ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 5, с. 131–137

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОГРАНСЛОЯ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНЫХ ТОРЦЕВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

© 2020 г. И. В. Кириллова[a],*, Л. Ю. Коссович[a],**

[a] *ФГБОУ ВО "СГУ имени Н.Г. Чернышевского", Саратов, Россия*

**e-mail: nano-bio@info.sgu.ru*

***e-mail: president@info.sgu.ru*

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.
После доработки 02.04.2020 г.
Принята к публикации 04.04.2020 г.

В данной работе строятся асимметрические уравнения эллиптического погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея, имеющего место в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях нормального типа. Техника асимптотического вывода этих уравнений, основанная на применении символического метода Лурье и введении специальных координат, выделяющих малую прифронтовую зону, потребовала путем выделения частного решения свести исходную задачу к эквивалентной задаче для бесконечной оболочки. Рассматриваемый погранслой дополняет полное описание рассматриваемого вида напряженно-деформированного состояния (НДС) во всех участках фазовой плоскости. Здесь используется также квазистатический погранслой типа Сен-Венана в малой окрестности торца, параболический погранслой по двумерной теории Кирхгофа–Лява, квазиплоская коротковолновая составляющая и гиперболический погранслой в малой окрестности фронта волны сдвига. В заключение работы рассмотрен пример построения эллиптического погранслоя при ударном воздействии на торец цилиндрической оболочки.

Ключевые слова: оболочка вращения, асимптотические методы, метод прифронтовой асимптотики, ударные нагрузки, символический метод Лурье, волна Рэлея, погранслой

DOI: 10.31857/S0572329920050104

1. Введение. Асимптотические уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа построены в работе [1]. Эллиптический погранслой имеет место в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея и дополняет полное описание рассматриваемого вида нестационарного НДС во всех участках фазовой плоскости с помощью изгибной двумерной составляющей Кирхгофа–Лява, квазистатического погранслоя типа Сен-Венана, гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига и квазиплоской высокочастотной коротковолновой составляющей. Указанная работа [1] вместе с представленной работой завершают исследования авторов в построении асимптотической теории нестационарных процессов в тонких оболочках вращения при всех трех видах торцевых воздействий, названных, по классификации У.К. Нигула [2], продольными воздействиями тангенциального типа, продольными воздействиями изгибающего типа и нормальными воздействиями.

Представленная работа развивает результаты [3], где впервые рассматриваются уравнения эллиптического погранслоя для оболочки вращения в случае торцевого

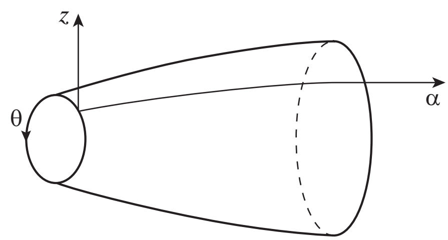

Рис. 1

ударного воздействия. Асимптотическим методом на основе символического метода Лурье строятся уравнения погранслоя в малой окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. При этом построение основывается на предварительном выделении частного решения, удовлетворяющего только граничным условиям на торце оболочки. В качестве примера рассматривается распространение нестационарных волн касательного напряжения в цилиндрической оболочке.

2. Постановка задачи. Рассмотрим оболочку вращения, изображенную на рис. 1.

Обозначим через α длину дуги вдоль образующей срединной поверхности, через θ угол в окружном направлении и через z расстояние от срединной поверхности вдоль нормали. Через σ_{ij} и v_i ($i = 1, 2, 3$) обозначим напряжения и перемещения. Рассмотрим на торце $\alpha = 0$ граничные условия, определяющие осесимметричный вид НДС при ударном воздействии нормального вида [2]

$$\sigma_{13} = IH(t), \quad v_1 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \tag{2.1}$$

где h – полутолщина, t – время. Однородные граничные условия на лицевых поверхностях записываем в виде

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h \tag{2.2}$$

Рассмотрим также однородные начальные условия

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \ (i = 1,2,3) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{2.3}$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\alpha}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{tc_2}{h} \tag{2.4}$$

где E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, а c_2 – скорость волны сдвига в упругой среде: $c_2 = \sqrt{E/2(1+\nu)\rho}$, где ρ – плотность. Приведенный в [1] вывод исходных разрешающих уравнений основан на предположении о типе рассматриваемого НДС: оно является коротковолновым, представляется в виде наложения симметричной и антисимметричной по ζ составляющих, причем асимптотически главной составляющей является симметричная компонента. Окончательный вид разрешающих уравнений для этой составляющей приведен в [1].

Вывод асимптотически оптимальных уравнений искомого погранслоя основывается на использовании символического метода Лурье [4]. При этом целесообразно свести задачу об ударном воздействии на торец полубесконечной оболочки вращения к эквивалетной задаче об ударном воздействии на лицевые поверхности бесконечной оболочки вращения путем выделения частного решения, удовлетворяющего только торцевым граничным условиям.

3. Частное решение и эквивалентная задача. В рассматриваемом случае уравнений для оболочки вращения с переменными коэффициентами искомое частное решение, удовлетворяющее торцевым граничным условиям, может быть получено приближенно методом прифронтовой асимптотики. Согласно простейшему варианту метода прифронтовой асимптотики искомое решение представляется в виде разложения по степеням отклонения продольной координаты от фронта волны сдвига:

$$\sigma_1^{(0)} = 0, \quad v_3^{(0)} = -I^*\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\xi_0)(\tau_0 - \xi_0)^n H(\tau_0 - \xi_0) \tag{3.1}$$

где $F_n(\xi_0)$ – неизвестные функции, I^* – некоторая постоянная, $\xi_0 = \alpha/R$, $\tau_0 = tc_2/R$, R – характерное значение радиусов кривизны оболочки.

Подставляя (3.1) в разрешающие уравнения, представленные в [1], получим, приравнивая нулю члены при одинаковых степенях $(\tau_0 - \xi_0)^n$, зацепляющуюся систему уравнений для неизвестных функций F_n:

$$2\frac{dF_n}{d\xi_0} + \frac{B'}{B}F_n = \frac{1}{n}\left(\frac{d^2F_{n-1}}{d\xi_0^2} + \frac{B'}{B}\frac{dF_{n-1}}{d\xi_0}\right) \tag{3.2}$$

где B – безразмерное расстояние до оси вращения ($B = B^*/R$), B^* – расстояние до оси вращения.

Частное решение (3.2) с учетом граничных условий (2.1) дает следующие выражения для перемещений и напряжений [3]

$$v_1^{(0)} = 0, \quad v_3^{(0)} = -I\left[\sqrt{\frac{B(0)}{B}}(\tau_0 - \xi_0) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(\xi_0)(\tau_0 - \xi_0)^n\right]H(\tau_0 - \xi_0)$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(0)} = I\left[\sqrt{\frac{B(0)}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty}(nF_n(\xi_0) - F'_{n-1}(\xi_0))(\tau_0 - \xi_0)^{n-1}\right]H(\tau_0 - \xi_0) \tag{3.3}$$

$$F_n = -\frac{1}{2n\sqrt{B}}\int_0^{\xi_0}\frac{1}{\sqrt{B}}\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{1}{B}\frac{dF_{n-1}}{d\xi_0}\right)d\xi_0, \quad n \ge 2, \quad I^* = \frac{2(1+\nu)hI}{E}$$

Представим решение исходной задачи в виде суммы

$$\text{НДС} = \text{НДС}^{(0)} + \text{НДС}^{(1)} \tag{3.4}$$

где для составляющей с верхним индексом (1) (эквивалентная задача) ставятся следующие граничные условия

$$\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad v_1^{(1)} = 0, \quad \xi = 0 \tag{3.5}$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(1)} = -I\left[\sqrt{\frac{B(0)}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty}(nF_n - F'_{n-1})(\tau_0 - \xi_0)^{n-1}\right]H(\tau_0 - \xi_0), \quad \varsigma = \pm 1 \tag{3.6}$$

Анализ показывает, что для решения (3.3) деформированное торцевое сечение прямолинейно и перпендикулярно к оси ξ. Значит, составляющая с верхним индексом "1" обладает такими же свойствами. Следовательно, бесконечная оболочка вращения с симметричным относительно ς нагружением на лицевые поверхности, определенным граничными условиями (3.5), (3.6) имеет НДС, соответствующее НДС исходной полубесконечной оболочки, и задача для нее эквивалентна исходной задаче для полубесконечной оболочки.

4. Уравнения эллиптического погранслоя. Рассматриваемые уравнения строятся асимптотическим методом подобно случаю ударной нагрузки на лицевые поверхности оболочки [1]. Опишем кратко этот подход, подробно представленный в [1] для случая нормальной нагрузки на лицевые поверхности, применяемый в рассматриваемом случае для нагрузки по касательной к лицевым поверхностям. Новым здесь является и характер нагрузки, распространяющейся вдоль продольной координаты со скоростью волны сдвига.

Основой предложенного асимптотического подхода является использование символического метода Лурье: вводятся операторы $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$ и разрешающие уравнения рассматриваются как обыкновенные дифференциальные уравнения с аргументом ς, при этом принимается, что операторы ∂_ξ и ∂_τ являются алгебраическими величинами порядка единицы. Вводится также малый параметр $\eta = h/R$. Последним принципиальным шагом рассматриваемого подхода является выделение малой окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея путем перехода к координатам $y = (\xi - æ_R\tau)/\varepsilon$ и $\tau_0 = \varepsilon\tau$, $\varepsilon = 1/T$ (рассматриваются моменты времени, когда условный фронт прошел расстояние, много большее толщины оболочки).

В результате для потенциальных функций φ и ψ, определяющих движение волн от поверхности $2z = -h$ вглубь оболочки, получены следующие уравнения эллиптического типа:

$$\left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$
$$\left(1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \tag{4.1}$$

Перемещения и напряжения выражаются при $\xi > 0$ через эти потенциальные функции следующим образом:

$$v_1 = h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + b\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right), \quad v_3 = h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{b}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$\sigma_{33} = -\frac{Eh}{1+\nu}\left(g\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + b\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}\right) \tag{4.2}$$
$$\sigma_{13} = \frac{Eh}{1+\nu}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial z} + \frac{æ^2æ_R^2}{a^2c_R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t} + \frac{1}{2a^2}\frac{B'}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{g+æ_R^2}{b}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial z} + \frac{æ_R^2}{bc_R}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t} + \frac{1}{b}\frac{B'}{B}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

где $a = \sqrt{1 - æ^2æ_R^2}$, $b = \sqrt{1 - æ_R^2}$, $æ^2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$, $g = 2 + æ_R B_\omega$
$B_\omega = 2\left(\frac{æ_R}{1 - æ_R^2} + \frac{ææ_R}{1 - æ^2æ_R^2} - \frac{4æ_R}{2 - æ_R^2}\right)^{-1}$, $æ_R = c_R/c_2$, c_R – скорость поверхностных волн Рэлея.

Граничные условия на лицевой поверхности $\varsigma = -1$ при $\xi > 0$ записываются в форме

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \frac{k_c}{æ_R^2}\frac{B'}{B}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = \frac{B_\omega}{gæ_R}\frac{\partial S}{\partial\alpha}$$
$$\left(g + \frac{æ_R^2}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} - \frac{æ_R^2}{2c_R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{B'}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \left(b + \frac{æ_R^2}{2b}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} - \frac{æ_R^2}{2bc_R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \left(b + \frac{1}{2b}\right)\frac{B'}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0 \tag{4.3}$$
$$k_c = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1 - \frac{4}{g}\right)\Big/\left(\frac{æ^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{g}\right)$$

$$\Psi = \frac{h}{b}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad S = I\left[\sqrt{\frac{B(0)}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty}(nF_n - F'_{n-1})(\tau_0 - \xi_0)^{n-1}\right]H(\tau_0 - \xi_0)$$

Аналогично записываются уравнения и для области $\xi < 0$. Однако, выражение для напряжения σ_{13} в (4.2) не всегда является удобным. В частности, его сложно использовать при использовании преобразования Фурье по продольной координате. Поэтому найдена альтернативная форма:

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha} = \frac{E}{(1+\nu)h}\left(\frac{2 - æ^2 æ_R^2}{2a}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} - \frac{æ^2 æ_R^2}{2a}\frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2a}\frac{B'}{B}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} - \frac{æ_R^2}{2}\frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \frac{B'}{B}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right) \quad (4.4)$$

$$\Phi = \frac{h}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

5. Решение задачи для цилиндрической оболочки. Рассмотрим задачу о распространении нестационарных волн в цилиндрической оболочке при граничных условиях (2.1). Получим решение для эквивалентной задачи. Рассматриваем только волну, инициируемую лицевой поверхностью $z = -h$. Разрешающие уравнения для потенциальных функций φ, ψ сохраняют вид (4.1), а граничные условия и выражения для напряжений и перемещений запишутся для всех значений $\xi(-\infty < \xi < \infty)$ в форме

$$æ_R^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} = \frac{æ_R B_\omega}{g}\frac{\partial S}{\partial\xi} \quad \text{при} \quad \varsigma = -1$$

$$\left(g + \frac{æ_R^2}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} + \left(b + \frac{æ_R^2}{2b}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \frac{1}{2b}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} = 0 \quad \text{при} \quad \varsigma = -1 \quad (5.1)$$

$$v_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + b\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \quad v_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma} + \frac{1}{b}\frac{\partial\psi}{\partial\varsigma}$$

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{(1+\nu)h}\left(g\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + b\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi} = \frac{E}{(1+\nu)h}\left(\frac{2 - æ^2 æ_R^2}{2a}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - \frac{æ^2}{2a}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}\right) \quad (5.2)$$

$$\Phi = \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}, \quad \Psi = \frac{1}{b}\frac{\partial\psi}{\partial\varsigma}$$

При этом функция S записывается в виде

$$S = IH(\tau - \xi) \quad \text{при} \quad \xi > 0 \quad \text{и} \quad S = IH(\tau + \xi) \quad \text{при} \quad \xi < 0 \quad (5.3)$$

Для решения рассматриваемой задачи применим преобразование Лапласа по времени τ и преобразование Фурье по продольной координате ξ. Тогда граничные условия (5.1) и выражение для изображения касательного напряжения σ_{13} примут вид:

$$(æ_R^2\chi^2 + s^2)\Psi^{LF} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{æ_R B_\omega}{g}\frac{\chi^2}{s(s^2+\chi^2)} \quad \text{при} \quad \varsigma = -1$$

$$\left[\left(g + \frac{æ_R^2}{2}\right)\chi^2 + \frac{1}{2}s^2\right]\varphi^{LF} + \left[\left(b + \frac{æ_R^2}{2b}\right)\chi^2 + \frac{1}{2b}s^2\right]\psi^{LF} \quad \text{при} \quad \varsigma = -1 \quad (5.4)$$

$$\sigma_{13}^{LF} = i\frac{E}{(1+\nu)h}\frac{1}{\chi}\left[\left(\frac{2 - æ^2 æ_R^2}{2a}\chi^2 + \frac{æ^2}{2a}s^2\right)\Phi^{LF} + \left(\chi^2 + \frac{1}{2}s^2\right)\Psi^{LF}\right] \quad (5.5)$$

где верхние индексы L и F обозначают интегральные преобразования Лапласа и Фурье, соответственно.

Решая систему дифференциальных уравнений по ς с граничными условиями (5.4), выпишем решение для изображения напряжения σ_{13}:

$$\sigma_{13}^{LF} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}I\frac{æ_R B_\omega}{g}\left[\left(g\frac{\chi^3}{s(æ_R^2\chi^2+s^2)(s^2+\chi^2)}+\left(\frac{æ^2 g}{2a^2}+\frac{g}{2b^2}-\frac{1}{2}\right)\frac{\chi}{s(s^2+\chi^2)}\right)e^{\mp a\chi(1+\varsigma)}-\right.$$
$$\left.-\left(g\frac{\chi^3}{S(æ_R^2\chi^2+s^2)(s^2+\chi^2)}+\frac{1}{2}\frac{\chi}{s(s^2+\chi^2)}\right)e^{\mp b\chi(1+\varsigma)}\right] \tag{5.6}$$

где знаки $\mp$ относятся к областям $\xi > 0$ и $\xi < 0$, соответственно.

Обратим полученное изображение (5.6). Найдем сначала оригинал для преобразования Лапласа. Основываясь на следующем типовом преобразовании "изображение по Лапласу $\Rightarrow$ оригинал":

$$\frac{\chi}{s(æ_R^2\chi^2+s^2)} \Rightarrow \frac{1}{æ_R^2\chi}(1-\cos æ_R\tau\chi) \tag{5.7}$$

получаем формулу для одинарного преобразования искомого решения по Фурье:

$$\sigma_{13}^{F} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}I\frac{æ_R B_\omega}{g}\left[\left(\frac{g}{b^2æ_R^2}\frac{1}{\chi}(1-\cos æ_R\tau\chi)+\left(\frac{æ^2 g}{2a^2}-\frac{g}{2b^2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\chi}(1-\cos\tau\chi)\right)e^{\mp a\chi(1+\varsigma)}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{g}{b^2æ_R^2}\frac{1}{\chi}(1-\cos æ_R\tau\chi)+\left(-\frac{g}{b^2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\chi}(1-\cos\tau\chi)\right)e^{\mp b\chi(1+\varsigma)}\right] \tag{5.8}$$

Найдем теперь оригинал для преобразования Фурье. Основываясь на следующем типовом интеграле

$$\int_0^1\frac{1-\cos\tau\chi}{\chi}e^{-a\chi}\sin\xi\chi d\chi \models \arctan\left(\frac{\xi}{a}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\xi a}{a^2-\xi^2+\tau^2}\right) \tag{5.9}$$

получаем искомое выражение для напряжения σ_{13}:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} = \frac{2}{\pi}I\frac{æ_R B_\omega}{g}&\left[\left(\frac{g}{b^2æ_R^2}+\frac{æ^2 g}{2a^2}-\frac{g}{2b^2}-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{a(1+\varsigma)}\right)+\right.\\
&+\left(-\frac{g}{b^2æ_R^2}+\frac{g}{b^2}-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{b(1+\varsigma)}\right)-\\
&-\frac{g}{2b^2æ_R^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a\xi(1+\varsigma)}{a^2(1+\varsigma)^2-\xi^2+æ_R^2\tau^2}\right)-\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{æ^2 g}{2a^2}-\frac{g}{2b^2}-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{2a\xi(1+\varsigma)}{a^2(1+\varsigma)^2-\xi^2+\tau^2}\right)+\\
&+\frac{g}{2b^2æ_R^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2b\xi(1+\varsigma)}{b^2(1+\varsigma)^2-\xi^2+æ_R^2\tau^2}\right)+\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(-\frac{g}{b^2}+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{2b\xi(1+\varsigma)}{b^2(1+\varsigma)^2-\xi^2+\tau^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.10}$$

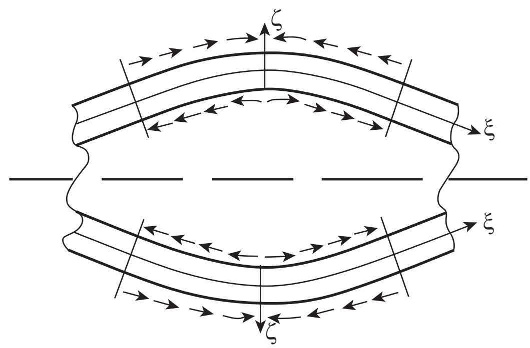

Рис. 2.

Учитывая, что при $\xi \gg 1, \tau \gg 1$ и в рассматриваемой малой окрестности условного фронта $\xi = \text{æ}_R \tau$ можно принять следующие оценки функций в (5.10):

$$\begin{gathered}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{a(1+\varsigma)}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{a(1+\varsigma)}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2a\xi(1+\varsigma)}{a^2(1+\varsigma)^2 + \xi^2 + \tau^2}\right) = 0, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{2b\xi(1+\varsigma)}{b^2(1+\varsigma)^2 - \xi^2 + \tau^2}\right) = 0\end{gathered} \tag{5.11}$$

окончательное выражение для напряжения σ_{13} запишем в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{13} = I + I\frac{B_\omega}{\pi \text{æ}_R b^2}\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{2a\xi(1+\varsigma)}{a^2(1+\varsigma)^2 - \xi^2 + \text{æ}_R^2\tau^2}\right) + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg}\left(\frac{2b\xi(1+\varsigma)}{b^2(1+\varsigma)^2 - \xi^2 + \text{æ}_R^2\tau^2}\right)\right]\end{gathered} \tag{5.12}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Вып. 1. С. 113–120.
2. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Int. J. Solid and Structures. V. 5. № 6. 1969. P. 607–627.
3. *Коссович Л.Ю., Кириллова И.В.* Теория эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных воздействиях нормального типа // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. Т. 3. С. 484–486.
4. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.