ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 6, с. 82–92

УДК 519.3

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ ПОРИСТЫХ ПЬЕЗОКОМПОЗИТОВ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА ГРАНИЦАХ ПОР МЕТОДОМ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ

© 2020 г. А. В. Наседкин[a,*], А. А. Наседкина[a], М. Э. Нассар[a,b]

[a] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*
[b] *Университет Менуфия, Эль-Менуфия, Египет*
**e-mail: avnasedkin@sfedu.ru*

Поступила в редакцию 01.06.2020 г.
После доработки 16.06.2020 г.
Принята к публикации 03.07.2020 г.

Рассмотрены задачи об определении эффективных модулей пористых пьезокерамических материалов с осаженными на границах пор веществами с экстремальными свойствами. Дано обоснование метода эффективных модулей. Доказано соотношение взаимности, из которого следуют свойства эффективных модулей, аналогичные известным для модулей пьезоэлектрических материалов. Отмечено, что для гомогенизации пористых пьезоэлектрических композитов с жесткими или электродированными границами пор необходимо использовать модели с расположенными на границах пор материалами с экстремально большими модулями. В результате численных расчетов выявлены аномальные свойства различных эффективных пьезоэлектрических модулей, перспективные для практических применений исследованных пьезокомпозитов.

Ключевые слова: пьезоэлектричество, пьезокомпозит, пористость, эффективный модуль, пьезомодуль, представительный объем, жесткая граница поры, электродированная граница поры

DOI: 10.31857/S057232992005013X

1. Введение. Для повышения эффективности в последние годы стали активно разрабатываться композитные пьезокерамические материалы. В частности, пористая пьезокерамика нашла свое применение в различных устройствах медицинского ультразвука и в гидроакустике [1]. Разработка моделей гомогенизации пористых пьезоматериалов была начата достаточно давно [2, 3], но, тем не менее, данная тематика не потеряла актуальности до настоящего времени [4–6]. Метод эффективных модулей является наиболее популярным способом определения эффективных свойств пьезокомпозитов и позволяет учесть их внутреннюю структуру, в том числе на микро- и наноуровнях [7]. Между тем, в теоретическом плане этот метод, несмотря на проведенные ранее исследования [8, 9], остается не полностью изученным. В целом надо отметить, что математическим вопросам электроупругости было посвящено достаточно мало работ [10, 11], а теория пьезоэлектрических композитов разработана еще совсем не достаточно.

Недавно была предложена новая технология создания пористых пьезокерамических материалов с осаженными на поверхности пор частицами других веществ [12]. В частности, можно получить пористые пьезокомпозиты с металлизированными границами пор. Теоретические и компьютерные исследования [13, 14] таких пьезокомпозитов продемонстрировали, что они обладают достаточно необычными свойствами. Однако в [13, 14] были использованы модели с граничными условиями свободных электродов на металлизированных поверхностях пор, которые в задаче гомогенизации не поддерживали энергетический баланс между пьезокомпозитом и эквивалентной средой сравнения.

В развитие данных работ в настоящей статье изучается метод эффективных модулей для гомогенизации как обычных пористых пьезоэлектрических материалов, так и пористых пьезоматериалов с полностью электродированными границами пор и с абсолютно жесткими границами пор. Для пьезокомпозитов с экстремальными свойствами на границах пор применяются общие особенности моделирования, связанные с введением фиктивных материалов или с очень большими диэлектрическими проницаемостями, или с очень большими упругими жесткостями.

2. Моделирование обычных двухфазных пьезокомпозитов. Пусть Ω – представительный объем пьезоэлектрического композита, $\Gamma = \partial\Omega$ – внешняя граница объема, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор-функция перемещений, $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ – функция электрического потенциала, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор пространственных координат. Примем, что объем Ω подразделяется на два множества $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ ($\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$), занятых двумя пьезоэлектрическими материалами с различными физико-механическими свойствами, причем объем $\Omega^{(1)}$ заполнен основным пьезоэлектрическим материалом, т.е. является матрицей композита, а объем $\Omega^{(2)}$ является совокупностью включений, заполненных другим материалом. Второй материал будем считать пьезоэлектрическим даже в тех случаях, когда он является упругим или чисто диэлектрическим. Для таких материалов будем задавать пренебрежимо малые пьезоэлектрические модули. При этом для упругих материалов можно принять малые диэлектрические проницаемости, а для чисто диэлектрических материалов – пренебрежимо малые модули упругих жесткостей. Пусть $\Omega^{(2)}$ состоит из M не соприкасающихся между собой областей Ω_m; $\Omega^{(2)} = \cup_{m=1}^{M}\Omega_m$; $\Gamma_m = \partial\Omega_m$ – границы областей, $m = 1, 2, \ldots, M$; $\Gamma^{(2)} = \partial\Omega^{(2)} = \cup_{m=1}^{M}\Gamma_m$. Обозначим через $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к Γ_m, внешней по отношению к объему основного материала $\Omega^{(1)}$. Также через $\mathbf{n}$ будем обозначать и вектор внешней единичной нормали к границе всего представительного объема Γ.

Будем использовать следующие обозначения для модулей пьезоэлектрических материалов: $\mathbf{c}^E$ – тензор четвертого ранга модулей упругих жесткостей c_{ijkl}^E, измеренных при постоянном электрическом поле (E); $\mathbf{e}^d$ и $\mathbf{e}^c$ – тензоры третьего ранга пьезомодулей e_{ikl}^d и e_{ikl}^c при прямом (direct) и обратном (converse) пьезоэффектах, соответственно; $\boldsymbol{\varkappa}^S = \boldsymbol{\varepsilon}^S$ – тензор второго ранга модулей диэлектрических проницаемостей $\varkappa_{ij}^S = \varepsilon_{ij}^S$, измеренных при постоянных деформациях (S). Эти материальные модули обладают стандартными свойствами симметрии и положительной определенности

$$c_{ijkl}^E = c_{jikl}^E = c_{ijlk}^E = c_{klij}^E, \quad e_{ikl}^d = e_{ilk}^d, \quad e_{ikl}^c = e_{ilk}^c, \quad \varkappa_{ij}^S = \varkappa_{ji}^S \tag{2.1}$$

$$\forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad E_i, \quad \exists\, c_0 > 0, \quad \varkappa_0 > 0 : c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} > c_0 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}, \quad \varkappa_{ij}^S E_i E_j \ge \varkappa_0 E_i E_i \tag{2.2}$$

где здесь и далее $i, j, k, l = 1, 2, 3$, а по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Как хорошо известно со времени открытия пьезоэлектричества, пьезомодули при прямом пьезоэффекте и пьезомодули при обратном пьезоэффекте равны

$$e_{ikl}^d = e_{ikl}^c \tag{2.3}$$

и поэтому в их обозначениях верхние индексы можно опустить.

В задаче гомогенизации двухфазного пьезоэлектрического композита известны некоторые характерные особенности структуры представительного объема Ω, т.е. его отдельных фаз $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, объемная доля включений $p = |\Omega^{(2)}|/|\Omega|$ и материальные модули каждой фазы: $c_{ijkl}^{E} = c_{ijkl}^{E(n)}$, $e_{ikl}^{d} = e_{ikl}^{c} = e_{ikl}^{(n)}$, $\varkappa_{ij}^{S} = \varkappa_{ij}^{S(n)}$, $\mathbf{x} \in \Omega^{(n)}$, $n = 1, 2$. По этим данным требуется определить эффективные модули $c_{ijkl}^{E\mathrm{eff}}$, $e_{ikl}^{d\mathrm{eff}}$, $e_{ikl}^{c\mathrm{eff}}$, $\varkappa_{ij}^{S\mathrm{eff}}$ однородной пьезоэлектрической среды, в некотором смысле эквивалентной исходному композиту.

По методу эффективных модулей для определения свойств эквивалентной гомогенной среды необходимо решить следующие краевые задачи электроупругости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^{E} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^{c\mathrm{T}} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e}^{d} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varkappa}^{S} \cdot \mathbf{E} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}})/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \tag{2.6}$$

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(2)} \tag{2.7}$$

$$[\varphi] = 0, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}] = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(2)} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \tag{2.9}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры второго ранга напряжений и деформаций с компонентами σ_{ij} и ε_{ij}; $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля с компонентами D_i и E_i, соответственно; $[\bullet] = (\bullet^{(2)}) - (\bullet^{(1)})$ скачок величины $(\bullet)$ через границу раздела фаз $\Gamma^{(2)}$; $(\ldots)^{\mathrm{T}}$ — операция транспонирования; $(\ldots) \cdot (\ldots)$ — операция скалярного произведения; $(\ldots) : (\ldots)$ — операция двойного внутреннего произведения тензоров; $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{E}_0$ — тензор второго ранга и вектор, соответственно, состоящие из постоянных компонент.

Для определения полного набора эффективных модулей пьезоэлектрического композита задачи (2.4)—(2.9) можно решить девять раз, полагая в (2.9) отдельные компоненты $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и $\mathbf{E}_0$ отличными от нуля ($\gamma = 1, 2, \ldots, 9$). Именно, можно рассмотреть шесть задач (2.4)—(2.9) с различными ненулевыми смещениями на границе Γ (δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$)

$$\begin{gathered} \gamma = 1,2,\ldots,6, \quad \gamma \Leftrightarrow (rs), \quad r,s = 1,2,3: \quad k \Leftrightarrow (kk) \\ k = 1,2,3, \quad 4 \Leftrightarrow (23), \quad 5 \Leftrightarrow (13), \quad 6 \Leftrightarrow (12) \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_{0ij} = \varepsilon_{0ij}^{\gamma} = S_0(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr})/2, \quad E_{0i} = E_{0i}^{\gamma} = 0 \tag{2.11}$$

и три задачи (2.4)—(2.9) с ненулевым электрическим потенциалом на Γ

$$\gamma = 7,8,9, \quad \gamma \Leftrightarrow q = \gamma - 6, \quad q = 1,2,3: \quad \varepsilon_{0ij} = \varepsilon_{0ij}^{\gamma} = 0, \quad E_{0i} = E_{0i}^{\gamma} = E_0\delta_{iq} \tag{2.12}$$

После получения решений u_i^{γ}, φ^{γ} для каждой из задач (2.4)—(2.9) с $\zeta = 1, 2, \ldots, 9$, т.е., с (2.10), (2.11) и (2.12), вычисляются компоненты тензора напряжений σ_{ij}^{γ} и компоненты вектора электрической индукции D_i^{γ}. Далее, для этих величин находятся осредненные по объему величины согласно формуле

$$\langle(\bullet)\rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}(\bullet)d\Omega \tag{2.13}$$

Полученные средние значения позволяют определить все эффективные модули $c_{ijkl}^{E\mathrm{eff}}$, $e_{ikl}^{d\mathrm{eff}}$, $e_{ikl}^{c\mathrm{eff}}$, $\varkappa_{ij}^{S\,\mathrm{eff}}$ пьезокомпозитного материала. Так, из решений задач (2.4)–(2.9) при $\gamma = 1, 2, \ldots, 6$, (2.10), (2.11) находятся эффективные модули жесткости $c_{ijkl}^{E\mathrm{eff}}$ и эффективные пьезомодули при прямом пьезоэффекте $e_{ikl}^{d\,\mathrm{eff}}$ $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$c_{ijrs}^{E\,\mathrm{eff}} = \langle \sigma_{ij}^{\gamma} \rangle / S_0, \quad e_{irs}^{d\,\mathrm{eff}} = \langle D_i^{\gamma} \rangle / S_0 \tag{2.14}$$

Решения задач (2.4)–(2.9), (2.12) при $\gamma = 7, 8, 9$, $q = \gamma - 6$, т.е. $q = 1, 2, 3$, позволяют найти эффективные пьезомодули при обратном пьезоэффекте $e_{qij}^{c\,\mathrm{eff}}$ и эффективные модули диэлектрических проницаемостей $\varkappa_{iq}^{S\,\mathrm{eff}}$:

$$e_{qij}^{c\,\mathrm{eff}} = -\langle \sigma_{ij}^{\gamma} \rangle / E_0, \quad \varkappa_{iq}^{S\,\mathrm{eff}} = \langle D_i^{\gamma} \rangle / E_0 \tag{2.15}$$

Отметим, что в пьезотехнике для материальных модулей приняты матричные обозначения Фойхта, согласно которым при законе соответствия (2.10) между индексами $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 6$, $\alpha, \beta \Leftrightarrow (ij), (kl)$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$, имеем:

$$c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}} = c_{ijkl}^{E\mathrm{eff}}, \quad e_{i\beta}^{d\,\mathrm{eff}} = e_{ikl}^{d\mathrm{eff}}, \quad e_{i\beta}^{c\mathrm{eff}} = e_{ikl}^{c\mathrm{eff}} \tag{2.16}$$

В обозначениях (2.16), как следует из (2.1)–(2.3), матрица упругих жесткостей $c_{\alpha\beta}^{E}$ для исходных материалов симметрична и положительно определена, а коэффициенты пьезомодулей при прямом и при обратном пьезоэффектах равны: $e_{i\beta}^{c} = e_{i\beta}^{d}$.

Обоснование описанного здесь метода эффективных модулей для упругих композитов приведено в [15], а его распространение на случай пьезоэлектрических композитов было дано в [8, 9]. Это обоснование базируется на следующих математических утверждениях, справедливых для функций $u_i, \varphi \in W_2^1(\Omega)$ с условиями (2.7), (2.8) на межфазной границе $\Gamma^{(2)}$.

Лемма 2.1. Для полей деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и перемещений $\mathbf{u}$ и для полей напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и электрического потенциала φ, связанных соотношениями (2.6), выполняются равенства

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = -\frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} (\mathbf{nu} + (\mathbf{nu})^{\mathrm{T}}) d\Gamma, \quad \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Pi} \mathbf{n} \varphi d\Gamma$$

Лемма 2.2. Если для перемещений $\mathbf{u}$ и электрического потенциала φ на границе Γ выполнены условия (2.9) и поля $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{E}$ связаны с полями $\mathbf{u}$, φ по (2.6), то имеют место формулы

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0 \tag{2.17}$$

Лемма 2.3. Если в условиях леммы 2.2 дополнительно существуют поля $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{D}$, для которых справедливы формулы (2.4), то выполняются равенства

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0 : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{E}_0 \cdot \langle \mathbf{D} \rangle \tag{2.18}$$

Отметим, что в условиях лемм 2.1–2.3 определяющие соотношения пьезоэлектрических материалов (2.5) не используются. Первые формулы в леммах справедливы и для чисто упругих композитов, а вторые формулы – для чисто диэлектрических композитов. Наиболее важной для обоснования процедуры гомогенизации является лемма 2.3. Как известно, плотность внутренней потенциальной энергии U пьезоэлектрического тела в объеме Ω определяется формулой: $U = (\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})/2$. Для гомогенной среды сравнения с эффективными модулями $\mathbf{c}^{E\mathrm{eff}}$, $\mathbf{e}^{d\mathrm{eff}}$, $\mathbf{e}^{c\mathrm{eff}}$, $\boldsymbol{\varkappa}^{S\,\mathrm{eff}}$ при граничных условиях (2.9) перемещения и потенциал во всем объеме Ω даются формулами $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\varphi = \varphi_0 = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0$, деформации и напряженность электрического поля постоянны и равны $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и $\mathbf{E}_0$, соответственно, а напряжения $\boldsymbol{\sigma}_0$ и электрическая индукции $\mathbf{D}_0$ также постоянны и определяются формулами

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{c}^{E\text{eff}} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{e}^{\text{ceff}\mathrm{r}} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{D}_0 = \mathbf{e}^{d\text{eff}} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varkappa}^{S\text{eff}} \cdot \mathbf{E}_0 \tag{2.19}$$

причем эти формулы можно записать для каждой из девяти задач (2.4)–(2.9) с $\zeta = 1, 2, \ldots, 9$, т.е. с (2.10), (2.11) и (2.12), т.е. для $\mathbf{u}_0^\gamma = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0^\gamma$, $\varphi_0^\gamma = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0^\gamma$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^\gamma$, $\mathbf{E}_0^\gamma$, $\boldsymbol{\sigma}_0^\gamma$, $\mathbf{D}_0^\gamma$.

Как следует из (2.17), пьезоэлектрический композит и среда сравнения имеют одинаковые средние поля деформаций и электрического поля, и если потребовать, чтобы равнялись и средние поля напряжений и электрической индукции

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{D}_0 \tag{2.20}$$

то по (2.18) в композите и в среде сравнения будут равны и средние потенциальные энергии $\langle U \rangle = U_0$, $\langle U \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \rangle / 2$, $U_0 = (\boldsymbol{\varepsilon}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0)/2$.

Формулы (2.20) в совокупности с (2.17), (2.19) позволяют для задач (2.4)–(2.9) с (2.10)–(2.12) получить выражения (2.14), (2.15) для эффективных модулей. Таким образом, описанная процедура гомогенизации по методу эффективных модулей для пьезокомпозитов с условиями сплошного контакта (2.7), (2.8) на межфазных границах обоснована леммами 2.2, 2.3 и (2.20).

Дополнительные свойства эффективных модулей можно получить из соотношения взаимности. Рассмотрим две задачи (2.4)–(2.9) с различными видами граничных условий в (2.10)–(2.12) при $\gamma, \zeta = 1, 2, \ldots, 9$. Умножая полевые уравнения (2.4) для одной задачи на решения другой задачи, складывая их, интегрируя по объему и вычитая полученные соотношения, записанные для различных задач, приходим к равенству

$$\int_\Omega [\mathbf{u}^\gamma \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^\zeta) - \mathbf{u}^\zeta \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^\gamma) + \varphi^\gamma (\nabla \cdot \mathbf{D}^\zeta) - \varphi^\zeta (\nabla \cdot \mathbf{D}^\gamma)] d\Omega = 0 \tag{2.21}$$

Дальнейшие действия с (2.21) традиционны для подобных соотношений. Выделяя полные производные и применяя формулы Гаусса–Остроградского, получаем

$$\begin{gathered} \int_\Gamma [\mathbf{u}^\gamma \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\zeta) - \mathbf{u}^\zeta \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\gamma) + \varphi^\gamma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^\zeta) - \varphi^\zeta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^\gamma)] d\Gamma - \\ - \int_\Omega [\boldsymbol{\varepsilon}^\gamma : \boldsymbol{\sigma}^\zeta - \boldsymbol{\varepsilon}^\zeta : \boldsymbol{\sigma}^\gamma - \mathbf{E}^\gamma \cdot \mathbf{D}^\zeta + \mathbf{E}^\zeta \cdot \mathbf{D}^\gamma] d\Omega = 0 \end{gathered} \tag{2.22}$$

С учетом определяющих соотношений (2.5) и (2.3) объемный интеграл в (2.22) равен нулю, а в поверхностном интеграле можно учесть граничные условия (2.9) для $\mathbf{u}^\gamma$, φ^γ и $\mathbf{u}^\zeta$, φ^ζ и после этого применить формулу Гаусса–Остроградского для перехода от поверхностного интеграла к объемному. В итоге приходим к следующей теореме взаимности.

Теорема 2.1. Решения двух задач (2.4)–(2.9) с различными видами граничных условий в (2.10)–(2.12) при $\gamma, \zeta = 1, 2, \ldots, 9$ удовлетворяют соотношению взаимности

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^\gamma : \langle \boldsymbol{\sigma}^\zeta \rangle - \mathbf{E}_0^\gamma \cdot \langle \mathbf{D}^\zeta \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0^\zeta : \langle \boldsymbol{\sigma}^\gamma \rangle - \mathbf{E}_0^\zeta \cdot \langle \mathbf{D}^\gamma \rangle \tag{2.23}$$

из которого следуют свойства симметрии матриц эффективных модулей жесткости и диэлектрических проницаемостей и равенства эффективных пьезомодулей при прямом и обратном пьезоэффекте

$$c_{\alpha\beta}^{E\text{eff}} = c_{ijkl}^{E\text{eff}} = c_{klij}^{E\text{eff}} = c_{\beta\alpha}^{E\text{eff}}, \quad \varkappa_{ij}^{S\,\text{eff}} = \varkappa_{ji}^{S\,\text{eff}}, \quad e_{i\beta}^{d\text{eff}} = e_{ikl}^{d\text{eff}} = e_{ikl}^{\text{ceff}} = e_{i\beta}^{\text{ceff}} \tag{2.24}$$

Симметрия матрицы эффективных жесткостей $c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}}$ следует из (2.23) при $\gamma, \zeta \le 6$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \zeta$, когда $\mathbf{E}_0^{\gamma} = 0$, $\mathbf{E}_0^{\zeta} = 0$, и по (2.10), (2.11), (2.14), (2.19), (2.20) $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\gamma} : \langle \boldsymbol{\sigma}^{\zeta} \rangle = S_0^2 c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\zeta} : \langle \boldsymbol{\sigma}^{\gamma} \rangle = S_0^2 c_{\beta\alpha}^{E\mathrm{eff}}$.

Аналогично, симметрия матрицы эффективных диэлектрических проницаемостей $\varkappa_{ij}^{S\,\mathrm{eff}}$ следует из (2.23) при $6 < \gamma$, $\zeta \le 9$, $i = \gamma - 6$, $j = \zeta - 6$, когда $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\gamma} = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\zeta} = 0$, и по (2.12), (2.15), (2.19), (2.20) $\mathbf{E}_0^{\gamma} \cdot \left\langle \mathbf{D}^{\zeta} \right\rangle = E_0^2 \varkappa_{ij}^{S\mathrm{eff}}$, $\mathbf{E}_0^{\zeta} \cdot \left\langle \mathbf{D}^{\gamma} \right\rangle = E_0^2 \varkappa_{ji}^{E\mathrm{eff}}$.

Наконец, последние равенства (2.24) следуют из (2.23) при $i = \gamma - 6$, $6 < \gamma \le 9$, $\beta = \zeta \le 6$, когда $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\gamma} = 0$, $\mathbf{E}_0^{\zeta} = 0$, и по (2.10)–(2.12), (2.14), (2.15), (2.19), (2.20) $\mathbf{E}_0^{\gamma} \cdot \langle \mathbf{D}^{\zeta} \rangle = E_0 S_0 e_{i\beta}^{d\mathrm{eff}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\zeta} : \langle \boldsymbol{\sigma}^{\gamma} \rangle = -E_0 S_0 e_{i\beta}^{c\mathrm{eff}}$.

Кроме того, в силу (2.14), (2.15), (2.18)–(2.20) имеет место положительная определенность матрицы эффективных упругих жесткостей $c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}}$ и матрицы эффективных упругих жесткостей $\varkappa_{ij}^{S\,\mathrm{eff}}$. Таким образом, эффективные модули пьезоэлектрического композита имеют стандартные свойства модулей обычного пьезоэлектрического материала (2.1)–(2.3).

3. Случай пористого пьезокомпозита. Поскольку диэлектрическая проницаемость воздуха в сотни или тысячи раз меньше диэлектрических проницаемостей пьезокерамики, то для пористых пьезокерамических материалов возможны две стратегии решения задач гомогенизации.

При первом подходе пористый материал исследуется по методологии, описанной в предыдущем разделе, когда поры рассматриваются как включения, заполненные фиктивным материалом. Тогда для материала пор в $\Omega^{(2)}$ можно принять $c_{\alpha\beta}^{E(2)} = \chi_p c_{\alpha\beta}^{E(1)}$, $e_{i\beta}^{(2)} = \chi_e$, $\varkappa_{ii}^{S(2)} = \varepsilon_0$, где $\chi_p, \chi_e \ll 1$, например, $\chi_p = 10^{-10}$, $\chi_e = 10^{-10}$ (Кл/м^2), $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ (Ф/м) – диэлектрическая проницаемость вакуума.

При втором подходе в представительном объеме Ω рассматривается только основной материал в $\Omega^{(1)}$. Тогда краевые задачи электроупругости ставятся для области $\Omega^{(1)}$, а вместо осреднения (2.13) вычисляются величины согласно первой из приведенных ниже формул

$$\left\langle (\bullet) \right\rangle^{(1)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^{(1)}} (\bullet) d\Omega, \quad \left\langle (\bullet) \right\rangle^{(2)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^{(2)}} (\bullet) d\Omega$$

Вместо условий жесткого контакта (2.7), (2.8) на межфазной границе $\Gamma^{(2)}$ теперь надо рассматривать условия свободной границы

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(2)} \tag{3.1}$$

Как численные эксперименты, так и простые рассуждения показывают, что при обоих подходах будут получаться приблизительно одинаковые значения эффективных модулей. Действительно, в силу малости модулей фиктивного материала пор в $\Omega^{(2)}$ будем иметь $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \approx 0$, $\mathbf{D}^{(2)} \approx 0$, и поэтому граничные условия (2.7), (2.8) достаточно хорошо аппроксимируются условиями (3.1). Между тем, лемма 2.2 выполняется только для задач гомогенизации во всем объеме Ω с учетом области $\Omega^{(2)}$, поскольку

$$\left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle^{(1)} + \left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \left\langle \mathbf{E} \right\rangle = \left\langle \mathbf{E} \right\rangle^{(1)} + \left\langle \mathbf{E} \right\rangle^{(2)} = \mathbf{E}_0 \tag{3.2}$$

Здесь в (3.2) $\left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \right\rangle \neq 0$, $\langle \mathbf{E}^{(2)} \rangle \neq 0$, и эти величины совсем не являются малыми, а поэтому $\left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle^{(1)} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\left\langle \mathbf{E} \right\rangle^{(1)} \neq \mathbf{E}_0$. Однако лемма 2.3 выполняется в части равенств $\left\langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \right\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0 : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, $\left\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right\rangle = \mathbf{E}_0 \cdot \left\langle \mathbf{D} \right\rangle$ для задач гомогенизации, как с учетом области $\Omega^{(2)}$, так и без нее. При этом, при сравнении таких задач гомогенизации надо учитывать следующие соотношения: $\left\langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \right\rangle^{(1)} = \left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle : \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle \neq \left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle^{(1)} : \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle^{(1)}, \left\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right\rangle = \left\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right\rangle^{(1)} = \left\langle \mathbf{E} \right\rangle \cdot \left\langle \mathbf{D} \right\rangle \neq \left\langle \mathbf{E} \right\rangle^{(1)} \cdot \left\langle \mathbf{D} \right\rangle^{(1)}$.

4. Пористые пьезокомпозиты с экстремальными свойствами на границах пор. Дополнительно к обычным пористым пьезокомпозитам рассмотрим также пористые пьезоэлектрические материалы, границы пор которых являются абсолютно жесткими или электродированными. Именно, проведем сравнение следующих четырех видов пористых пьезоматериалов.

I) Обычный пористый пьезоэлектрический материал с условиями полного контакта на межфазной границе (2.7), (2.8) или с условиями свободных границ пор (3.1).

II) Пористый пьезоэлектрический материал с абсолютно жесткими границами пор. Здесь границы пор Γ_m в Ω_m можно окружить слоем материала с очень большими упругими модулями. При этом, толщина слоя будет несущественной, и поэтому можно принять, что все объемы в $\Omega^{(2)}$ заполнены фиктивным пьезоэлектрическим материалом с очень большими упругими жесткостями $c_{\alpha\beta}^{E(2)} = \chi_r c_{\alpha\beta}^{E(1)}$, $e_{i\beta}^{(2)} = \chi_e$, $\varkappa_{ii}^{S(2)} = \varepsilon_0$, где $\chi_r \gg 1$, например, $\chi_r = 10^{11}$.

Отметим, что в таком композите объемы Ω_m могут смещаться только как недеформируемые тела. Тогда можно заменить граничные условия (2.7) на условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_m + \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{x}, \quad \int_{\Gamma_m} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma_m} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{x}) d\Gamma = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M \tag{4.1}$$

где $\mathbf{U}_m$, $\boldsymbol{\omega}_m$ – неизвестные постоянные векторы. Однако, как будет показано далее, эти условия не удобны для задач гомогенизации.

III) Пористый пьезоэлектрический материал с полностью электродированными границами пор, т.е. покрытыми бесконечно тонким слоем металла. В модели этого композита можно принять, что все объемы в $\Omega^{(2)}$ заполнены фиктивным пьезоэлектрическим материалом с очень большими диэлектрическими проницаемостями: $c_{\alpha\beta}^{E(2)} = \chi_p c_{\alpha\beta}^{E(1)}$, $e_{i\beta}^{(2)} = \chi_e$, $\varkappa_{ii}^{S(2)} = \chi_d \varepsilon_0$, где $\chi_d \gg 1$, например, $\chi_d = 10^{11}$. Материал в $\Omega^{(2)}$ является проводящим, и поэтому области Ω_m становятся эквипотенциальными. Кажется, что для такого материала вместо граничных условий (2.8) можно принять условия вида

$$\varphi = \Phi_m, \quad \int_{\Gamma_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\Gamma = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M \tag{4.2}$$

где Φ_m – неизвестные постоянные величины. Однако, эти условия, как и (4.1), не подходят для задач гомогенизации.

IV) Пористый пьезоэлектрический материал с абсолютно жесткими и электродированными границами пор. Данный тип пористого композита является объединением случаев II и III, когда все объемы в $\Omega^{(2)}$ заполнены фиктивным пьезоэлектрическим материалом с очень большими жесткостями и диэлектрическими проницаемостями: $c_{\alpha\beta}^{E(2)} = \chi_r c_{\alpha\beta}^{E(1)}$, $e_{i\beta}^{(2)} = \chi_e$, $\varkappa_{ii}^{S(2)} = \chi_d \varepsilon_0$. Здесь также ошибочно заменять граничные условия (2.7), (2.8) на условия (4.1), (4.2).

Случаи II–IV являются достаточно идеализированными вариантами пористых композитов. Из этих случаев наиболее реалистичным представляется вариант III, когда на этапе спекания пьезокерамики в порообразователь добавляются частицы металла, которые затем осаживаются на границы пор [12].

Композиты типа II—IV интересны тем, что в них поля деформаций и/или напряженности электрического поля локализуются в области $\Omega^{(1)}$. Так, в противоположность обычной пористой пьезокерамике, при жестких границах пор имеют место равенства $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(2)} = 0$, а при электродированных границах пор — $\langle\mathbf{E}\rangle^{(1)} = \mathbf{E}_0$, $\langle\mathbf{E}\rangle^{(2)} = 0$.

Для таких композитов при условиях (4.1), (4.2) не выполняются соотношения леммы 2.3 и теоремы 2.1. Так, для пористых композитов типа II с жесткими границами пор в задачах (2.4)–(2.6), (4.1), (2.8), (2.9) при ненулевых механических граничных условиях (2.10), (2.11), т.е. при $\gamma = 1, 2, \ldots, 6$, нарушаются механические энергетические соотношения $\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma} : \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}\right\rangle = \left\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma} : \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}\right\rangle^{(1)} \neq \left\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma}\right\rangle : \left\langle\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}\right\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\gamma} : \left\langle\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}\right\rangle$, а электрические энергетические соотношения справедливы при ненулевых электрических граничных условиях (2.12), т.е. при $\gamma = 7, 8, 9$, $\left\langle\mathbf{E}^{\gamma} \cdot \mathbf{D}^{\gamma}\right\rangle = \left\langle\mathbf{E}^{\gamma} \cdot \mathbf{D}^{\gamma}\right\rangle^{(1)} = \left\langle\mathbf{E}^{\gamma}\right\rangle \cdot \left\langle\mathbf{D}^{\gamma}\right\rangle = \mathbf{E}_0^{\gamma} \cdot \left\langle\mathbf{D}^{\gamma}\right\rangle$, $\left\langle\mathbf{E}^{\gamma}\right\rangle = \left\langle\mathbf{E}^{\gamma}\right\rangle^{(1)} + \left\langle\mathbf{E}^{\gamma}\right\rangle^{(2)} = \mathbf{E}_0^{\gamma}, \left\langle\mathbf{E}^{\gamma}\right\rangle^{(2)} \neq 0$.

Наоборот, для пористых композитов типа III с электродированными границами пор для задач (2.4)–(2.7), (4.2), (2.9) при ненулевых механических граничных условиях (2.10), (2.11), т.е. при $\gamma = 1, 2, \ldots, 6$, выполняются механические энергетические соотношения $\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma} : \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}\rangle = \langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma} : \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}\rangle^{(1)} = \langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma}\rangle : \langle\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\gamma} : \langle\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}\rangle$, $\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma}\rangle = \langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma}\rangle^{(1)} + \langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma}\rangle^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\gamma}$, $\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma}\rangle^{(2)} \neq 0$, а при ненулевых электрических граничных условиях (2.12), т.е. при $\gamma = 7, 8, 9$, нарушаются электрические энергетические соотношения $\langle\mathbf{E}^{\gamma} \cdot \mathbf{D}^{\gamma}\rangle = \langle\mathbf{E}^{\gamma} \cdot \mathbf{D}^{\gamma}\rangle^{(1)} \neq \langle\mathbf{E}^{\gamma}\rangle \cdot \langle\mathbf{D}^{\gamma}\rangle = \mathbf{E}_0^{\gamma} \cdot \langle\mathbf{D}^{\gamma}\rangle$.

Для пористых пьезокомпозитов типа IV с жесткими и электродированными границами пор в области $\Omega^{(1)}$ локализуются как поля деформаций, так и поля вектора напряженности электрического поля, $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_0, \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(2)} = 0, \langle\mathbf{E}\rangle^{(1)} = \mathbf{E}_0, \langle\mathbf{E}\rangle^{(2)} = 0$, а при замене граничных условий (2.7), (2.8) на условия (4.1), (4.2) не выполняются ни механические энергетические соотношения леммы 2.3, ни электрические.

Нарушение энергетических соотношений и теоремы 2.1 приводит к тому, что для краевых задач с условиями на интерфейсе (4.1), (4.2) вместо (2.7), (2.8) метод эффективных модулей не должен применяться. Между тем, использование интерфейсных условий (2.7), (2.8) сохраняет энергетические соотношения (2.18) для композитов всех типов I–IV, поскольку тогда в области $\Omega^{(2)}$ можно учесть ненулевые средние поля напряжений $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle^{(2)}$ или электрической индукции $\langle\mathbf{D}\rangle^{(2)}$, поддерживающие выполнение равенств (2.18).

5. Численные эксперименты. В качестве примера рассмотрим пористую пьезокерамику PZT-4. Пьезокерамика является материалом гексагонального класса анизотропии и характеризуется десятью модулями. Для пьезокерамики PZT-4 примем следующие значения модулей $c_{11}^{E(1)} = 13.9\times10^{10}$; $c_{12}^{E(1)} = 7.78\times10^{10}$; $c_{13}^{E(1)} = 7.43\times10^{10}$; $c_{33}^{E(1)} = 11.5\times10^{10}$; $c_{44}^{E(1)} = 2.56\times10^{10}$ (Н/м^2); $e_{31}^{(1)} = -5.2$; $e_{33}^{(1)} = 15.1$; $e_{15}^{(1)} = 12.7$ (Кл/м^2); $\varkappa_{11}^{S(1)} = 730\varepsilon_0$; $\varkappa_{33}^{S(1)} = 635\varepsilon_0$. Решения задач гомогенизации будем проводить методом конечных элементов в пакете ANSYS.

Представительный объем Ω строился в виде регулярной конечно-элементной сетки по методологии, описанной в [13, 14]. Вначале была сгенерирована базовая кубиче-

Таблица 1

№	$r(c_{11}^{E\mathrm{eff}})$	$r(c_{12}^{E\mathrm{eff}})$	$r(c_{13}^{E\mathrm{eff}})$	$r(c_{33}^{E\mathrm{eff}})$	$r(c_{44}^{E\mathrm{eff}})$	$r(e_{31}^{\mathrm{eff}})$	$r(e_{33}^{\mathrm{eff}})$	$r(e_{15}^{\mathrm{efff}})$
I	0.50	0.41	0.38	0.47	0.58	0.45	0.64	0.57
II	2.26	1.36	1.37	2.61	3.29	1.06	0.81	0.86
III	0.47	0.35	0.36	0.46	0.58	2.20	0.40	0.64
IV	2.21	1.35	1.33	2.33	2.70	0.55	2.63	2.36

Таблица 2

№	$r(\varkappa_{11}^{S\mathrm{eff}})$	$r(\varkappa_{33}^{S\mathrm{eff}})$	$r(d_{31}^{\mathrm{eff}})$	$r(d_{33}^{\mathrm{eff}})$	$r(d_{15}^{\mathrm{efff}})$	$r(\varkappa_{11}^{T\mathrm{eff}})$	$r(\varkappa_{33}^{T\mathrm{eff}})$
I	0.71	0.69	0.83	0.98	0.97	0.63	0.63
II	0.65	0.65	0.22	0.20	0.26	0.44	0.41
III	6.38	5.73	1.77	1.13	1.11	3.60	3.48
IV	4.93	4.75	0.41	0.64	0.87	3.53	3.05

ская ячейка размера $l_c \times l_c \times l_c$, состоящая из 27 конечных элементов в форме параллелепипедов. Основной кубический элемент располагался в центре ячейки. Его ребро l_p определялось через коэффициент k_p и длину l_c стороны ячейки по формуле: $l_p = k_p l_c$. Этот центральный элемент окружался регулярно 26 конечными элементами в форме гексаэдров. Затем базовая ячейка копировалась вдоль каждой из трех координатных осей n_c раз. В итоге полученный массив включал n_c^3 базовых ячеек. Далее, исходя из предполагаемой пористости p_s, датчиком случайных чисел выбирались $M = [p_s(n_c/k_p)^3]$ центральных элементов ([...] – целая часть числа), и их модули заменялись на модули материала одного из типов I–IV, принятые для $\Omega^{(2)}$. В результате истинная пористость $p = M(k_p/n_c)^3$ может немного отличаться от предполагаемой, но незначительно: $p \approx p_s$. В расчетах для объема Ω были приняты следующие параметры: $n_c = 15$, $k_p = 0.9$.

Полученный представительный объем пористого пьезоэлектрического материала имеет закрытую пористость и частично случайную структуру. В этом объеме имелось M элементов – пор Ω_m, все грани $\Gamma_m = \partial\Omega_m$ которых полностью контактируют с границами соседних элементов матрицы композита. Все элементы задавались как конечные элементы SOLID5 с опцией пьезоэлектрического анализа. Элементы матрицы и элементы – поры типа I–IV отличались только геометрией и материальными свойствами.

Результаты решения задач гомогенизации для пористых пьезокерамик типа I–IV при $p = 0.3$ (30%) представлены в табл. 1 и 2 в виде относительных значений эффективных модулей $r(\ldots)$. Здесь $r(c_{\alpha\beta}^{E}) = c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}}/c_{\alpha\beta}^{E(1)}$ – отношение величины эффективного модуля жесткости $c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}}$ к соответствующему значению $c_{\alpha\beta}^{E(1)}$ модуля для плотной пьезокерамики, и т.д.

При этом, в табл. 2 приведены также относительные значения пьезоэлектрических коэффициентов деформаций $r(d_{i\beta}^{\mathrm{eff}})$ и относительные значения диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянных напряжениях $r(\varkappa_{ii}^{T\mathrm{eff}})$. Эти важные для ряда практических применений коэффициенты определяются через исходные модули и найденные из решений задач гомогенизации по формулам: $\mathbf{d} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{c}^E)^{-1}$, $\boldsymbol{\varkappa}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\varkappa}^S + \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{d}^{\mathrm{eff}} = \mathbf{e}^{\mathrm{eff}} \cdot (\mathbf{c}^{E\mathrm{eff}})^{-1}$, $\boldsymbol{\varkappa}^{\mathrm{Teff}} = \boldsymbol{\varkappa}^{S\mathrm{eff}} + \mathbf{d}^{\mathrm{eff}} \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{eff}\mathrm{T}}$.

Отметим, что проведенные вычисления показали, что коэффициенты матриц упругих жесткостей $c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}} = c_{\beta\alpha}^{E\mathrm{eff}}$ были симметричны, пьезомодули прямого и обратного пьезоэффектов были равны $e_{i\beta}^{\mathrm{eff}} = e_{i\beta}^{d\mathrm{eff}} = e_{i\beta}^{c\mathrm{eff}}$, и гомогенный материал оставался трансверсально изотропным для пьезокомпозитов всех рассмотренных типов I–IV.

Как видно, для обычной пористой пьезокрамики имеют место достаточно стандартные результаты. Все эффективные модули $c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}}$, $\left|e_{i\beta}^{\mathrm{eff}}\right|$, $\varkappa_{ii}^{S\,\mathrm{eff}}$, $\left|d_{i\beta}^{\mathrm{eff}}\right|$, $\varkappa_{ii}^{\mathrm{T\,eff}}$, убывают при увеличении пористости, причем пьезомодули $|d_{i\beta}^{\mathrm{eff}}|$ – в наименьшей степени.

Для композита II с жесткими границами пор результаты существенно меняются. Как и следовало ожидать, относительные эффективные модули упругости по сравнению с исходными достаточно существенно увеличились, особенно относительные модули $r(c_{11}^{E\mathrm{eff}})$, $r(c_{33}^{E\mathrm{eff}})$, $r(c_{44}^{E\mathrm{eff}})$. Эффективные диэлектрические проницаемости $r(\varkappa_{ii}^{S\mathrm{eff}})$, $r(\varkappa_{ii}^{\mathrm{Teff}})$ уменьшились немного более сильно по сравнению со случаем обычной пористой пьезокерамики. Относительные значения эффективных пьезомодулей $r(e_{33}^{\mathrm{eff}})$ и $r(e_{15}^{\mathrm{eff}})$ увеличились по сравнению с обычной пористой пьезокерамикой, но остались меньшими 1, а относительное значение пьезомодуля $r(e_{31}^{\mathrm{eff}})$ стало даже большим 1. Относительные пьезомодули $r(d_{31}^{\mathrm{eff}})$, $r(d_{33}^{\mathrm{eff}})$ и $r(d_{15}^{\mathrm{eff}})$ уменьшились в наибольшей степени, что объясняется убыванием пьезомодулей $\left|e_{31}^{\mathrm{eff}}\right|$, e_{33}^{eff}, e_{15}^{eff} и одновременным ростом модулей жесткости $c_{\alpha\beta}^{E\mathrm{eff}}$.

Для композита III с электродированными границами пор все относительные модули упругости совсем немного уменьшились по сравнению со случаем обычной пористой пьезокерамики. Эффективные диэлектрические проницаемости существенно увеличились и стали превосходить даже проницаемости диэлектрической среды с металлическими включениями, рассчитанными по формуле Максвелла ($r(\varkappa^{\mathrm{eff}}) = (1 + 2p)/(1 - p) \approx 2.28$ при $p = 0.3$). Значения эффективных пьезомодулей изменились в разной степени. Относительные пьезомодули $r(e_{31}^{\mathrm{eff}})$, $r(d_{31}^{\mathrm{eff}})$, $r(d_{33}^{\mathrm{eff}})$ и $r(d_{15}^{\mathrm{eff}})$ стали большими 1, причем наиболее существенно выросли относительные значения трансверсальных пьезомодулей $r(e_{31}^{\mathrm{eff}})$ и $r(d_{31}^{\mathrm{eff}})$. Между тем, относительные пьезомодули $r(e_{33}^{\mathrm{eff}})$ и $r(e_{15}^{\mathrm{eff}})$ остались меньшими 1, причем относительный пьезомодуль $r(e_{33}^{\mathrm{eff}})$ уменьшился более сильно, чем для материалов типа I и II.

Для композитов типа IV с жесткими и электродированными границами пор поведение эффективных модулей жесткости и диэлектрических проницаемостей определяется экстремальным поведением соответствующих модулей для композитов типа II и III, но имеет место очень сильный рост относительных пьезомодулей $r(e_{33}^{\mathrm{eff}})$ и $r(e_{15}^{\mathrm{eff}})$, не наблюдаемый для композитов типа I–III.

6. Заключение. Итак, классический метод эффективных модулей имеет энергетическое обоснование для пьезокомпозитов и, в частности, как для обычных пористых пьезоэлектрических материалов, так и для пьезоматериалов с жесткими и/или электродированными границами пор. Набор краевых задач при различных линейных главных граничных условиях позволяет определить все эффективные модули пьезокомпозита. Установленное соотношение взаимности между решениями различных краевых задач доказывает все основные свойства матриц эффективных модулей, которые имеют место для однородных пьезоэлектрических материалов.

Кроме того, результаты численных экспериментов демонстрируют, что пористые пьезоматериалы с жесткими и/или электродированными границами пор имеют аномальные высокие значения некоторых эффективных модулей, перспективные для практических применений.

Наконец, при использовании метода эффективных модулей с условиями деформирования границ как жесткого целого или с граничными условиями свободных электродов нарушается энергетический баланс между решениями задач для исходного пьезокомпозита и для однородной среды сравнения. Поэтому такие граничные условия не должны применяться в задачах гомогенизации.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ringgaard E., Lautzenhiser F., Bierregaard L.M., Zawada T., Molz E.* Development of porous piezoceramics for medical and sensor applications // Materials. 2015. V. 8, № 12. P. 8877–8889.
2. *Marutake M.* A calculation of physical constants of ceramic barium titanate // J. Phvs. Soc. Jap. 1956. V. 11. P. 807–814.
3. *Wersing W., Lubitz K., Mohaupt J.* Dielectric, elastic and piezoelectric properties of porous PZT ceramics // Ferroelectrics. 1986. V. 68. P. 77–97.
4. *Bale A., Rouffaud R., Hladky-Hennion A.-C., Marchet P., Levassort F.* Modeling the electroelastic moduli of porous textured piezoceramics // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2019. V. 66. № 5. P. 949–957.
5. *Martinez-Ayuso G., Friswell M.I., Adhikari S., Khodaparast H.H., Berger H.* Homogenization of porous piezoelectric materials // Int. J. Solids Struct. 2017. V. 113–114. P. 218–229.
6. *Martínez-Ayuso G., Friswell M.I., Khodaparast H.H., Roscow J.I., Bowen C.R.* Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization // Acta Materialia. 2019. V. 173. 332–341.
7. *Наседкин А.В.* Анализ влияния поверхностных напряжений на эффективные свойства нанопористых пьезокомпозитов // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 1. С. 5–18.
8. *Хорошун Л.Н., Маслов Б.П., Лещенко П.В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наукова думка, 1989. 347 с.
9. *Nasedkin A.V., Shevtsova M.S.* Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity / Ferroelectrics and superconductors: Properties and applications. *Parinov I.A.* (ed.) New York: Nova Science Publ., 2011. P. 231–254.
10. *Белоконь А.В., Ворович И.И.* Некоторые математические вопросы теории электроупругих тел / Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: ДГУ, 1979. С. 53–67.
11. *Белоконь А.В., Ворович И.И.* Начально-краевые задачи динамической теории электроупругости // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1982. № 2. С. 29–32.
12. *Rybyanets A.N., Naumenko A.A.* Nanoparticles transport in ceramic matrixes: a novel approach for ceramic matrix composites fabrication // J. Mod. Phys. 2013. V. 4, № 8. P. 1041–1049.
13. *Nasedkin A., Nasedkina A., Rybyanets A.* Finite element simulation of effective properties of microporous piezoceramic material with metallized pore surfaces // Ferroelectrics. 2017. V. 508. P. 100–107.
14. *Наседкин А.В., Наседкина А.А., Рыбянец А.Н.* Конечно-элементное моделирование и анализ эффективных свойств неоднородно поляризованного пористого пьезокерамического материала с частичной металлизацией поверхностей пор // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2018. Вып. 5. С. 38–56.
15. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.