ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 6, с. 111–115

УДК 539.3

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОБОЛОЧЕК С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В. А. Еремеев[a,b,*], Л. П. Лебедев[c,]**

[a] *Гданьский университет технологии, Гданьск, Польша*

[b] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

[c] *Национальный университет Колумбии, Богота, Колумбия*

**e-mail: eremeyev.victor@gmail.com*

***e-mail: llebedev@unal.edu.co*

Поступила в редакцию 10.05.2020 г.
После доработки 27.05.2020 г.
Принята к публикации 22.06.2020 г.

В рамках линейной теории микрополярных оболочек доказаны теоремы существования и единственности слабых решений краевых задач, описывающих малые деформации упругих микрополярных оболочек, соединенных с системой абсолютно твердых тел. В основе определения слабого решения лежит принцип вируальных перемещений. Особенностью данной задачи являются нестандартные краевые условия на границе оболочки и твердых тел.

Ключевые слова: микрополярные оболочки, слабые решения, существование и единственность, жесткие включения

DOI: 10.31857/S0572329920050050

Введение. Пионером в области анализа разрешимости краевых задач нелинейной теории оболочек методами функционального анализа можно считать И.И. Воровича [1–3], см. также [4], где приведен список его основных работ. Впоследствии разрешимость задач теории оболочек рассматривалась многими авторами см., например, [5, 6].

Целью данной работы является анализ существования и единственности слабых решений для некоторого класса краевых задач линейной теории микрополярных оболочек. В рамках данной модели теории оболочка описывается как деформируемая материальная поверхность, каждая точка которой обладает шестью степенями свободы абсолютно твердого тела [7–9]. Другими словами, микрополярную оболочку можно рассматривать как двумерный континуум Коссера. Данная модель оболочек, известная также как шестипараметрическая теория оболочек [10], нашла приложения в описании разветвляющихся и композитных оболочек [11, 12]. Кроме того, используемая кинематика позволяет описать сопряжение оболочки с недеформированными твердыми телами. В этом случае на границе идеального контакта оболочки и твердого тела возникают нестандартные краевые условия, которые отличаются от классических. Анализу статических задач с подобными краевыми условиями и посвящена данная работа.

1. Основные соотношения. Рассмотрим малые деформации микрополярных оболочек [7–9, 13]. Пусть S представляет собой базовую поверхность оболочки, а $L = \partial S$ –

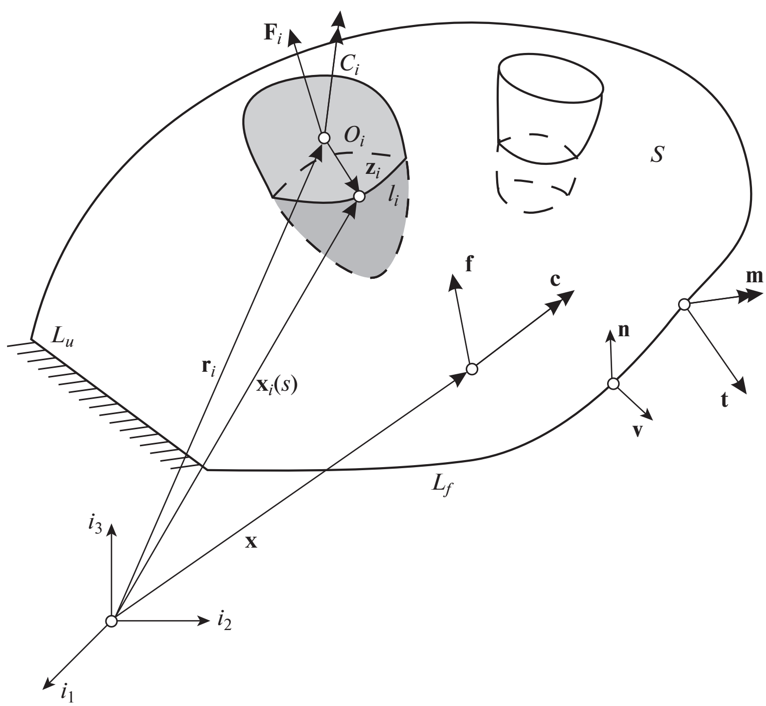

Рис. 1

ее внешний контур, который предполагается достаточно гладким, см. рис. 1. На оболочку действуют поверхностные силы **f** и моменты **c**. Здесь и далее векторы и тензоры обозначаются полужирным шрифтом. Часть $L_u \subset S$ контура предполагается жестко защемленной, а на оставшейся части L_f приложены контурные силы **t** и моменты **m**, $L = L_u \cup L_f$. Кроме того, оболочка связана с n жесткими телами, к которым приложены силы $\mathbf{F}_i$ и моменты $\mathbf{C}_i$, $i = 1,\ldots,n$. Граница сопряжения оболочки с i-м твердым телом обозначена через l_i, **n** и $\boldsymbol{\nu}$ векторы единичной нормали к S и к L и l_i, причем $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$.

В случае малых перемещений и поворотов кинематика оболочки описывается двумя векторными полями – полем перемещений базовой поверхности $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ и полем поворотов $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ – радиус-вектор S. Условия равновесия оболочки следуют из принципа вируальных перемещений

$$\delta E - \delta A = 0 \tag{1.1}$$

где E – функционал энергии деформации и δA – работа внешних сил, определяемые формулами

$$E = \iint\limits_S W\,dS \tag{1.2}$$

$$\delta A = \iint\limits_S (\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \delta\boldsymbol{\phi})\,dS + \int\limits_{L_f} (\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\phi})\,ds + \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{u}_i + \mathbf{C}_i \cdot \delta\boldsymbol{\phi}_i\right) \tag{1.3}$$

В (1.2) W – поверхностная плотность энергии деформации, которая является квадратичной формой мер деформации $\mathbf{e}$ и k:

$$W = W(\mathbf{e}, \mathbf{k}), \quad \text{где} \quad \mathbf{e} = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{A} \times \phi, \quad \mathbf{k} = \nabla\phi$$

Здесь ∇ – поверхностный оператор градиента, $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, $\mathbf{I}$ – единичный тензор. Предполагается, что W – положительно определенная квадратичная форма своих аргументов

$$W(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \geq c_1 \mathbf{e} : \mathbf{e} + c_2 \mathbf{k} : \mathbf{k}$$

с положительными константами c_1, c_2, не зависящими от $\mathbf{e}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{e} : \mathbf{e} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T)$. В выражении (1.3) введены виртуальные перемещения и повороты твердых тел $\delta\mathbf{u_i}$ и $\delta\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}$. Здесь виртуальные перемещения отсчитываются от положения центров тяжести C_i. Таким образом, вариация δW принимает форму

$$\delta W = \mathbf{T} : \delta\mathbf{e} + \mathbf{M} : \delta\mathbf{k}, \quad \delta\mathbf{e} = \nabla\delta\mathbf{u} + \mathbf{A} \times \delta\phi, \quad \delta\mathbf{k} = \nabla\delta\phi$$

где $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ – тензоры усилий и моментов, определяемые формулами

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{k}}$$

Принцип виртуальных перемещений (1.1)–(1.3) рассматривается на кинематически допустимых полях перемещений и поворотов, то есть полях, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{u}\big|_{L_u} = 0, \quad \boldsymbol{\phi}\big|_{L_u} = 0 \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u}(s)\big|_{l_i} = \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\phi}_i \times \mathbf{z}_i(s), \quad \boldsymbol{\phi}(s)\big|_{l_i} = \boldsymbol{\phi}_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.5}$$

где $\mathbf{z}_i$ – радиус-вектор контура, отсчитываемый от C_i, s – длина дуги вдоль контура l_i, см. рис. 1.

Можно показать, что вариационное уравнение (1.1), дополненное соотношениями (1.2)–(1.4), приводит к уравнениям равновесия микрополярных оболочек и статическим краевым условиям, заданным на L_f и l_i, $i = 1, \ldots, n$, которые здесь для краткости не приводятся. При этом в качестве неизвестных выступают поля перемещений и поворотов $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$, а также постоянные векторы $\mathbf{u_i}$ и $\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}$. Последние находятся из краевых условий (1.5) и вариационной постановки задачи. Приведем здесь только условия на l_i

$$\int\limits_{l_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds = \mathbf{F}_i, \quad \int\limits_{l_i} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{T} \times \mathbf{z}_i) ds = \mathbf{M}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

2. Слабые решения. Принцип виртуальных перемещений лежит в основе определения слабых решений соответствующей краевой задачи. Запишем принцип виртуальных перемещений (1.1) в форме

$$\iint\limits_S (\mathbf{T} : \delta\mathbf{e} + \mathbf{M} : \delta\mathbf{k}) dS = \iint\limits_S (\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \delta\boldsymbol{\phi}) dS + \int\limits_{L_f} (\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\phi}) ds + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{u}_i + \mathbf{C}_i \cdot \delta\boldsymbol{\phi}_i) \tag{2.1}$$

В (2.1) рассматриваются вариации $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\phi}$, $\delta\mathbf{u_i}$ и $\delta\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}$, удовлетворяющие (1.4), (1.5).

Следуя [1–3, 13, 14], введем определение энергетического пространства. Пусть $C^1(S)$ – множество пар непрерывно дифференцируемых функций $\mathbf{V} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})$, удовлетворяющих краевым условиям (1.4) и $\mathbf{U} = ((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u_n}, \boldsymbol{\phi}_\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{\phi}_n)$. Поверхность оболочки S и ее контур предполагаются достаточно гладкими, см. [3, 5, 13]. На $C^1(S)$ введем скалярные произведения

$$(\mathbf{U}, \delta\mathbf{U})_E = \iint\limits_S (\mathbf{T} : \delta\mathbf{e} + \mathbf{M} : \delta\mathbf{k}) dS \tag{2.2}$$

$$(\mathbf{U}, \delta\mathbf{U})_H = \iint\limits_S (\mathbf{T} : \delta\mathbf{e} + \mathbf{M} : \delta\mathbf{k}) dS + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{u_i} \cdot \delta\mathbf{u}_i + \boldsymbol{\phi}_i \cdot \delta\boldsymbol{\phi}_i) \tag{2.3}$$

Определение 1. Пополнение $C^1(S)$ в норме, индуцированной скалярным произведением (2.2), называется энергетическим пространством E.

Напомним, что норма в E эквивалентна норме в пространстве Соболева $(W^{1,2}(S))^6$, см. [13].

Слабая формулировки задачи равновесия требует замены поточечных краевых условий (5) на интегральные соотношения вида

$$\int\limits_{l_i} (\mathbf{u}(s) - \boldsymbol{\phi}_i \times \mathbf{z}_i(s))^2 \, ds = 0, \quad \int\limits_{l_i} (\boldsymbol{\phi}(s) - \boldsymbol{\phi}_i)^2 \, ds = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{s})$, $\boldsymbol{\phi}(s)$ – следы вектор-функций $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\phi}$ на соответствующих контурах $\boldsymbol{l_i}$, а пространство H с соответствующим скалярным произведением (2.3) и соотношениями (2.4) для его компонент есть $H = E \otimes \mathbb{R}^{3n} \otimes \mathbb{R}^{3n}$.

На основе вариационного уравнения (2.1) дадим определение слабого решения.

Определение 2. Назовем слабым (энергетическим) решением задачи равновесия микрополярной оболочки с жесткими включениями элемент $\mathbf{U} \in E \otimes \mathbb{R}^{3n} \otimes \mathbb{R}^{3n}$, удовлетворяющее (2.1) и равенствам (2.4), для любых $\delta\mathbf{U} \in E \otimes \mathbb{R}^{3n} \otimes \mathbb{R}^{3n}$ и $\delta\mathbf{u_i}$ и $\delta\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}$, удовлетворяющих (2.4).

Уравнение (2.1) теперь можно записать с использованием скалярных произведений следующим образом

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}, \delta\mathbf{U})_E &= (\mathbf{f}, \delta\mathbf{u})_{L_2(S)} + (\mathbf{c}, \delta\boldsymbol{\phi})_{L_2(S)} + (\mathbf{t}, \delta\mathbf{u})_{L_2(L_f)} + (\mathbf{m}, \delta\boldsymbol{\phi})_{L_2(L_f)} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{u}_i + \mathbf{C}_i \cdot \delta\boldsymbol{\phi}_i) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Выражение $\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{u}_i + \mathbf{C}_i \cdot \delta\boldsymbol{\phi}_i)$ представляет собой непрерывный линейный функционал в H. Таким образом, как и в [13], если $\mathbf{f} \in L_p(S)$, $\mathbf{c} \in L_p(S)$, $\mathbf{t} \in L_q(L_f)$, $\mathbf{m} \in L_q(L_f)$, для любых фиксированных p, q, $1 < p, q < \infty$, правая часть (2.4) представляет собой линейный непрерывный функционал в H, что позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема. Слабое решение $\mathbf{U} \in E \otimes \mathbb{R}^{3n} \otimes \mathbb{R}^{3n}$ краевой задачи равновесия микрополярной оболочки с жесткими включениями существует и единственно. Кроме того, каждая декартова координата вектора $\mathbf{V} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,2}(S)$ и доставляет минимум функционалу энергии на кинематически допустимых полях перемещений и поворотов.

Доказательство теоремы с некоторыми модификациями повторяет данные в [13, 14] и здесь не приводится для краткости.

Отметим, что если отсутствуют закрепленные части ($L_u = \varnothing$), то тогда рассматриваемая задача получается со свободным контуром. В этом случае можно показать решение определенно с точностью до жестких перемещений и поворотов, а внешние силы должны быть самоуравновешенными, то есть такими, какие требуются для равновесия оболочки с включениями, рассматриваемой как абсолютно твердое тело.

Заключение. В работе доказано существование и единственность слабых решений смешанной краевой задачи теории микрополярных оболочек с жесткими включениями, которые допускают малые повороты и перемещения. На оболочку действуют поверхностные и контурные силы и моменты. Жесткие включения нагружены сосредоточенными силами и моментами. Особенностью данной задачи является наличие краевых условий (5). В частности, на контурах l_i, $i = 1,\dots,n$, заранее неизвестные повороты постоянны, а перемещения точек контура l_i совпадают с малыми перемещениями твердого тела. Используя результаты [13–15], полученные результаты могут быть обобщены на случай оболочек с упругими подкреплениями, со свободным краем, при учете анизотропии, а также на случай задач динамики и на собственные колебания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-08-00450А), а также поддержана грантом Hermes 48949 Universidad Nacional de Colombia.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 4. С. 173–186.

2. *Ворович И.И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 2. С. 203–206.

3. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 376 с.

4. *Lebedev L.P., Eremeyev V.A.* Academician Iosif I. Vorovich// ZAMM. 2011. V. 91. № 6. P. 429–432.

5. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity. Vol. III. Theory of Shells. Amsterdam: Elsevier, 2000. 599 p.

6. *Лебедев Л.П.* О решении динамической задачи вязкоупругих оболочек // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 1. С. 62–64.

7. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 208 с.

8. *Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H.* Foundations of Micropolar Mechanics. Heidelberg: Springer, 2013. 152 p.

9. *Eremeyev V.A. Cloud M.J., Lebedev L.P.* Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics. New Jersey: World Scientific, 2018. 428 p.

10. *Libai A., Simmonds J.G.* The Nonlinear Theory of Elastic Shells. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. 542 p.

11. *Konopińska V., Pietraszkiewicz W.* Exact resultant equilibrium conditions in the non-linear theory of branching and self-intersecting shells // International Journal of Solids and Structures. 2007. V. 44. № 1. P. 352–369.

12. *Chróścielewski J., Sabik A., Sobczyk B., Witkowski W.* 2-D constitutive equations for orthotropic Cosserat type laminated shells in finite element analysis// Composites Part B: Engineering. 2019. V. 165. P. 335–353.

13. *Eremeyev V.A., Lebedev L.P.* Existence theorems in the linear theory of micropolar shells// ZAMM. 2011. V. 91. № 6. P. 468–476.

14. *Eremeyev V.A., Lebedev L.P.* Existence of weak solutions in elasticity // Mathematics and Mechanics of Solids. 2013. V. 18. № 2. P. 204–217.

15. *Eremeyev V.A., dell'Isola F., Boutin C., Steigmann D.* Linear pantographic sheets: existence and uniqueness of weak solutions // Journal of Elasticity. 2018. V. 132. № 2. P. 175–196.