ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 6, с. 93–100

УДК 539.374

МОДЕЛЬ СДВИГОВОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ

В. В. Глаголев[a],*, **А. А. Маркин**[a],**

[a] *Тульский государственный университет, Тула, Россия*

**e-mail: vadim@tsu.tula.ru*

***e-mail: markin-nikram@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.06.2020 г.
После доработки 21.07.2020 г.
Принята к публикации 14.08.2020 г.

Исследуется напряженно-деформированное состояние тонкого адгезионного слоя в слоистом композите при сдвиговом характере нагружения с учетом его возможного упругопластического деформирования. Толщина слоя рассматривается в качестве линейного параметра. Проанализировано аналитическое решение, полученное на основе упрощенной постановки задачи в дифференциальном виде. Для малых толщин слоя предложен локальный критерий перехода в состояние пластичности, связанный с линейным параметром.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, упругопластическое деформирование

DOI: 10.31857/S0572329920060070

Введение. В настоящее время основным подходом при определении прочности адгезионных соединений является представление адгезионного слоя слоем нулевой толщины и использование критериальной базы механики квазихрупкого разрушения [1–4]. В этом случае пренебрегают толщиной адгезива, а его механические свойства сводятся к адгезионным силам взаимодействия [5] сопряженных слоем материалов, которые могут иметь разные механические [6] или прочностные свойства [7, 8]. Аналитические решения в этом случае получаются, как правило, в рамках упрощающих гипотез [9–11].

Наряду с данными моделями имеет место подход, учитывающий толщину адгезионного слоя (АС), в рамках модели контактного слоя [12, 13] и модели слоя взаимодействия [14, 15]. В модели контактного слоя пренебрегают напряжением, действующим ортогонально отрыву, которое может учитываться при формулировке условий возможного перехода слоя в состояние пластического деформирования. Отметим, что в настоящее время в состав адгезионных слоев могут входить пластификаторы. Данное обстоятельство требует описания поведения слоев в рамках упругопластической модели. В статье предлагается постановка и приближенное аналитическое решение задачи нагружения адгезионного соединения близкого к регламентной схеме испытания на адгезионную прочность ГОСТ 14759-69.

1. Постановка задачи. Рассмотрим композитную пластину, состоящую из двух консолей 1 и 2 длиной $\ell + a$, с одинаковыми толщинами h и механическими свойствами. Консоли сопряжены АС толщиной δ_0 по отрезку ℓ согласно рисунку. На левом торце консоли 1 действует горизонтальная распределенная нагрузка постоянной интенсивности $\mathbf{P}$. Правый торец пластины жестко закреплен от перемещений. Вся остальная поверхность пластины свободна от напряжений. Считаем материал пластин линейно упругим, а материал АС – идеально упругопластическим. Полагаем, что пластические деформации, как и упругие [16], распределены симметрично по длине слоя $x_1 \in [0; \ell_p) \cup (\ell - \ell_p; \ell]$. При значении интенсивности внешней нагрузки, соответствующей пластическому течению в вершине слоя, необходимо определить напряженно-деформированное состояние (НДС) в данном композите.

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию "слоя взаимодействия", развитую в работах [14–17]. В этом случае равновесие тел 1 и 2, согласно [14, 17] запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\begin{gathered}\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\sigma}_{22}\delta u_2^+ dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12}\delta u_1^+ dx_1 + \\ + 0.5\delta_0\left(\int_l \bar{\sigma}_{11}\frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1}dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12}\frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1}dx_1\right) = A\end{gathered} \tag{1.1}$$

и тела 2:

$$\begin{gathered}\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_l \bar{\sigma}_{22}\delta u_2^- dx_1 - \int_l \bar{\sigma}_{12}\delta u_1^- dx_1 + \\ + 0.5\delta_0\left(\int_l \bar{\sigma}_{11}\frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1}dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12}\frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1}dx_1\right) = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

где S_1, S_2 – площади тел 1 и 2; L_1, L_2 – контуры левых торцов тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций в телах 1 и 2; $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; $A = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u} d\ell$ – работа внешней нагрузки; $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{22}, \bar{\varepsilon}_{12}$ – компоненты тензоров средних напряжений и деформаций слоя 3 с соответствующими компонентами:

$$\bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{\delta_0}\int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2)\, dx_2$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\delta_0}\int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1,x_2)\, dx_2, \quad \bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0}\int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1,x_2)\, dx_2 \tag{1.3}$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0}\right), \quad \bar{\varepsilon}_{11} = 0.5\left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1}\right)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21} = \bar{\varepsilon}_{12} = 0.5\left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5\left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1}\right)\right) \tag{1.4}$$

где u_k^+, u_k^- – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя; $k = 1, 2$ здесь и далее. Постулируется жесткое сцепление между границами АС и областями 1, 2, а также равенство модуля и противоположность направления векторов напряжений по границам слоя.

Уравнения (1.1) и (1.2) замкнем определяющими соотношениями в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij}\right) \tag{1.5}$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона тел 1 и 2; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ объемное расширение; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала АС определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций. В области упругого деформирования определяющие соотношения примут вид:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1+\nu_3}\left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1-2\nu_3}\bar{\varepsilon}\delta_{ij}\right) \tag{1.6}$$

где E_3, ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона АС.

В области упругопластического деформирования АС определяющие соотношения для средних по толщине слоя напряжений принимаем в виде критерия Треска–Сен-Венана [18]:

$$\bar{\sigma}^{\max} = \tau_0 \tag{1.7}$$

где $\bar{\sigma}^{\max}$ – максимальное касательное напряжение; τ_0 – предел текучести.

Таким образом, решение системы (1.1)–(1.7) сводится к определению поля перемещений $u(x_1,x_2)$ в телах 1 и 2 (см. рисунок) при заданных граничных условиях.

Для упрощения задачи и получения аналитического решения принимаем, что поле перемещений согласно концепции "дифференциального сдвига" [19] определено следующим образом в теле 1:

$$u_1(x_1,x_2) = u_1^+(x_1); \quad u_2(x_1,x_2) = 0 \tag{1.8}$$

и теле 2:

$$u_1(x_1,x_2) = u_1^-(x_1); \quad u_2(x_1,x_2) = 0 \tag{1.9}$$

При данной схеме нагружения для средних напряжений в слое в случае плоской деформации реализуется напряженное состояние следующего вида:

$$\bar{\sigma}_{11} \neq 0; \quad \bar{\sigma}_{22} \neq 0; \quad \bar{\sigma}_{12} \neq 0; \quad \bar{\sigma}_{33} \neq 0 \tag{1.10}$$

Полагаем, что имеет место упругая сжимаемость $\bar{\sigma} = 3K\bar{\varepsilon}$, где $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}$; K – коэффициент объемного расширения. Для материала слоя в состоянии плоской деформации, как и в работе [20], пластические и упругие деформации в направлении базисного вектора $\mathbf{e}_3$ равны нулю: $\varepsilon_{33}^p = 0$, $\varepsilon_{33}^e = 0$. В силу условий (1.8) и (1.9) полагаем равенство нулю пластических $\varepsilon_{22}^p = 0$ и упругих компонент деформаций $\varepsilon_{22}^e = 0$ в направлении базисного вектора $\mathbf{e}_2$. Считаем деформации малыми и для стадии упругопластического деформирования справедливым следующее разложение: $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e + \varepsilon_{ii}^p$. Пренебрегая пластической составляющей, получаем: $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^e$. В результате диагональные напряжения в слое и на стадии упругопластического деформирования могут быть определены в виде (1.6). Используя связь $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = \frac{\nu_3}{(1-\nu_3)}\bar{\sigma}_{11}$, перейдем к главным напряжениям. В результате из (1.7) получим связь касательных напряжений слоя с пределом текучести и осевым напряжением:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \tag{1.11}$$

где $\beta = \left(\frac{1 - 4\nu_3 + 4\nu_3^2}{(1-\nu_3)^2}\right)$.

С учетом (1.3)–(1.11) преобразуем систему (1.1), (1.2) к следующим дифференциальным уравнениям для тела 1:

$$\frac{d\sigma_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0 \quad \text{на участке} \quad x_1 \in [-a;0) \tag{1.12}$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (0;l_p) \tag{1.13}$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell_p;\ell - \ell_p) \tag{1.14}$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell - \ell_p;\ell] \tag{1.15}$$

и тела 2:

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (0;l_p) \tag{1.16}$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{21} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell_p;\ell - \ell_p) \tag{1.17}$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell - \ell_p;\ell) \tag{1.18}$$

$$\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} = 0 \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell;a] \tag{1.19}$$

Решения уравнений сопрягаются в точках $x_1 = 0$:

$$h\sigma_{11}^{(1)}\Big|_{x_l=0-0} = (h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=0+0}, \quad u_1^+\Big|_{x_1=0-0} = u_1^+\Big|_{x_1=0+0} \tag{1.20}$$

$$x_1 = \ell_p:$$

$$(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=\ell_p-0} = (h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=\ell_p+0}, \quad u_1^+\Big|_{x_1=\ell_p-0} = u_1^+\Big|_{x_1=\ell_p+0} \tag{1.21}$$

$$(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=\ell_p-0} = (h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=\ell_p+0}, \quad u_1^-\Big|_{x_1=\ell_p-0} = u_1^-\Big|_{x_1=\ell_p+0} \tag{1.22}$$

$$x_1 = \ell - \ell_p:$$

$$(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=\ell-\ell_p-0} = (h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=\ell-\ell_p+0}, \quad u_1^+\Big|_{x_1=\ell-\ell_p-0} = u_1^+\Big|_{x_1=\ell-\ell_p+0} \tag{1.23}$$

$$(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=\ell-\ell_p-0} = (h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\sigma_{11})_{x_1=\ell-\ell_p+0}, \quad u_1^-\Big|_{x_1=\ell-\ell_p-0} = u_1^-\Big|_{x_1=\ell-\ell_p+0} \tag{1.24}$$

$$x_1 = \ell:$$

$$(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})\Big|_{x_1=\ell-0} = h\sigma_{11}^{(2)}\Big|_{x_1=\ell+0}, \quad u_1^-\Big|_{x_1=\ell-0} = u_1^-\Big|_{x_1=\ell+0} \tag{1.25}$$

с граничными условиями:

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{(1)}\Big|_{x_1=-a} = P, \quad \left(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=0} = 0 \\ \left(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad u_1^-\Big|_{x_1=\ell+a} = 0\end{gathered} \tag{1.26}$$

Определяющие соотношения (1.5), (1.6) для состояния плоской деформации приобретают вид:

для консолей:

$$\sigma_{11}^{(1)} = D\frac{du_1^+}{dx_1}; \quad \sigma_{11}^{(2)} = D\frac{du_1^-}{dx_1} \tag{1.27}$$

для слоя на участке $x_1 \in [\ell_p, \ell - \ell_p]$:

$$\bar{\sigma}_{12} = L\frac{(u_1^+ - u_1^-)}{\delta_0}; \quad \bar{\sigma}_{11} = D_1\left(\frac{du_1^+}{dx_1} + \frac{du_1^-}{dx_1}\right) \tag{1.28}$$

где $D = \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $L = \dfrac{E_3}{2(1+\nu_3)}$; $D_1 = \dfrac{E_3(1-\nu_3)}{2(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$.

На участках $x_1 \in [0;\ell_p) \cup (\ell - \ell_p;\ell]$ имеет место связь компонент средних напряжений и производных граничных перемещений:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2}; \quad \bar{\sigma}_{11} = D_1\left(\frac{du_1^+}{dx_1} + \frac{du_1^-}{dx_1}\right) \tag{1.29}$$

1. Локальное предельное состояние. Аналитическое решение задачи (1.12)–(1.29) приведено в работе [21]. Связь между длиной пластической зоны и внешней нагрузкой определена из полей перемещений при условии достижения в точке $x_1 = \ell_p$ предельного касательного напряжения

$$\bar{\sigma}_{12}\Big|_{x_1=\ell_p} = L\frac{(u_1^+ - u_1^-)}{\delta_0}\bigg|_{x_1=\ell_p} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \tag{2.1}$$

Связь (2.1) приводит к следующему выражению внешней нагрузки [21]:

$$P = \frac{2\tau_0(hD + \delta_0 D_1)m}{h\sqrt{(\beta(D_1 m)^2 + m_1^2)}} \tag{2.2}$$

где $m = e^{2kl_p}(2Ll_p - kD\delta_0 h) + e^{kl}(2Ll_p + kD\delta_0 h)$; $m_1 = 2L(e^{2kl_p} + e^{kl})(hD + \delta_0 D_1)$.

Считаем, что $e^{kl}, h/\delta_0 \gg 1$. При этом в момент достижения условия пластичности для малых δ_0 критическая нагрузка при $\ell_p = 0$ из (2.2) принимает вид:

$$P_s = \tau_0\sqrt{\frac{2D\delta_0}{hL}} \tag{2.3}$$

В соответствии с (2.3) при $\delta_0 \to 0$ переход в пластичность происходит при сколь угодно малой внешней нагрузке. Данный парадокс следует из зависимости (2.3) внешней нагрузки от толщины слоя при малых значениях δ_0. Сформулируем условие пла-

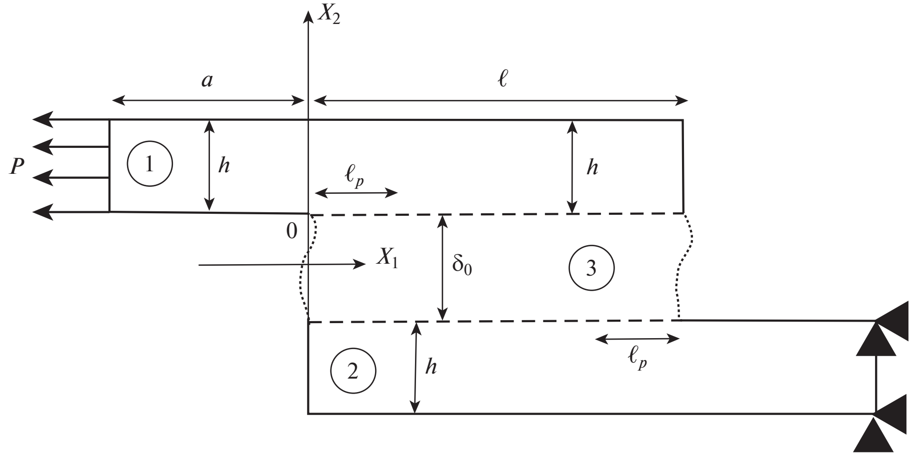

Рис. 1.

стичности, используя в качестве характеристики напряженного состояния слоя обобщенное касательное напряжение

$$\tau_{\delta_0} = \frac{\sqrt{(4\bar{\sigma}_{12}^2 + \beta\bar{\sigma}_{11}^2)\delta_0}}{2} \tag{2.4}$$

Полагаем, что в слое достигается пластическое состояние, если выполняется условие:

$$\lim_{\delta_0 \to 0} \tau_{\delta_0} = \tau_{\delta_0}^s \tag{2.5}$$

где $\tau_{\delta_0}^s$ – критическое значение обобщенного касательного напряжения.

Потребуем, чтобы на интервале $0 \le \delta_0 \le \delta_0^*$ выполнялось условие (2.5). В этом случае внешняя нагрузка, соответствующая переходу слоя в состояние пластичности равна:

$$P_s^{(0)} = \tau_{\delta_0}^s \sqrt{\frac{2D}{hL}} \tag{2.6}$$

Считаем, что при $\delta_0 = \delta_0^*$ выполняется условие (1.7). Тогда из (2.4) и (2.5) следует, что

$$\tau_{\delta_0}^s = \tau_0 \sqrt{\delta_0^*} \tag{2.7}$$

Таким образом, на интервале $0 \le \delta_0 \le \delta_0^*$ критическая внешняя нагрузка имеет конечное значение (2.6). При $\delta_0 > \delta_0^*$ критическая нагрузка определяется по формуле (2.2).

Для определения характерного размера можно использовать эксперименты, реализуемые по схеме рисунка. Установив $P_s^{(0)}$ для малых толщин АС и характеристик консолей, находим $\tau_{\delta_0}^s$. Из (2.7) определяем $\delta_0^* = (\tau_{\delta_0}^s/\tau_0)^2$.

Данный подход позволяет определить значение внешней нагрузки, соответствующее переходу в пластическое состояние во всем диапазоне толщин АС.

Заключение. Предложена модель упругопластического деформирования тонкого адгезионного слоя в слоистом композите. Показано, что учет толщины слоя существенен при расчете внешней нагрузки. Для малых толщин слоя предложен локальный критерий перехода в состояние пластичности, связанный с линейным параметром. В отличие от классических условий пластичности, данный критерий позволяет выделить стадию упругого деформирования и установить значение внешней нагрузки, соответствующее переходу в пластическое состояние. При этом выделяется диапазон толщин, включая нулевую, в котором внешняя нагрузка, соответствующая переходу в пластическое состояние постоянна.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 р_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. *Allen H.G., Feng Z.* Classification of Structural Sandwich Panel Behaviour // Mechanics of Sandwich Structures. Springer, Dordrecht. 1998. P. 1–12.
4. *Ивлев Д.Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения // ПМТФ. 1967. № 6. С. 88–128.
5. *Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С.* Поверхностная энергия и энергия адгезии упругих тел // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 76–91.
6. *Астапов И.С., Астапов Н.С., Корнев В.М.* Модель расслоения композита при поперечном сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. № 2 (21). С. 149–161.
7. *Baldan A.* Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance // Journal of Materials Science. 2004. V. 39. № 15. P. 4729–4797.
8. *Sun C.T., Jih C.J.* On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // Engineering Fracture Mechanics. 1987. № 1 (28). P. 13–20.
9. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plate and shells. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1959. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
10. *Fang X., Charalambides P.G.* The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading // Engineering Fracture Mechanics. 2015. V. 149. P. 1–17.
11. *Mattei O., Bardella L.* A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // Eur. J. Mech. A-Solid. 2016. V. 58. P. 172–186.
12. *Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А.* Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухконсольной балки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. № 3 (14). С. 180–186.
13. *Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А.* Определение напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с применением контактного слоя // Вестник МГСУ. 2016. № 4. С. 17–26.
14. *Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А.* Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016. № 2. С. 34–44.
15. *Глаголев В.В., Маркин А.А., Пашинов С.В.* Биметаллическая пластина в однородном температурном поле // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. № 3 (23). С. 331–343.
16. *Абдурахманов А.А., Глаголев В.В., Фурсаев А.А.* О сдвиге адгезионного слоя в композиционной пластине // Вестник ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2017. № 1. С. 51–60.

17. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. 2019. V. 158. P. 141–149.
18. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
19. *Volkersen O.* Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. Luftfahrtforschung. 1938. V. 15. P. 41–47.
20. *Глаголев В.В., Маркин А.А.* Об одной постановке задачи упругопластического разделения // ПМТФ. 2009. № 4 (50). С. 187–195.
21. *Абдурахманов А.А., Глаголев В.В., Инченко О.В.* Упругопластическое деформирование адгезива при сдвиге // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4 (42). С. 34–45.