)\sinh\gamma\sinh(n-1)\gamma] + \\ + \frac{1}{2}(n+2)(n+1)[A_{n+1}^{(m-1)}\cosh(n+2)\gamma + B_{n+1}^{(m-1)}\cosh n\gamma] + \\ + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)[A_{n-1}^{(m-1)}\cosh n\gamma + B_{n-1}^{(m-1)}\cosh(n-2)\gamma], \quad n \ge 1 \end{gathered} \tag{1.24}$$

$$d_0^{(m-1)} = B_1^{(m-1)} - A_1^{(m-1)}\cosh 2\gamma + \frac{1}{2}K^{(m-1)}\cosh 2\gamma$$

$$\begin{gathered} d_n^{(m-1)} = -\delta_{n,1}K^{(m-1)}\cosh\gamma + \frac{1}{2}\delta_{n,2}K^{(m-1)} + \\ + A_n^{(m-1)}[(n+1)^2\cosh\gamma\cosh(n+1)\gamma - (n+1)\sinh\gamma\sinh(n+1)\gamma] + \\ + B_n^{(m-1)}[(n-1)^2\cosh\gamma\cosh(n-1)\gamma - (n-1)\sinh\gamma\sinh(n-1)\gamma] - \\ - \frac{1}{2}A_{n+1}^{(m-1)}[(n+2)(n+1)\cosh(n+2)\gamma] - \frac{1}{2}A_{n-1}^{(m-1)}[(n-1)(n+2)\cosh n\gamma] - \\ - \frac{1}{2}B_{n+1}^{(m-1)}[(n-2)(n+1)\cosh n\gamma] - \frac{1}{2}B_{n-1}^{(m-1)}[(n-1)(n-2)\cosh(n-2)\gamma], \quad n \ge 1 \end{gathered} \tag{1.25}$$

где $\delta_{n,\,m}$ – символ Кронекера.

Граничные условия (последние два уравнения в (1.21)) могут быть записаны следующим образом

$$a\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(m)}\cos n\beta; \quad a\sigma_{\alpha\beta}^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(m)}\sin n\beta \tag{1.26}$$

где

$$\begin{gathered} s_n^{(m)} = d_n^{(m-1)} - \nu c_n^{(m-1)} \\ t_n^{(m)} = \frac{1}{2\sinh\gamma}[(n-1)d_{n-1}^{(m-1)} + (n+1)d_{n+1}^{(m-1)} - 2nd_n^{(m-1)}\cosh\gamma] - \\ - \frac{\nu}{2\sinh\gamma}[(n-1)c_{n-1}^{(m-1)} + (n+1)c_{n+1}^{(m-1)} - 2nc_n^{(m-1)}\cosh\gamma] \end{gathered} \tag{1.27}$$

Граничные условия дополняются условием, аналогичным (1.9)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{(m)} + B_n^{(m)}) = 0 \tag{1.28}$$

Данные уравнения образуют систему для получения $f_n^{(m)}$, $f_n'^{(m)}$, $K^{(m)}$ через $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$, $K^{(m-1)}$ следующим образом

$$a\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(m)}\cos n\beta = -\frac{K^{(m)}}{2}(\cosh 2\gamma - 2\cosh\gamma\cos\beta + \cos 2\beta) +$$

$$+f_1^{(m)}(\gamma) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)(n-2)\,f_{n-1}^{(m)}(\gamma) + (n+1)(n+2)\,f_{n+1}^{(m)}(\gamma) -$$

$$-2(n^2-1)\cosh\gamma f_n^{(m)}(\gamma) - 2\sinh\gamma f_n'^{(m)}(\gamma)]\cos n\beta \tag{1.29}$$

$$a\sigma_{\alpha\beta}^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(m)}\sin n\beta = -K^{(m)}\sinh\gamma\sin\beta -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)\,f_{n-1}'^{(m)}(\gamma) - 2n\cosh\gamma f_n'^{(m)}(\gamma) + (n+1)\,f_{n+1}'^{(m)}(\gamma)]\sin n\beta$$

Приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах (в дальнейшем опуская верхний индекс (m)), получаем

$$2s_0 = 2f_1(\gamma) - K\cosh 2\gamma$$

$$2ns_n = \psi_{n-1} + \psi_{n+1} - 2\psi_n\cosh\gamma - 2\psi_n'\sinh\gamma + 2K(\delta_{1,n}\cosh\gamma - \delta_{2,n}) \tag{1.30}$$

$$-2t_n = \psi_{n-1}' + \psi_{n+1}' - 2\psi_n'\cosh\gamma + 2K\delta_{1,n}\sinh\gamma$$

где

$$\psi_n = (n-1)n(n+1)\,f_n(\gamma); \quad \psi_n' = nf_n'(\gamma) \tag{1.31}$$

Предполагая временно K известным и применяя процедуру [13], а именно, умножая уравнение (1.30) на $e^{-n\gamma}$ и суммируя для всех n, получаем

$$\psi_1' = 2Ke^{-\gamma}\sinh\gamma + 2\sum_{n=1}^{\infty} t_n e^{-n\gamma}$$

При выводе данного уравнения также используется условие сходимости рядов $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n' = 0$. Из первого уравнения (1.30) непосредственно следует, что

$$f_1(\gamma) = \frac{K}{2}\cosh 2\gamma + s_0$$

При $n > 1$ значения ψ_n, ψ_n' вычисляются непосредственно

$$\psi_n' = p_n^{(1)}K + p_n^{(2)}; \quad \psi_n = p_n^{(3)}K + p_n^{(4)}, \quad n > 1 \tag{1.32}$$

где

$$p_n^{(1)} = 2e^{-\gamma}\sinh n\gamma - 2\sinh(n-1)\gamma$$

$$p_n^{(2)} = 2\sinh n\gamma\sinh^{-1}\gamma\sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{-k\gamma} - 2\sinh^{-1}\gamma\sum_{k=1}^{n-1} t_k\sinh(n-k)\gamma$$

$$\begin{gathered} p_n^{(3)} = 2e^{-\gamma}(n\cosh n\gamma - \coth\gamma\sinh n\gamma) + \\ +\sinh^{-1}\gamma[(n+1)\sinh(n-2)\gamma - (n-1)\sinh n\gamma] \end{gathered} \tag{1.33}$$

$$p_n^{(4)} = 2(n\cosh n\gamma - \coth\gamma\sinh n\gamma)\sinh^{-1}\gamma\sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{-k\gamma} +$$

$$+2\sinh^{-1}\gamma\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)\,t_k\cosh(n-k)\gamma - (ks_k + t_k\coth\gamma)\sinh(n-k)\gamma]$$

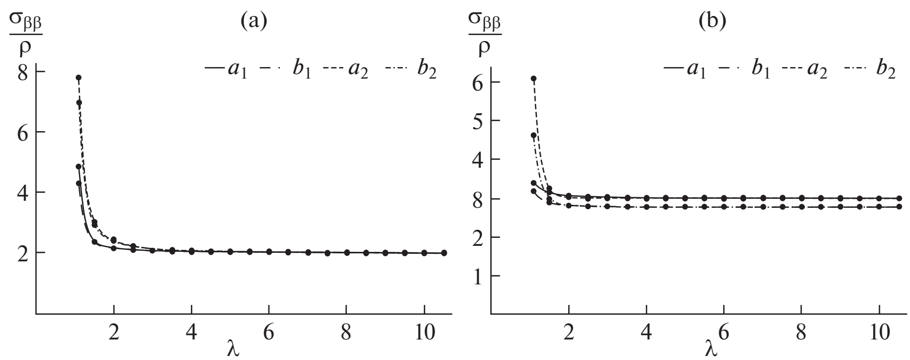

Рис. 2

Используя уравнения (1.31), (1.8), находим

$$A_1 = \frac{\psi_1'}{2\sinh 2\gamma}; \quad B_1 = f_1(\gamma) - \frac{\psi_1'}{2}\coth 2\gamma$$

$$A_n = q_n^{(1)}\psi_n' + q_n^{(2)}\psi_n = [q_n^{(1)}p_n^{(1)} + q_n^{(2)}p_n^{(3)}]K + q_n^{(1)}p_n^{(2)} + q_n^{(2)}p_n^{(4)} \tag{1.34}$$

$$B_n = q_n^{(3)}\psi_n' + q_n^{(4)}\psi_n = [q_n^{(3)}p_n^{(1)} + q_n^{(4)}p_n^{(3)}]K + q_n^{(3)}p_n^{(2)} + q_n^{(4)}p_n^{(4)}, \quad n > 1$$

где

$$\begin{aligned} q_n^{(1)} &= \frac{\cosh((n-1)\gamma)}{n(n\sinh 2\gamma + \sinh(2n\gamma))}; \quad q_n^{(2)} = -\frac{\sinh((n-1)\gamma)}{n(n+1)(n\sinh 2\gamma + \sinh(2n\gamma))} \\ q_n^{(3)} &= \frac{\cosh((n+1)\gamma)}{n(n\sinh 2\gamma + \sinh(2n\gamma))}; \quad q_n^{(4)} = \frac{\sinh((n+1)\gamma)}{n(n-1)(n\sinh 2\gamma + \sinh(2n\gamma))} \end{aligned} \tag{1.35}$$

В итоге, используя условие (1.28), находим коэффициент K

$$K = \left(\frac{\tanh\gamma\sum_{k=1}^{\infty}(t_k e^{-k\gamma}) - s_0 - \sum_{k=2}^{\infty}[p_k^{(2)}(q_k^{(1)} + q_k^{(3)}) + p_k^{(4)}(q_k^{(2)} + q_k^{(4)})]}{(\cosh 2\gamma - 2e^{-\gamma}\sinh\gamma\tanh\gamma)/2 + \sum_{k=2}^{\infty}[p_k^{(1)}(q_k^{(1)} + q_k^{(3)}) + p_k^{(3)}(q_k^{(2)} + q_k^{(4)})]} \right)^{-1} \tag{1.36}$$

Таким образом, полученное решение можно рассматривать как обобщение решения [14].

1.5. Результаты. Концентрации напряжений на контурах отверстий при всестороннем и одноосном растяжении представлены на рис. 2, 3, а непосредственно сами поверхностные напряжения – на рис. 4, 5 соответственно. Здесь и далее принято, что упругие постоянные материала соответствуют константам алюминия: E = 70.3 ГПа, ν = 0.345, а соответствующие свойства поверхности – упругими постоянными, взятыми из [5]:

$$\lambda_s = 6.8511 \text{ Н/м}, \quad \mu_s = -0.376 \text{ Н/м}$$

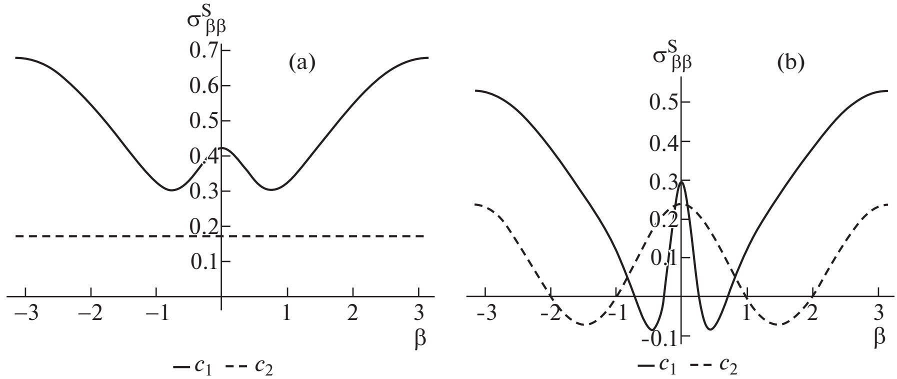

Рис. 3

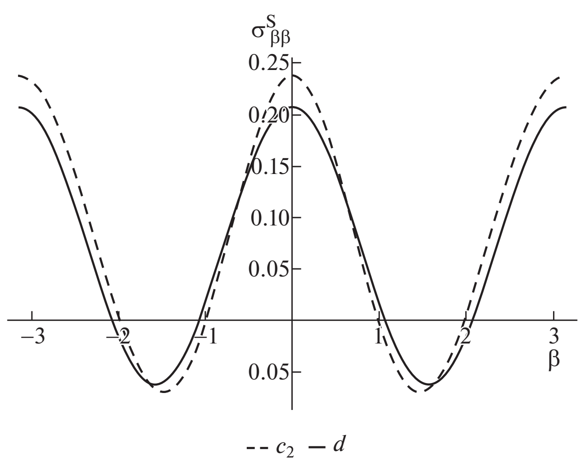

Рис. 4

Соответственно модуль поверхностной упругости имеет вид

$$C^{s}_{\beta\beta\beta\beta} = \lambda_s + 2\mu_s = 6.0991 \text{ Н/м}$$

Радиус отверстий полагался равным $R = 2$ нм. Концентрации напряжений в точках B, C (рис. 1) вычислялись для различных значений относительного расстояния между отверстиями $\lambda = d/R$.

На рис. 2a, рис. 2b линии b_1, a_1 соответствуют значениям концентрации напряжения с и без учета поверхностного напряжения в точке B, а линии b_2, a_2 – в точке C. На рис. 3a, рис. 3b линии c_1, c_2 соответствуют значению поверхностного напряжения на всем контуре при малом ($\lambda = 1.1$) и большом ($\lambda = 10.5$) расстоянии между отверстиями.

На рис. 4 линия d соответствует решению задачи для одного отверстия [5].

2. Эксцентрическая труба под равномерным давлением. *2.1. Общее решение.* Рассмотрим эксцентрическую трубу, где по контуру $\alpha = \alpha_1$ действует равномерное нормальное давление, равное p_1, а по контуру $\alpha = \alpha_2$ – давление равное p_2 (рис. 5). В биполяр-

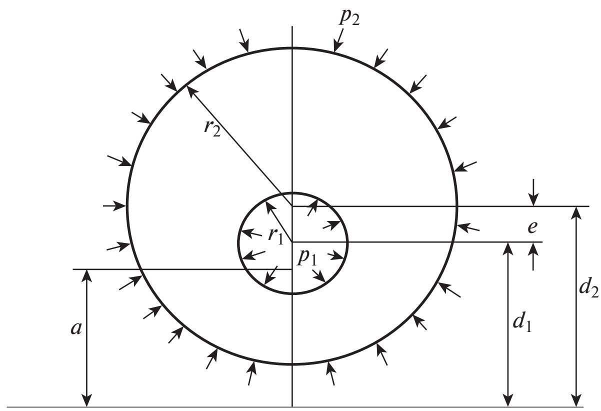

Рис. 5

ных координатах, радиусы контуров r_1, r_2, расстояния d_1, d_2 от начала координат до центров соответствующих окружностей, расстояние e между центрами (эксцентриситет) выражаются следующим образом

$$d_1 = a\coth\alpha_1, \quad d_2 = a\coth\alpha_2, \quad e = d_2 - d_1$$

$$2ed_1 = r_2^2 - r_1^2 - e^2, \quad 2ed_2 = r_2^2 - r_1^2 + e^2$$

Общее решение данной задачи, без учета поверхностной упругости получено в [15]

$$g\Phi = J\alpha(\cosh\alpha - \cos\beta) + (A\cosh 2\alpha + B + C\sinh 2\alpha)\cos\beta \tag{2.1}$$

Особенностью данного решения является отсутствие рядов, что сильно облегчает дальнейший анализ. Согласно (1.14)–(1.20), граничные условия для $\alpha = \gamma_1$, $\alpha = \gamma_2$, соответственно, записываются как

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = -p_1, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \tag{2.2}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = -p_2, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \tag{2.3}$$

в результате которого получаем рекуррентные соотношения, идентичные с (1.21).

2.2. Нулевое приближение (классическая упругость). В случае нулевого приближения (т.е. классической упругости), решение [15] имеет следующий вид

$$A^{(0)} = \frac{a(p_1 - p_2)}{\sinh(\alpha_1 - \alpha_2)(\cosh 2\alpha_1 + \cosh 2\alpha_2 - 2)}\sinh(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$B^{(0)} = \frac{a}{\sinh(\alpha_1 - \alpha_2)(\cosh 2\alpha_1 + \cosh 2\alpha_2 - 2)}((p_1 + p_2)\sinh(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ + \cosh(\alpha_1 - \alpha_2)(p_1\sinh 2\alpha_2 - p_2\sinh 2\alpha_1)) \tag{2.4}$$

$$C^{(0)} = \frac{a(p_1 - p_2)}{\sinh(\alpha_1 - \alpha_2)(\cosh 2\alpha_1 + \cosh 2\alpha_2 - 2)}\cosh(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$J^{(0)} = \frac{2a(p_1 - p_2)}{\sinh(\alpha_1 - \alpha_2)(\cosh 2\alpha_1 + \cosh 2\alpha_2 - 2)}\cosh(\alpha_1 - \alpha_2)$$

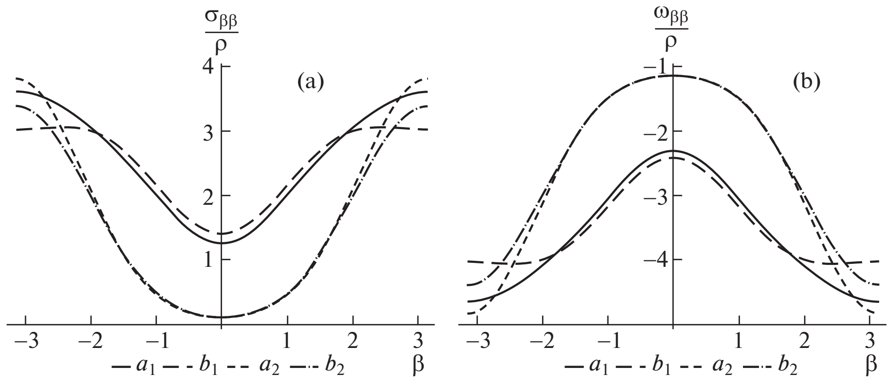

Рис. 6

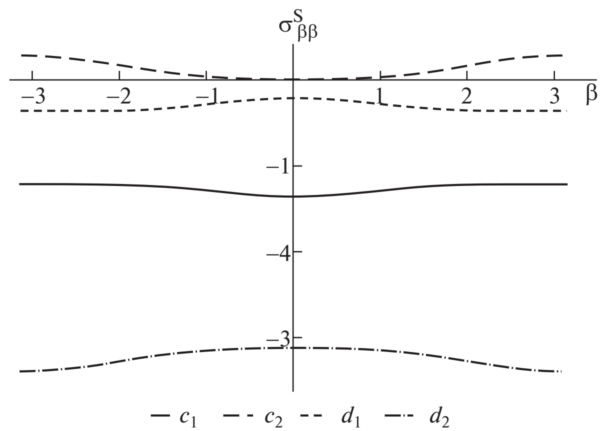

Рис. 7

Здесь как и ранее коэффициенты отмечены верхним индексом 0 соответствуют случаю отсутствия поверхностной упругости. Применяя непосредственно рекуррентные соотношения (1.21), вычисляем компоненты напряжения.

2.3. Результаты. Рассматривалось два случая:

- Эксцентрическая труба под внутренним давлением, т.е. при $p_1 = p = 1,\ p_2 = 0$.
- Эксцентрическая труба под внешним давлением, т.е. при $p_1 = 0,\ p_2 = p = 1$.

Концентрации напряжений на контурах трубы при внутреннем и внешнем давлении представлены на рис. 6a, b, а непосредственно сами поверхностные напряжения – на рис. 7 соответственно. Полагалось, что расстояния от начала координат до центров соответствующих окружностей $d_1 = 3$ нм, $d_2 = 4$ нм, радиусы $r_1 = 1.5$ нм, $r_2 = 3.04$ нм.

На рис. 6a, b линии a_1, b_1 соответствуют значениям концентрации напряжения с и без учета поверхностного напряжения на контуре $\alpha = \alpha_1$, а линии a_2, b_2 – на контуре $\alpha = \alpha_2$. На рис. 7 линии c_1, c_2 соответствуют значению поверхностного напряжения на контурах $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ трубы под внутренним давлением, а линии d_1, d_2 – под внешним давлением соответственно.

Заключение. Получено и исследовано решение задач теории упругости для областей, ограниченных неконцентрическими окружностями, с учетом поверхностных эффектов, а именно, поверхностной упругости и поверхностного напряжения. Путем разложения в ряды Фурье переменных, записанных в биполярной системе координат и с использованием рекуррентных соотношений посчитаны величины поверхностных напряжений и концентрации напряжений. Показано, что несмотря на достаточно простую геометрию, но из-за малого расстояния между границами значения концентрации напряжений с и без учета поверхностного напряжения значительно отличаются друг от друга, по причине существенного вклада от поверхностных эффектов.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ibach H.* The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures // Surf. Sci. Rep. 1997. V. 29. P. 195–263.
2. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Киев: Наук. думка, 1985. 200 с.
3. *Гращенко А.С., Кукушкин С.А., Осипов А.В., Редьков А.В.* Исследование физико-механических характеристик наномасштабных пленок методом наноиндентирования // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 5–14.
4. *Shuttleworth R.* The surface tension of solids // Proc. Phys. Soc. 1950. V. A63. P. 444–457.
5. *Греков М.А., Язовская А.А.* Эффект поверхностной упругости и остаточного поверхностного напряжения в упругом теле с эллиптическим наноотверстием // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 2. С. 249–261.
6. *Vikulina Y.I., Grekov M.A., Kostyrko S.A.* Model of film coating with weakly curved surface // Mechanics of Solids. 2010. V. 45. № 6. P. 778–788.
7. *Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L.* Eshelby formalism for nanoinhomogeneities // Proc. Roy. Soc. L., A. 2005. V. 461. № 2062. P. 3335–3353.
8. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б.* Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физ. мезомех. 2010. Т. 13. № 5. С. 127–138.
9. *Устинов К.Б.* О влиянии поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Вестник ННГУ. 2011. № 4(5). С. 2541–2542.
10. *Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Устинов К.Б.* Шарообразное включение в упругой матрице при наличии собственных деформаций с учетом влияния свойств поверхности раздела, рассматриваемой как предел слоя конечной толщины // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 30–40.
11. *Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L., Huang Z.P.* Nanoporous materials can be madee stiffer than non-porous counterparts by surface modification // Acta materiala. 2006. V. 54. P. 2983–2990.
12. *Altenbach H., Eremeyev V.A.* On the shell and plate theories with surface stresses. Shell Structures. Theory and Applications // W. Pietraszkiewicz, *I. Kreja* (Eds). Boca Raton, CRC Press. 2010. V. 2. P. 47–50.
13. *Jeffery G.B.* Plane stress and plane strain in bipolar coordinates // Phil. Trans of the Roy Soc of London ser. A. 1921. V. 221. P. 265–293.
14. *Chin-Bing Ling.* On the stresses in a plate containing two circular holes // J. Appl. Phys. 1948. V. 19. № 1. P. 77–82.
15. *Уфлянд Я.С.* Биполярные координаты в теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 232 с.
16. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1975. V. 57. № 4. P. 291–323.
17. *Spiegel M., Lipschutz S., Spellman D.* Vector Analysis (2nd Edition). McGraw Hill, 2009. 254 p.