ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 5, с. 120–130

УДК 539.3

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДИСЛОКАЦИЙ ДЛЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Л. М. Зубов

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: zubovl@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.03.2020 г.
После доработки 25.03.2020 г.
Принята к публикации 02.05.2020 г.

Для упругого изотропного несжимаемого материала общего вида найден ряд точных решений о больших деформациях кручения и растяжения–сжатия сплошного кругового цилиндра с учетом распределенных дислокаций. Получены явные формулы, определяющие влияние дислокаций на зависимости крутящего момента и продольной силы от угла закручивания и осевого удлинения. Основные результаты сформулированы в виде, допускающем экспериментальную проверку.

Ключевые слова: нелинейная упругость, винтовые дислокации, большие деформации, растяжение и кручение, наноструктурные материалы, плотность дислокаций, точное решение

DOI: 10.31857/S0572329920050177

1. Введение. Дислокации являются важным элементом структуры твердых тел. Они играют существенную роль в таких явлениях, как пластическое течение, внутреннее трение, усталость и разрушение, ползучесть, рост кристаллов и др. [1–3]. Дислокационные модели позволяют описывать различные свойства современных наноструктурных материалов [4]. Прямолинейные винтовые дислокации влияют на механическое поведение нитевидных кристаллов, нанотрубок, наностержней и других элементов конструкций. Изолированные дислокации, а также дисклинации [5] можно рассматривать как топологические дефекты, поскольку они обусловливают многозначность смещений точек упругого тела. Отметим, что применению топологических методов в нелинейной теории упругости большое внимание уделено в трудах И.И. Воровича, в том числе в его монографии [6]. Во многих случаях число дислокаций в ограниченном объеме тела бывает весьма велико. В этих случаях целесообразно перейти от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению и использовать континуальную теорию распределенных дислокаций. Используя распределение дислокаций, можно моделировать различные другие дефекты в кристаллических и наноструктурных материалах. Классическая нелинейная теория непрерывно распределенных дислокаций построена в работах [7–9] и базируется на трактовке упругого тела как дифференциально-геометрического многообразия с определенными свойствами. Из-за значительной сложности общих уравнений континуальной теории дислокаций в настоящее время известно лишь ограниченное число [10–14] точных решений краевых задач пространственной нелинейной теории упругости для тел с дислокациями, распределенными с заданной тензорной плотностью. На важность таких задач обращено внимание, в частности, в работе [9]. Точные решения нелинейной континуальной теории дислокаций позволяют, в числе прочего, выявить новые количественные и качественные эффекты деформирования твердых тел с дислокациями. В представленной работе найдены новые точные решения нелинейной континуальной теории дислокаций. Эти решения описывают большие деформации растяжения—сжатия и кручения сплошного кругового цилиндра и являются общими для всех изотропных несжимаемых материалов.

2. Исходные соотношения. Пусть $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$ и $\mathbf{R} = X_k \mathbf{i}_k$ — радиусы-векторы точки упругого тела соответственно в отсчетной и деформированной конфигурациях, x_k и X_k, $k = 1, 2, 3$ — декартовы координаты отсчетного и конечного состояний тела, $\mathbf{i}_k$ — координатные орты, ϑ — область, занимаемая телом в отсчетной конфигурации. В дальнейшем будем использовать операторы градиента, ротора и дивергенции в отсчетной конфигурации

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{r}^s \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial q^s}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{r}^s \times \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial q^s}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{r}^s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial q^s}, \quad \mathbf{r}^s = \mathbf{i}_k \frac{\partial q^s}{\partial x_k}, \quad s, k = 1, 2, 3 \tag{2.1}$$

Здесь q^s — некоторые криволинейные лагранжевы координаты, $\boldsymbol{\Psi}$ — произвольное дифференцируемое тензорное поле.

Рассмотрим задачу об определении положения $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ точки упругого тела после деформации по заданному в области ϑ дифференцируемому и однозначному полю тензора дисторсии $\mathbf{C} = \operatorname{grad}\mathbf{R}$. В случае многосвязной области векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{r})$, вообще говоря, определяется неоднозначно, что означает существование в теле трансляционных дислокаций, каждая из которых характеризуется вектором Бюргерса [5]. Следуя [15—18], перейдем от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению и определим плотность дислокаций как тензорное поле второго ранга $\boldsymbol{\alpha}$, поток которого через любую поверхность дает суммарный вектор Бюргерса дислокаций, пересекающих эту поверхность. Данное определение приводит к следующему уравнению относительно тензора дисторсии:

$$\operatorname{rot}\mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha} \tag{2.2}$$

Если тензорное поле плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$, которое должно удовлетворять условию соленоидальности

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{2.3}$$

считается заданным, то тензорное уравнение (2.2), называемое уравнением несовместности, вместе с векторным уравнением равновесия

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \tag{2.4}$$

и определяющими соотношениями упругого материала позволяет определить тензорное поле дисторсии, а следовательно, и поле напряжений в теле. В (2.4) $\mathbf{D}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы [19] и принято допущение об отсутствии массовых сил. Заметим, что при $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ и поле перемещений среды не существуют.

Упругий материал в дальнейшем будем считать изотропным и несжимаемым. В этом случае определяющие соотношения, т.е. связь напряжений и деформаций, имеют вид [19]

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* - p\mathbf{C}^{-\mathrm{T}} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{D}^* = [\tau_1(I_1, I_2) + I_1\tau_2(I_1, I_2)]\mathbf{C} - \tau_2(I_1, I_2)\mathbf{G} \cdot \mathbf{C} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \quad I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{G}, \quad I_2 = \mathrm{tr}\mathbf{G}^{-1} \tag{2.7}$$

$$\tau_1 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \tau_2 = 2\frac{\partial W}{\partial I_2} \tag{2.8}$$

Здесь $\mathbf{G}$ – метрический тензор, называемый также мерой деформации Коши, $W(I_1, I_2)$ – удельная энергия деформации, τ_1, τ_2 – скалярные функции отклика материала, p – давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию, I_1, I_2 – первый и второй инварианты деформации. Третий инвариант равен единице в силу условия несжимаемости

$$\det\mathbf{C} = 1 \tag{2.9}$$

Уравнение несовместности первого порядка (2.2) можно преобразовать [20] к нелинейным уравнениям несовместности второго порядка относительно компонент метрического тензора $\mathbf{G}$. Эти уравнения составляют основу классической континуальной теории дислокаций [7–9] и с дифференциально-геометрической точки зрения устанавливают связь тензора плотности дислокаций с картановым кручением пространства метрической связности. Уравнения несовместности второго порядка значительно сложнее, чем уравнения (2.2), и в данной работе не будут использоваться.

3. Растяжение и кручение кругового цилиндра с винтовыми дислокациями осевого направления. Рассмотрим упругое тело в форме сплошного кругового цилиндра, ось которого имеет направление орта $\mathbf{i}_3$. Введем в недеформированном состоянии цилиндрические координаты $0 \le r \le r_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le L$ по формулам $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$ и обозначим через $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{i}_3$ орты, касательные к координатным линиям. Имеют место соотношения

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi$$

Предположим, что в цилиндре задано осесимметричное распределение прямолинейных винтовых дислокаций, параллельных оси цилиндра. Тензор плотности дислокаций в этом случае имеет только одну ненулевую компоненту:

$$\boldsymbol{\alpha} = \beta(r)\,\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3 \tag{3.1}$$

Требование соленоидальности (2.3) выполняется для произвольной функции $\beta(r)$ в (3.1). Как известно [5], решение задачи о больших деформациях растяжения–сжатия и кручения цилиндра с одиночной винтовой дислокацией, сосредоточенной на оси цилиндра, дается выражением

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \frac{b}{2\pi}\varphi + \lambda z \tag{3.2}$$

Здесь R, Φ, Z – цилиндрические координаты точек цилиндра после деформации, т.е. эйлеровы координаты, b – длина вектора Бюргерса изолированной дислокации, ψ – угол закручивания, λ – кратность осевого удлинения. Постоянные b и ψ могут принимать любые действительные значения, а постоянная λ – только положительные. Соответствующий (3.2) тензор дисторсии имеет вид [5]

$$\mathbf{C} = \frac{dR}{dr}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_R + \frac{R}{r}\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\Phi + \frac{b}{2\pi r}\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{i}_3 + \psi R\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{e}_\Phi + \lambda\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_r\cos\psi z + \mathbf{e}_\varphi\sin\psi z, \quad \mathbf{e}_\Phi = -\mathbf{e}_r\sin\psi z + \mathbf{e}_\varphi\cos\psi z \tag{3.4}$$

Слагаемое $(2\pi)^{-1}b\varphi$ в (3.2) описывает депланацию сечения цилиндра, которая является многозначной функцией координат x_1, x_2. При наличии непрерывно распределенных дислокаций, как было сказано выше, поле перемещений упругой среды не существует. Однако в данном частном случае, когда тензор плотности дислокаций содержит только одну компоненту, перемещения в плоскости сечения цилиндра существуют, а несуществующей является только функция депланации. Это означает, что величины R и Φ сохраняют смысл полярных координат точек цилиндра в деформированном состоянии, если плотность дислокаций описывается формулой (3.1).

Исходя из сказанного и выражения (3.3), решение уравнения несовместности (2.2) будем искать в виде

$$\mathbf{C} = \frac{dR}{dr}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \frac{R}{r}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + H(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \psi R\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + \lambda\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \tag{3.5}$$

При помощи (3.1), (3.4), (3.5) можно проверить, что уравнение несовместности будет выполнено тогда и только тогда, когда функция $H(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dH}{dr} + \frac{H}{r} = \beta(r) \tag{3.6}$$

В качестве граничного условия для уравнения (3.6) примем требование отсутствия сосредоточенной дислокации в центре цилиндра:

$$\lim(r\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}_3) = 0 \quad \text{при} \quad r \to 0 \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) находим

$$H(r) = \frac{1}{r}\int_0^r \beta(\rho)\rho d\rho \tag{3.8}$$

Для определения функции $R(r)$ в выражении дисторсии воспользуемся условием несжимаемости (2.9), которое дает уравнение

$$R\frac{dR}{dr} = \frac{r}{\lambda - \psi r H(r)} \tag{3.9}$$

Предполагая, что сплошной цилиндр остается сплошным и после деформации, т.е. считая, что $R(0) = 0$, находим решение уравнения (3.9) для произвольной плотности винтовых дислокаций $\beta(r)$:

$$R^2(r) = 2\int_0^r \frac{\rho d\rho}{\lambda - \psi\rho H(\rho)} \tag{3.10}$$

Приведем примеры определения функции $R(r)$ для некоторых частных случаев распределения винтовых дислокаций. Пусть $\beta(r) = \beta_0 r^{-1}$, $\beta_0 = \text{const}$. Тогда в силу (3.8) имеем $H(r) = \beta_0$ и формула (3.10) дает такой результат

$$R^2 = -\frac{2\lambda}{\beta_0{}^2\psi^2}\ln\left(1 - \frac{\beta_0\psi r}{\lambda}\right) - \frac{2r}{\beta_0\psi} \tag{3.11}$$

Влияние дислокаций на функцию $R(r)$ при малых значениях произведения $\beta_0\psi$ хорошо видно из степенного разложения правой части (3.11)

$$R^2 = \frac{r^2}{\lambda} + \frac{2\beta_0\psi r^3}{3\lambda^2} + \frac{\beta_0{}^2\psi^2 r^4}{2\lambda^3} + \cdots \tag{3.12}$$

В качестве второго примера рассмотрим дислокации, равномерно распределенные по цилиндрической поверхности $r = r_*$. Плотность дислокаций в этом случае имеет вид $\beta(r) = a\delta(r - r_*)$, где $a = \mathrm{const}$, $\delta(r - r_*)$ – дельта-функция Дирака. На основании (3.8), (3.10) получаем

$$H(r) = \begin{cases} a, & 0 \le r \le r_* \\ \dfrac{ar_*}{r}, & r_* \le r \le r_0 \end{cases} \tag{3.13}$$

$$R^2(r) = \begin{cases} \dfrac{r^2}{\lambda}, & 0 \le r \le r_* \\ \dfrac{r_*^2}{\lambda} + \dfrac{r^2 - r_*^2}{\lambda - \psi a r_*}, & r_* \le r \le r_0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Если в (3.14) выполнить предельный переход $r_* \to 0$, $a \to \infty$ при условии, что $2\pi a r_* = b$, то получим известное [21] решение для одиночной дислокации в центре цилиндра

$$R = \frac{r}{\sqrt{\lambda - (2\pi)^{-1} b\psi}} \tag{3.15}$$

Кроме уравнений несовместности и условия несжимаемости, должны быть выполнены уравнения равновесия для напряжений (2.4). При помощи (3.5) вычислим тензоры и инварианты деформации, участвующие в определяющих соотношениях (2.5)–(2.7). Имеем

$$\mathbf{C}^{-\mathrm{T}} = \left(\frac{dR}{dr}\right)^{-1} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \lambda \frac{dR}{dr} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi - H\frac{dR}{dr}\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi - \psi R \frac{dR}{dr}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \frac{R}{r}\frac{dR}{dr}\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{G} = \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(\frac{R^2}{r^2} + H^2\right)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \\ + \left(\frac{\psi R^2}{r} + \lambda H\right)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi) + (\psi^2 R^2 + \lambda^2)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \end{gathered} \tag{3.17}$$

$$I_1 = \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{R^2}{r^2} + H^2 + \psi^2 R^2 + \lambda^2$$

$$I_2 = (\lambda - \psi r H)^2 \frac{R^2}{r^2} + \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 \left(\frac{R^2}{r^2} + H^2 + \psi^2 R^2 + \lambda^2\right) \tag{3.18}$$

Из (2.6), (3.16)–(3.18) вытекает представление тензора $\mathbf{D}^*$, компоненты которого не зависят от координат φ и z,

$$\begin{gathered} \mathbf{D}^* = D^*_{rR}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + D^*_{\varphi\Phi}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \\ + D^*_{\varphi Z}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + D^*_{z\Phi}(r)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + D^*_{zZ}(r)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \end{gathered} \tag{3.19}$$

Поскольку функции $H(r)$ и $R(r)$ найдены и выражаются формулами (3.8), (3.10), то компоненты тензора $\mathbf{D}^*$ в (3.19) – известные функции радиальной координаты r, определяемые при помощи (2.6), (3.5), (3.17), (3.18). Неизвестной остается функция давления $p(r)$. При помощи (3.4), (3.16), (3.19) находим

$$\operatorname{div}\mathbf{D}^* = \left(\frac{dD^*_{rR}}{dr} + \frac{D^*_{rR} - D^*_{\varphi\Phi}}{r} - \psi D^*_{z\Phi}\right)\mathbf{e}_R$$

$$\operatorname{div}(p\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}) = \left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^{-1}\frac{dp}{dr} - \psi\beta(r)R(r)p\right]\mathbf{e}_R \tag{3.20}$$

В силу (2.5), (3.20) векторное уравнение (2.4) сводится к одному скалярному относительно функции $p(r)$

$$\frac{dp}{dr} + L(r)p = F(r) \tag{3.21}$$

$$L(r) = \frac{\psi r\beta(r)}{\psi rH(r) - \lambda}, \quad F(r) = \left(\frac{dD^*_{rR}}{dr} + \frac{D^*_{rR} - D^*_{\varphi\Phi}}{r} - \psi D^*_{z\Phi}\right)\frac{dR}{dr}$$

Решение уравнения (3.21) имеет вид

$$p(r) = \exp\left(\int_r^{r_0} L(\rho)\,d\rho\right)\left[p(r_0) - \int_r^{r_0} F(r')\exp\left(-\int_{r'}^{r_0} L(\rho)\,d\rho\right)dr'\right] \tag{3.22}$$

Постоянная $p(r_0)$ в (3.22) находится из условия незагруженности боковой поверхности цилиндра $D_{rR}(r_0) = 0$ и выражается так

$$p(r_0) = \frac{D^*_{rR}(r_0)\,r_0}{R(r_0)\left[\lambda - \psi r_0 H(r_0)\right]} \tag{3.23}$$

Таким образом, найдено точное решение в квадратурах задачи о больших деформациях растяжения–сжатия и кручения кругового цилиндра, содержащего произвольное осесимметричное распределение прямолинейных винтовых дислокаций. Это решение пригодно для любых изотропных несжимаемых упругих материалов, т.е. универсально в указанном классе материалов.

Из представлений (2.5), (3.19) вытекает, что в каждом поперечном сечении цилиндра напряжения приводятся к результирующей продольной силе

$$Q = 2\pi\int_0^{r_0} D_{zZ}\,r\,dr \tag{3.24}$$

и результирующему крутящему моменту

$$M = 2\pi\int_0^{r_0} D_{z\Phi}R\,r\,dr \tag{3.25}$$

Величины Q и M не зависят от координаты z, т.е. одинаковы во всех сечениях цилиндра. Таким образом, реализация описанной выше деформации кручения и растяжения–сжатия цилиндрического стержня конечной длины с дислокациями требует приложения к концам стержня продольной силы Q и крутящего момента M. Можно показать справедливость формул

$$\begin{aligned} Q(\lambda,\psi) &= \pi\int_0^{r_0}\left(\tau_1\frac{\partial I_1}{\partial\lambda} + \tau_2\frac{\partial I_2}{\partial\lambda}\right)r\,dr \\ M(\lambda,\psi) &= \pi\int_0^{r_0}\left(\tau_1\frac{\partial I_1}{\partial\psi} + \tau_2\frac{\partial I_2}{\partial\psi}\right)r\,dr \end{aligned} \tag{3.26}$$

После определения функций $H(r)$ и $R(r)$ по формулам (3.8), (3.10) и применения соотношений (3.18) сила и момент при заданном распределении дислокаций становятся согласно (3.26) известными функциями угла закручивания и осевого удлинения.

4. Равномерно распределенные винтовые дислокации радиального и азимутального направления. Рассмотрим кручение и растяжение–сжатие сплошного кругового цилиндра в случае, когда тензор плотности дислокаций задан выражением

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_0(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi), \quad \alpha_0 = \text{const} \tag{4.1}$$

где векторы $\mathbf{e}_R$ и $\mathbf{e}_\Phi$ определены соотношениями (3.4). Легко проверить, что тензор (4.1) подчиняется требованию соленоидальности (2.3), а решение уравнения несовместности (2.2), удовлетворяющее условию несжимаемости (2.9), имеет вид

$$\mathbf{C} = \lambda^{-1/2}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi) + \eta r \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + \lambda \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \tag{4.2}$$

$$\eta = \psi\lambda^{-1/2} - \alpha_0$$

На основании (4.2) находим обратный тензор дисторсии, метрический тензор и инварианты деформации

$$\mathbf{C}^{-1} = \lambda^{1/2}(\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\varphi) - \lambda^{-\frac{1}{2}}\eta r \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi + \lambda^{-1}\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \tag{4.3}$$

$$\mathbf{G} = \lambda^{-1}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) + \lambda^{-\frac{1}{2}}\eta r(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi) + (\lambda^2 + \eta^2 r^2)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \tag{4.4}$$

$$I_1 = 2\lambda^{-1} + \lambda^2 + \eta^2 r^2, \quad I_2 = 2\lambda + \lambda^{-2} + \lambda^{-1}\eta^2 r^2 \tag{4.5}$$

Как и в разд. 3, материал считается изотропным и несжимаемым, т.е. описывается определяющими соотношениями (2.5), (2.6) с произвольной функцией удельной энергии $W(I_1, I_2)$. Поэтому для тензора напряжений Пиолы в силу (4.3)–(4.5) будут справедливы представления (2.5), (3.19). Из (4.3) вытекает равенство $\operatorname{div}(\mathbf{C}^{-\mathbf{T}}) = 0$, что приводит к такому уравнению равновесия:

$$\sqrt{\lambda}\frac{dp}{dr} = \frac{dD^*_{rR}}{dr} + \frac{D^*_{rR} - D^*_{\varphi\Phi}}{r} - \psi D^*_{z\Phi} \tag{4.6}$$

Решая уравнение (4.6) с учетом граничного условия $D_{rR}(r_0) = 0$, находим

$$\sqrt{\lambda}p(r) = D^*_{rR}(r_0) - \int_r^{r_0}\left(\frac{D^*_{rR} - D^*_{\varphi\Phi}}{r} - \psi D^*_{z\Phi}\right)dr \tag{4.7}$$

При помощи (2.5), (2.6), (4.2)–(4.5), (4.7) вычисляется поле напряжений в цилиндре и выводятся следующие универсальные в классе изотропных несжимаемых тел и явные формулы для продольной силы и крутящего момента, действующих на торцах цилиндра, содержащего дислокации, распределенные с плотностью (4.1)

$$\begin{gathered} Q(\lambda, \psi) = 2\pi\int_0^{r_0}\left[\left(\lambda - \lambda^{-2} - \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\psi\eta r^2\right)\tau_1(I_1, I_2) + \right. \\ \left. + \left(1 - \lambda^{-3} - \frac{1}{2}\lambda^2\eta^2 r^2 - \frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\psi\eta r^2\right)\tau_2(I_1, I_2)\right] r dr \end{gathered} \tag{4.8}$$

$$M(\lambda, \psi) = 2\pi\int_0^{r_0}[\lambda^{-1/2}\tau_1(I_1, I_2) + \lambda^{-3/2}\tau_2(I_1, I_2)]\eta r^3 dr \tag{4.9}$$

Поскольку $\eta = \psi\lambda^{-1/2} - \alpha_0$, из (4.9) видно, что при отсутствии внешнего крутящего момента ($M = 0$) происходит закручивание стержня, обусловленное дислокациями, при этом угол закручивания равен $\alpha_0\sqrt{\lambda}$.

Исследуем величину продольной силы для неогуковского [19] материала, в котором $\tau_2 = 0$, а τ_1 – положительная постоянная. Согласно (4.8) при $\lambda = 1$, т.е. при сохранении длины стержня имеем

$$Q = -\frac{1}{4}\pi\tau_1 r_0^4 \psi(\psi - \alpha_0)$$

Возникновение продольной силы для стержня с неизменной длиной – это проявление эффекта Пойнтинга при кручении [19, 22]. При $\alpha_0 = 0$ сила отрицательна, т.е. сжимающая, а при $\alpha_0 > 0$ сила отрицательна, если $\psi > \alpha_0$, и положительна, если $0 < \psi < \alpha_0$. Это означает, что наличие дислокаций может изменить знак эффекта Пойнтинга.

5. Растяжение–сжатие цилиндрического стержня с комбинированным распределением дислокаций. Поскольку в нелинейной теории дислокаций неприменим принцип суперпозиции, эффекты, обусловленные комбинированным распределением дислокаций, нельзя получить суммированием эффектов от отдельных видов дислокаций. Это существенно затрудняет решение задач в случаях, когда тензор плотности дислокаций имеет несколько независимых компонент. Тем не менее, как показано ниже, удается найти точное решение нелинейной задачи о растяжении–сжатии сплошного кругового цилиндра, изготовленного из произвольного несжимаемого материала и содержащего дислокации, распределенные с плотностью

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{r}\left(\alpha_0 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \beta_0 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 + \gamma_0 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi\right) \tag{5.1}$$

Здесь α_0, β_0, γ_0 – безразмерные постоянные. Выражение (5.1) удовлетворяет требованию соленоидальности (2.3). Первое слагаемое в (5.1) соответствует винтовым дислокациям радиального направления, второе и третье описывают прямолинейные винтовые и краевые дислокации, оси которых параллельны оси цилиндра.

Оказывается, уравнению несовместности (2.2) с плотностью дислокаций (5.1) удовлетворяет такой тензор дисторсии, компоненты которого в базисе цилиндрических координат постоянны. Этот тензор имеет вид

$$\mathbf{C} = C_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + C_\varphi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \beta_0 \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 - \alpha_0 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi + \lambda\, \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \tag{5.2}$$

$$C_\varphi = C_r + \gamma_0, \quad C_r = \text{const}$$

Параметр осевого удлинения λ считается заданной положительной постоянной. Постоянство компонент тензора дисторсии в криволинейной системе координат не означает, что цилиндр испытывает однородную деформацию. При отсутствии дислокаций ($\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$) из (5.2) имеем $\mathbf{C} = C_r(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) + \lambda \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$, что соответствует однородной деформации цилиндрического стержня.

Постоянную C_r в (5.2) найдем из условия несжимаемости (2.9)

$$C_r = \frac{1}{2\lambda}(-\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda}), \quad \Delta = \lambda\gamma_0 + \alpha_0\beta_0 \tag{5.3}$$

При отсутствии дислокаций выражение (5.3) дает кратность удлинения в поперечном направлении для однородной деформации несжимаемого цилиндра: $C_r = \lambda^{-1/2}$.

Таким образом, для несжимаемого материала тензор дисторсии полностью определяется заданными скалярными плотностями дислокаций и параметром осевого удлинения. Используя (5.2), находим обратный тензор дисторсии, метрический тензор и инварианты деформации

$$\mathbf{C}^{-1} = C_r^{-1} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + C_r(\lambda \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \beta_0 \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \alpha_0 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi + C_\varphi \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) \tag{5.4}$$

$$\mathbf{G} = C_r^2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + (C_\varphi^2 + \beta_0^2)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \\ +(\lambda\beta_0 - \alpha_0 C_\varphi)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi) + (\alpha_0^2 + \lambda^2)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \tag{5.5}$$

$$I_1 = C_r^2 + C_\varphi^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \lambda^2, \quad I_2 = (\alpha_0\beta_0 + \lambda C_\varphi)^2 + C_r^2(\alpha_0^2 + \lambda^2 + C_\varphi^2 + \beta_0^2) \tag{5.6}$$

Из (5.5), (5.6) видно, что распределение дислокаций (5.1) порождает сдвиговые деформации между вертикальным и азимутальным направлениями, а инварианты деформации — постоянные величины.

Чтобы определить поле вращений элементарных объемов растягиваемого цилиндра с дислокациями, построим полярное разложение тензора дисторсии $\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}$, где $\mathbf{U} = \mathbf{G}^{1/2}$ — положительно определенный тензор растяжения, $\mathbf{A}$ — собственно ортогональный тензор вращения. Извлекая квадратный корень из тензора (5.4), получим

$$\mathbf{U} = C_r\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + K^{-1}[C_\varphi(C_\varphi + \lambda) + \beta_0(\alpha_0 + \beta_0)]\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \\ + K^{-1}(\beta_0\lambda - \alpha_0 C_\varphi)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi) + K^{-1}[\lambda(C_\varphi + \lambda) + \alpha_0(\alpha_0 + \beta_0)]\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

$$K = \sqrt{(C_\varphi + \lambda)^2 + (\alpha_0 + \beta_0)^2}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \cos\chi(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) + \sin\chi(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi) \tag{5.7}$$

$$\cos\chi = K^{-1}(C_\varphi + \lambda), \quad \sin\chi = K^{-1}(\alpha_0 + \beta_0)$$

Выражение (5.7) означает, что поворот элементарных объемов цилиндра происходит вокруг радиальной оси $\mathbf{e}_r$ на постоянный угол χ.

Обратимся к анализу напряжений и решению уравнений равновесия (2.4). На основании (2.5), (2.6), (5.2), (5.4) имеем

$$D_{rr}^* = C_r(\tau_1 + I_1\tau_2) - \tau_2 C_r^3$$

$$D_{\varphi\varphi}^* = C_\varphi(\tau_1 + I_1\tau_2) - \tau_2[C_\varphi(C_\varphi^2 + \beta_0^2) - \alpha_0(\lambda\beta_0 - \alpha_0 C_\varphi)]$$

$$D_{\varphi z}^* = \beta_0(\tau_1 + I_1\tau_2) - \tau_2[\beta_0(C_\varphi^2 + \beta_0^2) + \lambda(\lambda\beta_0 - \alpha_0 C_\varphi)]$$

$$D_{z\varphi}^* = -\alpha_0(\tau_1 + I_1\tau_2) - \tau_2[C_\varphi(\lambda\beta_0 - \alpha_0 C_\varphi) - \alpha_0(\alpha_0^2 + \lambda^2)]$$

$$D_{zz}^* = \lambda(\tau_1 + I_1\tau_2) - \tau_2[\beta_0(\lambda\beta_0 - \alpha_0 C_\varphi) + \lambda(\alpha_0^2 + \lambda^2)] \tag{5.8}$$

Представляет интерес также симметричный тензор напряжений Коши

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} = \sigma_r\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\varphi\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \tau_{\varphi z}(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi) + \sigma_z\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

Его компоненты имеют вид

$$\sigma_r = (\tau_1 + I_1\tau_2)C_r^2 - \tau_2 C_r^4 - p(r)$$

$$\sigma_\varphi = (\tau_1 + I_1\tau_2)l - \tau_2(l^2 + q^2) - p(r)$$

$$\tau_{\varphi z} = (\tau_1 + I_1\tau_2)q - \tau_2 q(s + l)$$

$$\sigma_z = (\tau_1 + I_1\tau_2)s - \tau_2(q^2 + s^2) - p(r)$$

$$l = C_\varphi^2 + \alpha_0^2, \quad s = \alpha_0^2 + \beta_0^2, \quad q = \beta_0 C_\varphi - \alpha_0\lambda \tag{5.9}$$

Из (5.9) следует, что компоненты девиатора напряжений Коши в цилиндрических координатах и инварианты девиатора — постоянные величины.

Дифференциальное уравнение для давления $p(r)$, вытекающее из (2.5), уравнений равновесия (2.4) и соотношения (5.4), будет таким:

$$C_r^{-1}\frac{dp}{dr}+\frac{\Delta}{r}p=\frac{D_{rr}^*-D_{\varphi\varphi}^*}{r} \tag{5.10}$$

Здесь постоянные величины D_{rr}^* и $D_{\varphi\varphi}^*$ определяются выражениями (5.8). Решая уравнение (5.10) при граничном условии $D_{rr}(r_0)=0$, получим

$$p(r)=\left(D_{rr}^*C_r-\frac{D_{rr}^*-D_{\varphi\varphi}^*}{r}\right)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\Delta C_r}+\frac{D_{rr}^*-D_{\varphi\varphi}^*}{r} \tag{5.11}$$

Таким образом, построено универсальное в классе изотропных несжимаемых упругих тел решение задачи о растяжении-сжатии кругового цилиндра с трехпараметрическим распределением дислокаций (5.1). Из (5.11) видно, что при $\Delta>0$, где величина Δ определена формулой (5.3), напряжения имеют особенность на оси цилиндра $r=0$. При $\Delta<0$ напряжения ограничены во всем цилиндре.

Уравнение (5.10) имеет очевидное постоянное решение $p=\Delta^{-1}(D_{rr}^*-D_{\varphi\varphi}^*)$. Этому решению можно придать смысл, если рассматривать неограниченную упругую среду.

Продольная сила, действующая в каждом поперечном сечении цилиндрического стержня, определяется при помощи (5.8), (5.11) и выражается так:

$$Q=2\pi\int_0^{r_0}D_{zz}rdr=\pi r_0^2\left[D_{zz}^*-\frac{C_r^2C_\varphi(D_{rr}^*+D_{\varphi\varphi}^*)}{2-\Delta C_r}\right] \tag{5.12}$$

Используя (5.3), можно доказать, что $\Delta C_r<1$. Поэтому знаменатель в (5.12) всегда отличен от нуля.

6. Заключение. В этой статье с точки зрения нелинейной теории дислокаций исследована задача о больших деформациях растяжения–сжатия и кручения сплошного кругового цилиндра, содержащего распределенные дислокации. Для распределенных винтовых дислокаций осевого, радиального и азимутального направлений найдены точные и универсальные в классе изотропных несжимаемых материалов решения задач о напряженно-деформированном состоянии цилиндра. Универсальное решение построено также для задачи о растяжении-сжатии цилиндрического стержня в случае, когда тензор плотности дислокаций имеет три независимые компоненты. Основные результаты сформулированы в терминах величин, доступных измерению в эксперименте: продольное удлинение, угол закручивания, осевая сила и крутящий момент. Получены явные формулы, характеризующие влияние дислокаций на нелинейное сопротивление цилиндра растяжению и кручению.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 18-11-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clayton J.D.* Nonlinear Mechanics of Crystals. Dordrecht: Springer, 2011. 700 p.
2. *Арутюнян Р.А.* Высокотемпературная ползучесть и длительная прочность металлических материалов // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 103–109.
3. *Дудко О.В., Рагозина В.Е.* О динамике разгрузки и упругих волнах в среде с предварительно накопленными пластическими деформациями // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 41–53.
4. *Gutkin M.Y, Ovid'ko I.A* Plastic Deformation in Nanocrystalline Materials. B.: Springer, 2004. 194 p.
5. *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. B.: Springer, 1997. 205 p.
6. *Vorovich I.I.* Nonlinear Theory of Shallow Shells. New York: Springer, 1999. 390 p.
7. *Kondo K.* On the geometrical and physical foundations in the theory of yielding. // In: Proc. 2nd Jap. Nat. Congress of Appl. Mechanics, Tokyo, 1952. P. 41–47.

8. *Bilby B.A, Bullough R., Smith E.* Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. A, 1955.231. P. 263–273.
9. *Kröner E.* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Arch Ration Mech Anal. 1960. V. 4. P. 273–334.
10. *Зеленина А.А., Зубов Л.М.* Изгиб и кручение нелинейно упругих тел с непрерывно распределенными дислокациями // Вестник Южного научного центра РАН. 2009. Т. 5. № 4. С. 15–22.
11. *Yavary A., Goriely A.* Riemann–Cartan geometry of nonlinear dislocation mechanics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2012. V. 205. P. 59–118.
12. *Зеленина А.А., Зубов Л.М.* Нелинейные эффекты при растяжении, изгибе и кручении упругих тел с распределенными дислокациями // ДАН. 2013. Т. 451. № 5. С. 516–519.
13. *Зубов Л.М.* Сферически симметричные решения нелинейной теории дислокаций // ДАН. 2014. Т. 458. № 2. С. 161–164.
14. *Goloveshkina E.V., Zubov L.M.* Universal spherically symmetric solution of nonlinear dislocation theory for incompressible isotropic elastic medium // Arch. Appl. Mech. 2019. V. 89. № 3. P. 409–424.
15. *Nye J.F.* Some geometrical relations in dislocated crystals // Acta Metall. 1953. V. 1. № 2. P. 153–162.
16. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 248 с.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
18. *Вакуленко А.А.* Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ. 1991. Т. 22. С. 3–54.
19. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
20. *Derezin S.V., Zubov L.M.* Disclinations in nonlinear elasticity // Ztsch. Angew. Math. und Mech. 2011. V. 91. P. 433–442.
21. *Галаско А.А., Зубов Л.М.* Нелинейная теория кручения упругих цилиндров с винтовой дислокацией // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2015. № 4. С. 35–43.
22. *Зубов Л.М.* О прямом и обратном эффектах Пойнтинга в упругих цилиндрах // ДАН. 2001. Т. 380. № 2. С. 194–196.