

УДК 539.374

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКОГО ДИСКА

© 2020 г. Ю. В. Немировский^{a,b,*}, С. В. Тихонов^{c,**}

^a *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия*

^b *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия*

^c *Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия*

**e-mail: nemiryury@mail.ru*

***e-mail: strangcheb@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.08.2020 г.

После доработки 19.08.2020 г.

Принята к публикации 25.08.2020 г.

В работе рассматриваются слоистые по толщине металлические быстровращающиеся диски. Закон деформирования каждого слоя диска принят в виде аппроксимации полиномом второго порядка. Для вращающихся тонких биметаллических дисков приведены основные соотношения для исследования критических деформированных состояний, возникающих вследствие малых технологических отклонений изготовления полотна либо контурных форм.

Ключевые слова: потеря устойчивости, быстровращающиеся диски, деформация, критическая скорость

DOI: 10.31857/S0572329920060112

1. Введение. В настоящее время проектирование любых элементов конструкций, как правило, производится с целями снижения стоимости их производства, веса, эксплуатационных характеристик. Одним из путей достижения поставленных целей является использование в процессе их изготовления многослойных конструкций.

Важнейшими составляющими таких объектов инженерного моделирования, как паровые и газовые турбины, маховики, электрические насосы, работающих в условиях тяжелых нагрузок являются быстровращающиеся сплошные и кольцевые круговые диски [13]. В отечественной и зарубежной литературе существует достаточно много исследований посвященных определению напряженно-деформированного состояния быстровращающихся дисков при различных условиях пластичности [1–7]. Ивливым Д.Д. впервые в работе [8] рассмотрена задача о механизме потери устойчивости быстровращающегося упругопластического однородного сплошного диска постоянной толщины, методом малого параметра [17] найдены критические значения радиуса пластической зоны и критической относительной скорости вращения. Дальнейшие исследования потери устойчивости плоских однородных, физически-неоднородных, радиально-составных, ступенчатых быстровращающихся дисков методом малого параметра были продолжены в работах [9–12]. Для гибридных слоистых тонких дисков с защитными и упрочняющими слоями такая задача, по-видимому, не рассматривалась и ее решение предлагается в данной статье.

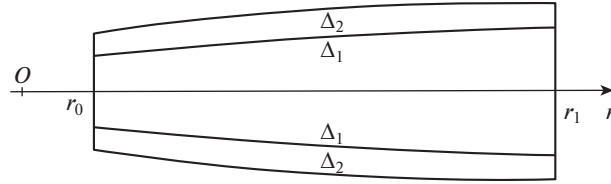


Рис. 1

2. Постановка задачи. Рассмотрим двухслойный плоский кольцевой диск с защитными или упрочняющимися поверхностными слоями с симметричной относительно срединной поверхности структурой расположения материалов (рис. 1). Напряженное состояние будем считать двумерным и кусочно-равномерно распределенным по толщине диска. Задачу будем рассматривать в цилиндрической системе координат r, φ, z . Будем полагать внешний радиус диска гораздо больше максимальной общей толщины диска $2(\Delta_k(r, \varphi) + \Delta_2(r, \varphi))$, где $2\Delta_k(r, \varphi), 2\Delta_m(r, \varphi)$ – толщины первого (внутреннего) и второго (внешнего) слоя диска.

Будем считать, что массовый расход материала при определенной технологии изготовления остается заданным и равным M . Если положить, что массы первого и второго слоя равны M_k и M_m соответственно, тогда получим

$$M_k = 2\rho_k \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_0}^{r_1} r \Delta_k(r, \varphi) dr \right) d\varphi, \quad M_m = 2\rho_m \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_0}^{r_1} r \Delta_m(r, \varphi) dr \right) d\varphi \quad (2.1)$$

где ρ_k, ρ_m – плотности первого и второго слоя диска соответственно.

Толщины каждого из слоев диска представим в виде

$$\Delta_1 = \Delta_{10}(r) + \Delta_{11}(r, \varphi)\delta_1, \quad \Delta_2 = \Delta_{20}(r) + \Delta_{21}(r, \varphi)\delta_2 \quad (2.2)$$

$$\Delta_{11}(r, \varphi) = \psi_{11}(r)z_{11}(\varphi), \quad \Delta_{21}(r, \varphi) = \psi_{21}(r)z_{21}(\varphi) \quad (2.3)$$

а для внутреннего и внешнего радиуса диска положим

$$r_0(\varphi) = r_{00}(1 + \delta_3 \cos \varphi), \quad r_1(\varphi) = r_{10}(1 + \delta_4 \cos \varphi) \quad (2.4)$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ – малые безразмерные параметры.

Из указанных предположений можно получить

$$M = M_{0m} + M_{1m}\delta_1 + M_{2m}\delta_2 + M_{3m}\delta_3 + M_{4m}\delta_4 \quad (2.5)$$

В дальнейшем, не меняя обозначения будем записывать необходимые уравнения используя соответствующие единые обезразмеривающие параметры длины, напряжения, плотности для некоторого исходного проекта. Тогда ненулевыми будут следующие компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = 2\varepsilon_{r\varphi} \quad (2.6)$$

где $u(r, \varphi), v(r, \varphi)$ – проекции вектора перемещений соответственно на оси r, φ .

Уравнения совместности деформаций будут иметь вид

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\varphi)}{\partial r^2} \quad (2.7)$$

Усилия в радиальных сечениях диска можно определить из соотношений

$$\begin{aligned} N_r &= 2(\sigma_{r1}\Delta_1(r) + \sigma_{r2}\Delta_2(r))r, & N_\varphi &= 2(\sigma_{\varphi1}\Delta_1(r) + \sigma_{\varphi2}\Delta_2(r))r \\ N_{r\varphi} &= 2(\sigma_{r\varphi1}\Delta_1(r) + \sigma_{r\varphi2}\Delta_2(r))r \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом они должны удовлетворять для рассматриваемых дисков уравнениям равновесия

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \Psi_z = 0, \quad \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2N_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (2.9)$$

где Ψ_z – массовая нагрузка, которая для рассматриваемых гибридных вращающихся дисков будет равна

$$\Psi_z(r) = rM\Omega^2 \quad (2.10)$$

где Ω – угловая скорость вращения диска.

Для каждого из материалов k -го слоя примем справедливыми соотношения

$$\sigma_{ik} = A_k \varepsilon_{ik} + B_k \varepsilon_{ik}^2 \quad (2.11)$$

где σ_{ik} , ε_{ik} – интенсивность напряжений и деформаций соответственно в k -м слое диска, A_k , B_k – коэффициенты, которые могут быть определены для данного материала слоя диска на основе физических экспериментов.

Интенсивности напряжений и деформаций σ_{ik} , ε_{ik} определяются из соотношений

$$\sigma_{ik} = \sqrt{\sigma_{rk}^2 + \sigma_{\varphi k}^2 - \sigma_{rk}\sigma_{\varphi k} + 3\sigma_{r\varphi k}^2}, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_{rk}^2 + \varepsilon_{\varphi k}^2 - \varepsilon_{rk}\varepsilon_{\varphi k} + 6\varepsilon_{r\varphi k}^2} \quad (2.12)$$

Если имеется реальная диаграмма растяжения соответствующих материалов, то коэффициенты (2.11) могут быть получены методом наименьших квадратов, в противном случае для определения коэффициентов A_k , B_k могут быть использованы простейшие предположения [14, 15]

$$\left. \frac{d\sigma_{ik}}{d\varepsilon_{ik}} \right|_{\varepsilon_{ik}=0} = E_k, \quad \left. \frac{d\sigma_{ik}}{d\varepsilon_{ik}} \right|_{\varepsilon_{ik}=\varepsilon_k^*} = 0, \quad \sigma_{ik}(\varepsilon_k^*) = \sigma_k^* \quad (2.13)$$

где E_k – модуль упругости, σ_k^* – предел прочности, ε_k^* – предельная деформация k -го материала при растяжении.

Из соотношений (2.13) можно получить

$$\begin{aligned} A_k &= E_k, \quad \left. \frac{d\sigma_{ik}}{d\varepsilon_{ik}} \right|_{\varepsilon_{ik}=\varepsilon_k^*} = A_k + 2B_k\varepsilon_k^* = 0, \quad \varepsilon_k^* = -\frac{E_k}{2B_k}, \\ \sigma_k^* &= A_k \left(-\frac{A_k}{2B_k} \right) + B_k \left(-\frac{A_k}{2B_k} \right)^2 = -\frac{A_k^2}{4B_k} \end{aligned}$$

или

$$A_k = E_k, \quad B_k = -\frac{E_k^2}{4\sigma_k^*}, \quad \varepsilon_k^* = \frac{2\sigma_k^*}{E_k} \quad (2.14)$$

Результаты расчета коэффициентов A_k , B_k для различных марок сталей [16] по соотношениям (2.14) приведены в табл. 1 и на рис. 2, где на рисунке цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 обозначены материалы слоя соответствующие номерам образцов табл. 1. Все величины, имеющие размерность напряжения и плотности отнесены к пределу прочности σ_k^* и плотности ρ соответственно стали марки 40Г.

Таблица 1

Номер образца	Материал слоя	E	Σ^*	$\varepsilon_{*}^{\dagger}$	A_k	B_k	ρ
1	40Г	338.98	1	0.006	338.98	-28727	1
2	15Г	315.25	0.69	0.0044	315.25	-35754	1
3	ЭП-202	355.93	1.27	0.0071	355.93	-24915	1.011
4	ЭП-33	271.19	1.66	0.0123	271.19	-11068	1.017
5	титан	186.44	0.67	0.0072	186.44	-12818	0.58
6	никель	355.93	0.76	0.0042	355.93	-41525	1.14

3. Метод и построение решения. При использовании аппроксимирующих зависимостей (2.11) для пар материалов с номерами k, m ($k \neq m$) выражения для усилий в рассматриваемых двухслойных дисках можно записать в форме

$$N_r = \Phi_{km} \cdot \left(\varepsilon_r + \frac{1}{2} \varepsilon_{\varphi} \right), \quad N_{\varphi} = \Phi_{km} \cdot \left(\varepsilon_{\varphi} + \frac{1}{2} \varepsilon_r \right), \quad N_{r\varphi} = \Phi_{km} \cdot \varepsilon_{r\varphi} \quad (3.1)$$

где

$$\Phi_{km} = (A_k + B_k \varepsilon_i) \Delta_{1k} + (A_m + B_m \varepsilon_i) \Delta_{2m}, \quad (k, m = 1, 2, m \neq k) \quad (3.2)$$

Подставим соотношения для усилий (3.1) в уравнение равновесия (2.9), в результате получим

$$\frac{\partial \Phi_{km}}{\partial r} \left(\varepsilon_r + \frac{1}{2} \varepsilon_{\varphi} \right) + \Phi_{km} \left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{\varphi}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{\varphi}}{2r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{km}}{\partial \varphi} \varepsilon_{r\varphi} + \Psi_z = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_{km}}{\partial r} \varepsilon_{r\varphi} + \frac{\partial \Phi_{km}}{\partial \varphi} \left(\frac{\varepsilon_{\varphi}}{r} + \frac{\varepsilon_r}{2r} \right) + \Phi_{km} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}}{r} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Уравнения (2.7), (3.3), (3.4) образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $\varepsilon_r, \varepsilon_{\varphi}, \varepsilon_{r\varphi}$.

Граничные условия на осях закрепления с валом и наружных контурах формируются в виде традиционных кинематических условий (например, жесткое соединение с деформируемым валом и распределенных погонных нагрузок).

Кроме того, должны быть сформулированы дополнительные формальные ограничения по условиям эксплуатации и заданные возможные изменения контуров и модифицированных границ поверхности.

В общих чертах такие громоздкие выражения мы приводить не будем, их необходимо рассматривать при решении конкретных задач.

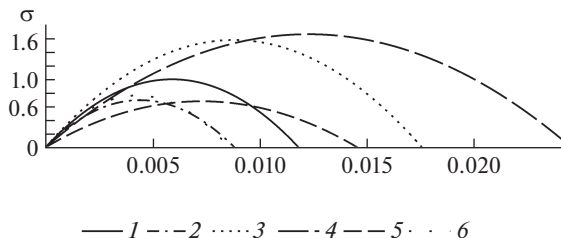


Рис. 2

4. Анализ результатов и примеры. В качестве примера рассмотрим двухслойный диск в случае осесимметрической задачи. В этом случае все величины и условия на границах r_0 и r_1 не зависят от φ . Тогда, очевидно, $u = u(r)$, $v = 0$.

Идеальный двухслойный диск имеет постоянные толщины Δ_k^0 и Δ_m^0 . Массы расходуемых материалов слоев

$$M_k^0 = 4\pi\rho_k(r_1^2 - r_0^2)\Delta_k^0 = \text{const}, \quad M_m^0 = 4\pi\rho_m(r_1^2 - r_0^2)\Delta_m^0 = \text{const} \quad (4.1)$$

Пусть некачественное изготовление реализуется вследствие некачественного профилирования слоев.

Тогда затрачиваемые массы материалов слоев будут равны

$$M_k = 4\pi\rho_k \int_{r_0}^{r_1} \Psi_k(r) r dr = M_k^0, \quad M_m = 4\pi\rho_m \int_{r_0}^{r_1} (\Psi_m(r) - \Psi_k(r)) r dr = M_m^0 \quad (4.2)$$

Усилия в диске определяются через напряжения по формулам

$$\begin{aligned} N_r &= 2\pi r (\sigma_{rk}(r)\Delta_k(r) + \sigma_{rm}(r)\Delta_m(r)) \\ N_\varphi &= 2\pi r (\sigma_{\varphi k}(r)\Delta_k(r) + \sigma_{\varphi m}(r)\Delta_m(r)), \quad N_{r\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Связь деформаций ε_r , ε_φ с радиальным перемещением $u(r)$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad (4.4)$$

Условие совместности деформаций

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\varphi) = \varepsilon_r \quad (4.5)$$

Материал считаем несжимаемым, тогда

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\varphi \quad (4.6)$$

Тогда из (4.5) получаем

$$r \frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} = -\varepsilon_\varphi, \quad \frac{d\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_\varphi} = -\frac{dr}{r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{C}{r^2} \quad (4.7)$$

Квадрат интенсивности деформаций

$$\varepsilon_i^2 = \frac{4}{9}(\varepsilon_\varphi^2 - \varepsilon_\varphi\varepsilon_r + \varepsilon_r^2) = \beta^2\varepsilon_\varphi^2, \quad \varepsilon_i = \beta\varepsilon_\varphi \quad (4.8)$$

Из (4.8) получим

$$\varepsilon_r = -\beta\varepsilon_\varphi \quad (4.9)$$

В этом случае для напряжений в слоях получаем выражения

$$\sigma_{rk} = -\frac{2}{3}\beta(A_k + \beta B_k\varepsilon_\varphi)\varepsilon_\varphi, \quad \sigma_{rm} = -\frac{2}{3}\beta(A_m + \beta B_m\varepsilon_\varphi)\varepsilon_\varphi \quad (4.10)$$

$$\sigma_{\varphi k} = \frac{2}{3}\beta(A_k + \beta B_k\varepsilon_\varphi)\varepsilon_\varphi, \quad \sigma_{\varphi m} = \frac{2}{3}\beta(A_m + \beta B_m\varepsilon_\varphi)\varepsilon_\varphi \quad (4.11)$$

Усилия N_r , N_φ будут равны

$$\begin{aligned} N_r &= -\frac{4}{3}\pi r\beta \left((A_k + \beta B_k \varepsilon_\varphi) \int_0^{\Psi_k(r)} dz + (A_m + \beta B_m \varepsilon_\varphi) \int_{\Psi_k(r)}^{\Psi_m(r)} dz \right) \varepsilon_\varphi = \\ &= -\frac{4}{3}\pi r\beta \left((A_k + \beta B_k \varepsilon_\varphi) \Psi_k(r) + (A_m + \beta B_m \varepsilon_\varphi) (\Psi_m(r) - \Psi_k(r)) \right) \varepsilon_\varphi \\ N_\varphi &= \frac{4}{3}\pi r\beta \left((A_k + \beta B_k \varepsilon_\varphi) \Psi_k(r) + (A_m + \beta B_m \varepsilon_\varphi) (\Psi_m(r) - \Psi_k(r)) \right) \varepsilon_\varphi \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом получим равенство

$$N_\varphi = -N_r \quad (4.13)$$

Уравнения равновесия примут вид

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{2}{r} N_r = -M\Omega^2 r$$

откуда получим

$$N_r = C_1 e^{-\int_r^2 dr} + \int (-M\Omega^2 r) e^{\int_r^2 dr} dr = \frac{C_1}{r^2} - \frac{1}{4} M\Omega^2 r^4 \quad (4.14)$$

Граничное условие для уравнения (4.14) можно взять в виде

$$N_r(r_1) = k\Omega^2 \quad (4.15)$$

Тогда (4.14) примет вид

$$N_r = \frac{1}{4}\Omega^2 \left(\frac{r_1^2}{r^2} (4k + Mr_1^4) - Mr^4 \right) \quad (4.16)$$

Решая совместно уравнения (4.12), (4.16) получим

$$\varepsilon_\varphi^2 + 2\lambda_1(r)\varepsilon_\varphi + \lambda_2(r) = 0 \quad (4.17)$$

где

$$\lambda_1(r) = \frac{1}{2\lambda(r)} (A_k \Psi_k(r) + A_m (\Psi_m(r) - \Psi_k(r)))$$

$$\lambda_2(r) = \frac{3}{16\pi r\beta\lambda(r)} \Omega^2 \left(\frac{r_1^2}{r^2} (4k^2 + Mr_1^4) - Mr^4 \right)$$

$$\lambda(r) = B_k \beta \Psi_k(r) + \beta B_m (\Psi_m(r) - \Psi_k(r))$$

Уравнение (4.17) имеет решение

$$\varepsilon_\varphi = -\lambda_1(r) \pm \sqrt{\lambda_1^2(r) - \lambda_2(r)} \quad (4.18)$$

При выборе знака в (4.18) следует учитывать, что $\varepsilon_\varphi > 0$. Физические параметры диска должны быть таковыми, чтобы выполнялось условие для всех $r_0 \leq r \leq r_1$ и $\Omega > 0$ условие $\lambda_1^2(r) - \lambda_2(r) > 0$.

Критические значения r^* и угловой скорости Ω при котором диск теряет устойчивость будем искать из решения системы уравнений

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} = 0, \quad \frac{d^2\varepsilon_\varphi}{dr^2} = 0, \quad r_0 \leq r^* \leq r_1 \quad (4.19)$$



Рис. 3

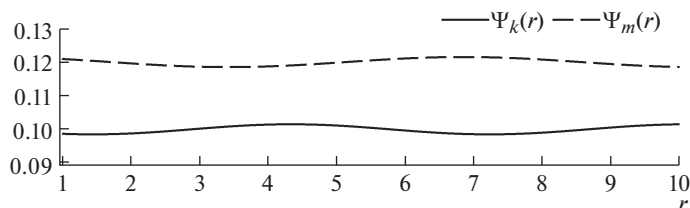


Рис. 4

Положим для границ каждого из слоев

$$\Psi_k(r) = \Delta_k^0 + \delta_1 \Psi_{1k}(r), \quad \Psi_m(r) = \Delta_m^0 + \delta_1 \Psi_{1m}(r) \quad (4.20)$$

Из предположения постоянства масс для идеального диска и диска границы слоев, которого заданы уравнениями (4.20), имеем выражения которым должны удовлетворять функции $\Psi_{1k}(r)$, $\Psi_{1m}(r)$

$$\int_{r_0}^{r_1} r \Psi_{1k}(r) dr = 0, \quad \int_{r_0}^{r_1} r \Psi_{1m}(r) dr = 0 \quad (4.21)$$

Положим

$$\Psi_k(r) = \sin(\psi_k r), \quad \Psi_m(r) = \cos(\psi_m r) \quad (4.22)$$

где значения ψ_k, ψ_m подобраны таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения (4.21).

Если принять значения физических параметров диска равными

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 10, \quad \Delta_k^0 = 0.1, \quad \Delta_m^0 = 0.12, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0.001 \quad (4.23)$$

тогда уравнения границ примет вид изображенный на рис. 4.

Результаты расчета критических значений r^* и угловой скорости Ω^* по соотношениям (4.19) при заданных материалах слоя и параметрах (4.23) приведены в табл. 2.

5. Заключение. В данной работе для вращающихся тонких биметаллических дисков приведены основные соотношения для исследования критических деформированных состояний, возникающих вследствие малых технологических отклонений изготовления полотна либо контурных форм. Для осесимметричных состояний проведены детальные расчеты влияния структуры материалов, степени и формы технологических вариаций отклонений от заданного идеального проекта на уровень критических скоростей вращения диска и перемещения внешних контуров. Сравнительный анализ проведенных расчетов показывает возможность широкого диапазона улучшения экс-

Таблица 2

№	Материал k -го слоя	Материал m -го слоя	Ψ_k	Ψ_m	δ_1	δ_2	r^*	Ω^*	$u(\eta)$
1	никель	титан	-1.09	-0.92	0.001	0.001	6.09	0.00033	0.077
2	титан	никель	-1.09	-0.92	0.001	0.001	3.32	0.00018	0.107
3	никель	титан	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	6.13	0.00039	0.077
4	титан	никель	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	3.40	0.00022	0.107
5	никель	титан	-1.09	-0.92	0.001	0.0015	6.05	0.00036	0.077
6	титан	никель	-1.09	-0.92	0.001	0.0015	3.24	0.00019	0.107
7	15Г	40Г	-1.09	-0.92	0.001	0.001	6.09	0.00035	0.080
8	40Г	15Г	-1.09	-0.92	0.001	0.001	3.32	0.00011	0.097
9	15Г	40Г	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	6.13	0.00040	0.080
10	40Г	15Г	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	3.40	0.00013	0.098
11	15Г	40Г	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	6.05	0.00038	0.080
12	40Г	15Г	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	3.24	0.00011	0.098
13	15Г	титан	-1.09	-0.92	0.001	0.001	6.09	0.00035	0.0793
14	титан	15Г	-1.09	-0.92	0.001	0.001	3.32	0.00017	0.109
15	15Г	титан	-1.09	-0.92	0.001	0.0015	6.05	0.00037	0.079
16	титан	15Г	-1.09	-0.92	0.001	0.0015	3.23	0.00018	0.110
17	15Г	титан	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	6.13	0.00040	0.079
18	титан	15Г	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	3.40	0.00021	0.110
19	15Г	ЭП-202	-1.09	-0.92	0.001	0.001	6.09	0.00053	0.083
20	ЭП-202	15Г	-1.09	-0.92	0.001	0.001	3.32	0.00020	0.134
21	15Г	ЭП-202	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	6.13	0.00062	0.083
22	ЭП-202	15Г	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	3.40	0.00024	0.134
23	15Г	ЭП-202	-1.09	-0.92	0.001	0.0015	6.05	0.00057	0.083
24	ЭП-202	15Г	-1.09	-0.92	0.001	0.0015	3.24	0.00020	0.134
25	ЭП-33	ЭП-202	-1.09	-0.92	0.001	0.001	3.32	0.00016	0.197
26	ЭП-202	ЭП-33	-1.09	-0.92	0.001	0.001	6.09	0.00046	0.157
27	ЭП-33	ЭП-202	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	3.40	0.00020	0.198
28	ЭП-202	ЭП-33	-1.09	-0.92	0.0015	0.001	6.13	0.00054	0.157
29	ЭП-33	ЭП-202	-1.09	-0.92	0.001	0.0015	3.24	0.00017	0.198
30	ЭП-202	ЭП-33	-1.09	-0.92	0.001	0.0015	6.05	0.00050	0.157
31	ЭП-33	ЭП-202	2.05	1.89	0.001	0.001	6.64	0.00062	0.196
32	ЭП-202	ЭП-33	2.05	1.89	0.001	0.001	5.16	0.00032	0.158
33	ЭП-33	ЭП-202	2.05	1.89	0.0015	0.001	3.57	0.00028	0.196
34	ЭП-202	ЭП-33	2.05	1.89	0.0015	0.001	2.14	0.00007	0.158
35	ЭП-33	ЭП-202	2.05	1.89	0.001	0.0015	1.01	0.00002	0.196
36	ЭП-202	ЭП-33	2.05	1.89	0.001	0.0015	2.38	0.00008	0.158
37	никель	титан	2.05	1.89	0.001	0.001	2.25	0.00005	0.077
38	титан	никель	2.05	1.89	0.001	0.001	3.70	0.00028	0.106
39	никель	титан	2.05	1.89	0.0015	0.001	2.14	0.00005	0.077
40	титан	никель	2.05	1.89	0.0015	0.001	3.57	0.00031	0.106
41	никель	титан	2.05	1.89	0.001	0.0015	5.40	0.00026	0.077

Таблица 2. Окончание

№	Материал k -го слоя	Материал m -го слоя	Ψ_k	Ψ_m	δ_1	δ_2	r^*	Ω^*	$u(r_1)$
42	титан	никель	2.05	1.89	0.001	0.0015	1.01	0.00002	0.105
43	15Г	титан	2.05	1.89	0.001	0.001	5.16	0.00024	0.080
44	титан	15Г	2.05	1.89	0.001	0.001	3.70	0.00027	0.108
45	15Г	титан	2.05	1.89	0.0015	0.001	2.14	0.00005	0.080
46	титан	15Г	2.05	1.89	0.0015	0.001	3.57	0.00030	0.109
47	15Г	титан	2.05	1.89	0.001	0.0015	5.40	0.00028	0.080
48	титан	15Г	2.05	1.89	0.001	0.0015	1.01	0.00002	0.108
49	ЭП-202	никель	2.05	1.89	0.001	0.001	6.64	0.00031	0.149
50	ЭП-202	титан	2.05	1.89	0.001	0.001	6.64	0.00079	0.130
51	ЭП-202	ЭП-33	3.92	4.09	0.001	0.001	1.14	0.00003	0.157
52	ЭП-33	ЭП-202	3.92	4.09	0.001	0.001	1.88	0.00012	0.197
53	никель	титан	3.92	4.09	0.001	0.001	1.14	0.00002	0.077
54	титан	никель	3.92	4.09	0.001	0.001	1.88	0.00013	0.107
55	15Г	40Г	3.92	4.09	0.001	0.001	1.14	0.00002	0.080
56	40Г	15Г	3.92	4.09	0.001	0.001	1.88	0.00008	0.098
57	ЭП-202	никель	3.92	4.09	0.001	0.001	1.88	0.00015	0.131
58	никель	ЭП-202	3.92	4.09	0.001	0.001	1.14	0.00003	0.081

платационных качеств при создании направленных несущественных технологических отклонений.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Calladine C.R. Plasticity for Engineers: Theory and Applications. Woodhead Publishing, 2000. 328 p.
3. Durban D., Birman V. Elasto-plastic analysis of an anisotropic rotating disc // Acta Mechanica. 1983. V. 49. P. 1–10
4. Szuwalski K. Decohesive carrying capacity in perfect and asymptotically perfect plasticity (survey) // Mech. Theor. Stos. 1990. № 28. P. 243–253.
5. Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзене Й.Р. Влияние зависимости условия текучести от среднего напряжения на распределение напряжений во вращающемся диске // Доклады академии наук. 2010. Т. 435. № 5. С. 610–612.
6. Артемов М.А., Якубенко А.П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. 2014. № 1. С. 30–38.
7. Alexandrova N.N., Artemov M.A., Baranovskiy E.S., Shashkin A.I. О Напряженном и деформированном состоянии вращающегося диска // Актуальные пробл. прикл. матем., информ. и механики сб. трудов Международной научной конференции. 2019. С. 1006–1011.
8. Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. О потери устойчивости вращающихся дисков // Известия АН СССР. Отд. техн. наук. 1958. № 1. С. 124–125.
9. Lila D.M., Martynuk A.A. Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // Applied Mathematics. 2011. № 2. P. 579–585.
10. Лила Д.М. Механизм потери устойчивости вращающегося составного плоского кругового диска // Матем. методы и физ.-механ. поля. 2012. Т. 55. № 3. С. 111–120.

11. *Лила Д.М.* О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кольцевого диска // Матем. методы и физ.-механ. поля. 2013. Т. 56. № 3. С. 81–94.
12. *Лила Д.М.* Второе приближение по малому параметру к решению задачи об упругопластической неустойчивости вращающегося диска // Доклады НАН Украины. 2018. № 5. С. 36–43.
13. *Alexandrova N.* Exact deformation analysis of a solid rotating elastic-perfectly plastic disk // Int. Journal of Mech. Science. 2014. V. 60. P. 55–60.
14. *Немировский Ю.В., Тихонов С.В.* Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник ПНИПУ. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.
15. *Немировский Ю.В.* Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2018. № 3 (37). С. 26–37
16. Марочник сталей и сплавов. 2-е изд. доп. и испр. / *А.С. Зубченко, М.М. Колосков, Ю.В. Каширский и др.* Под общ. ред. А.С. Зубченко. М.: Маш., 2003. 784 с.
17. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.