

УДК 531.36, 531.38

## КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МНОГОТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ. 2

© 2021 г. Б. И. Коносеви<sup>а,\*</sup>, Ю. Б. Коносеви<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина

\*e-mail: konos.donetsk@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2019 г.

После доработки 22.05.2019 г.

Принята к публикации 06.06.2019 г.

Данная статья является второй частью работы, опубликованной в виде двух статей. Рассмотрен оставшийся неизученным в первой части случай, когда при невозмущенном значении постоянной циклического интеграла механическая приведенная потенциальная энергия является постоянной по отношению к внутреннему карданову углу. Доказано, что в этом случае для большинства конструкций прибора имеет место неустойчивость всех стационарных решений уравнений движения. Из полученных результатов следует, что для большинства конструкций прибора наличие изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного решения уравнений движения.

*Ключевые слова:* гироскоп в кардановом подвесе, стационарное движение, синхронный электромотор, устойчивость по Ляпунову, приведенная потенциальная энергия, принцип инвариантности Ла-Салля

DOI: 10.31857/S0572329921010062

**Введение.** В настоящей статье продолжено начатое в [1] исследование устойчивости стационарных решений уравнений многотоковой модели гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электромотором синхронного типа, который поддерживает вращение гироскопа (ротора) при наличии момента сил трения относительно его оси. При этом трение на осях карданова подвеса предполагается отсутствующим, а наружная ось подвеса — вертикальной. Рассмотрен оставшийся неизученным в [1] случай  $D$ , когда при невозмущенном значении  $p = \tilde{p}$  постоянной циклического интеграла механическая приведенная потенциальная энергия  $U_*(p, \beta)$  постоянна по отношению к углу  $\beta$  поворота внутренней “рамки” карданова подвеса. Случай  $D$  имеет место при выполнении указанных в лемме 1 [1] условий  $D_1, D_2$  на параметры прибора.

Статья состоит из трех разделов. В разделе 3 даны основные теоремы о неустойчивости стационарных решений при условиях  $D_1, D_2$ . Для их доказательства используются установленные в разделе 2 нелокальные свойства решений возмущенной приведенной системы  $S_p$  при малых по модулю возмущениях  $p - \tilde{p}$  интегральной постоянной  $p$ . Вывод указанных нелокальных свойств основан на приведенных в разделе 1 принципе инвариантности Ла-Салля, леммах о неограниченности и ограниченности решений и леммах о структуре множества стационарных решений при условиях  $D_1, D_2$ .

**1. Принцип Ла-Салля и леммы о свойствах решений приведенной системы при условиях  $D_1, D_2$ .** 1.1. *Теорема Ла-Салля.* Принцип Ла-Салля используется в данной статье в виде теоремы VIII из книги [2], которая следующим образом формулируется применительно к отдельно взятому решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

*Теорема 1.* Пусть задана автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Z(z) \tag{1.1}$$

где  $z \in R^n$ , функция  $Z : R^n \rightarrow R^n$  – непрерывно дифференцируема. Пусть  $V : R^n \rightarrow R$  – непрерывно дифференцируемая функция, производная которой по времени в силу системы (1.1) удовлетворяет условию

$$\dot{V}(z) \leq 0, \quad z \in R^n \tag{1.2}$$

Обозначим через  $M$  максимальное инвариантное множество, образованное фазовыми траекториями непродолжаемых влево и вправо решений  $z(t)$  системы (1.1), для которых  $\dot{V}(z(t)) = 0$  при всех  $t$  из максимального интервала их существования.

Пусть для решения  $z(t), t \in [0, \infty)$ , системы (1.1) выполнены условия:

- (а) функция  $V(z(t))$  ограничена снизу при всех  $t \in [0, \infty)$ ;
- (б) решение  $z(t)$  ограничено на полуоси  $[0, \infty)$ .

Тогда решение  $z(t)$  неограниченно приближается к  $M$  при  $t \rightarrow \infty$ .

1.2. *Леммы о неограниченности и ограниченности решений.* В этом пункте доказаны леммы 2, 3 о свойствах решений приведенной системы, которые используются далее. Предварительно устанавливается следующий результат, на который опирается доказательство леммы 2.

*Лемма 1.* Пусть задана автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1), где  $z \in R^n$ , а функция  $Z : R^n \rightarrow R^n$  непрерывна. Если для решения  $z(t)$  этой системы его максимальный правый интервал существования  $[0, \tau)$  конечен, то решение  $z(t)$  неограниченно на этом интервале.

*Доказательство.* Допустим, что утверждение леммы 1 неверно, то есть решение  $z(t)$  ограничено на промежутке  $[0, \tau)$ . В таком случае существует ограниченная область  $D$  такая, что  $z(t) \in D$  при всех  $t \in [0, \tau)$ .

Пусть последовательность моментов времени  $t_n \in [0, \tau)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) стремится к  $\tau$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда соответствующее ограниченное множество точек  $z(t_n) \in D$  имеет точку сгущения  $z^*$ , принадлежащую замыканию  $\bar{D}$  области  $D$ . Поэтому последовательность  $t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) содержит подпоследовательность  $t_{n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) такую, что  $t_{n_k} \rightarrow \tau$  при  $k \rightarrow \infty$ , и последовательность  $z(t_{n_k})$  имеет предел  $z^*$  при  $k \rightarrow \infty$ . Существование предела означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $k(\varepsilon)$  такой, что

$$\|z(t_{n_k}) - z^*\| < \varepsilon \quad \text{для всех } k \geq k(\varepsilon) \tag{1.3}$$

Однако конечный предел функции  $z(t)$  при  $t \rightarrow \tau$  не существует, так как в случае его существования решение  $z(t)$  можно продолжить для значений  $t > \tau$ , воспользовавшись непрерывностью функции  $Z(z)$ . Несуществование такого предела означает следующее:

$$(\forall z^* \in R^n)(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta \in (0, \tau))(\exists t \in (\tau - \delta, \tau)) \quad \|z(t) - z^*\| \geq \varepsilon_0 \tag{1.4}$$

С учетом того, что здесь  $\delta$  – любое значение из интервала  $[0, \tau)$ , рассмотрим какую-нибудь последовательность  $\delta_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) значений  $\delta$ , стремящуюся к 0 при

$k \rightarrow \infty$  и удовлетворяющую условию  $\delta_k < \tau$ . Из (1.4) следует, что для каждого  $\delta_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) существует момент времени  $t_k \in (\tau - \delta_k, \tau)$ , когда

$$\|z(t_k) - z^*\| \geq \varepsilon_0 \quad (1.5)$$

Пользуясь имеющимся произволом в выборе  $\delta_k \in (0, \tau)$ , полагаем  $\delta_k = \tau - t_{n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), здесь величины  $t_{n_k}$  определены выше. Тогда

$$t_k - t_{n_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (1.6)$$

Выбираем  $\varepsilon = \varepsilon_0/2$  в (1.3), и тогда при всех  $k > k(\varepsilon_0/2)$  из (1.3), (1.5) следует, что

$$\|z(t_k) - z(t_{n_k})\| \geq \|z(t_k) - z^*\| - \|z(t_{n_k}) - z^*\| \geq \varepsilon_0/2 \quad (1.7)$$

С другой стороны, согласно (1.1) имеем

$$z(t_k) = z(0) + \int_0^{t_k} Z(z(\sigma))d\sigma, \quad z(t_{n_k}) = z(0) + \int_0^{t_{n_k}} Z(z(\sigma))d\sigma$$

и поэтому

$$z(t_k) - z(t_{n_k}) = \int_{t_{n_k}}^{t_k} Z(z(\sigma))d\sigma \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

Но, по предположению,  $z(t)$  при всех  $t \in [0, \tau)$  принадлежит ограниченной области  $D$ . Функция  $Z(z)$  непрерывна на замыкании  $\bar{D}$  этой области, и, следовательно, норма функции  $Z(z)$  имеет в  $\bar{D}$  конечный максимум  $Z_{\max}$ . Поэтому подынтегральная функция в (1.8) ограничена по норме величиной  $Z_{\max}$ . В таком случае из (1.8) получаем неравенство

$$\|z(t_k) - z(t_{n_k})\| \leq |t_k - t_{n_k}| Z_{\max} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Тогда, при учете (1.6), имеем  $\|z(t_k) - z(t_{n_k})\| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), что противоречит (1.7). Лемма 1 доказана.

С целью сокращения записи далее используются введенные в (1.10, [1]) обозначения  $y, z_p$  для фазовых векторов преобразованной системы (1.9, [1]) и приведенной системы  $S_p$ :

$$y = (p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}), \quad z_p = (\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$$

*Лемма 2.* Пусть для решения  $z_p(t)$  приведенной системы  $S_p$  его правый максимальный интервал существования  $J_p^+ = [0, \tau_p)$  конечен, то есть  $0 < \tau_p < \infty$ . Тогда хотя бы одна из угловых переменных  $\beta, \gamma$  в этом решении неограниченна по модулю при  $t \rightarrow \tau_p$ .

*Доказательство.* Поскольку решение  $z_p(t)$  существует лишь на конечном промежутке времени  $J_p^+ = [0, \tau_p)$ , то, по лемме 1, его норма  $\|z_p(t)\|$  неограниченна на этом промежутке. Значит, модуль хотя бы одной из компонент фазового вектора системы  $S_p$  в этом решении неограничен при  $t \rightarrow \tau_p$ . В случае, когда такой компонентой является  $\beta$  или  $\gamma$ , утверждение леммы 2 выполнено.

Рассмотрим случай, когда неограниченным при  $t \rightarrow \tau_p$  является модуль одной из отличных от  $\beta, \gamma$  компонент  $\dot{\beta}, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$  фазового вектора. В таком случае, согласно определениям (1.31, 1.26, [1]) функций  $T_*, T_1$ , хотя бы одна из этих функций принима-

ет на рассматриваемом решении сколь угодно большие положительные значения при  $t \rightarrow \tau_p$ .

Функция  $E_3$ , определенная формулой (1.30, [1]), имеет знакпостоянную отрицательную производную (1.32, [1]) по  $t$ . Поэтому на решении  $z_p(t)$  функция  $E_3$  ограничена сверху своим начальным значением. При сколь угодно больших положительных значениях одной из функций  $T_*$ ,  $T_1$ , это возможно только в случае, когда член  $c_0\gamma$  в выражении (1.19, [1]) функции  $U_1$ , входящей в определение (1.30, [1]) функции  $E_3$ , принимает сколь угодно большие по модулю отрицательные значения при  $t \rightarrow \tau_p$ , то есть когда переменная  $\gamma$  неограниченна снизу при  $t \rightarrow \tau_p$ . Лемма 2 доказана.

*Лемма 3.* Пусть в решении  $z_p(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , приведенной системы  $S_p$  его компонента  $\gamma(t)$  ограничена при  $t \in [0, \infty)$ . Тогда в этом решении все его компоненты ограничены при  $t \in [0, \infty)$ , если угловая переменная  $\beta$  рассматривается как точка окружности единичного радиуса.

*Доказательство.* Поскольку в решении  $z_p(t)$  функция  $\gamma(t)$  ограничена по предположению, здесь следует установить ограниченность всех остальных компонент фазового вектора при  $t \in [0, \infty)$ .

Ограниченность функции  $\gamma(t)$  означает, в частности, ее ограниченность снизу. Поэтому среди точек  $\gamma_{1s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) локального минимума функции  $U_1(\gamma)$ , определенных в (1.15, 1.16, [1]), существует точка  $\gamma_{1s_0}$  с некоторым номером  $s_0$  такая, что  $\gamma(t) \geq \gamma_{1s_0}$  при всех  $t \in [0, \infty)$ . Тогда из формулы (1.19, [1]), определяющей функцию  $U_1(\gamma)$ , следует, что точка  $\gamma_{1s_0}$  является точкой минимума этой функции на всей полуоси  $\gamma \geq \gamma_{1s_0}$ . Значит, для определенной в (1.35, [1]) функции  $\Delta U_1(\gamma)$  на рассматриваемом решении выполнено неравенство  $\Delta U_1(\gamma) \geq 0$ .

Механическая приведенная потенциальная энергия (1.18, [1]) является, при учете (1.2, 1.3, [1]), непрерывной  $2\pi$ -периодической функцией  $U_*(p, \beta)$  переменной  $\beta$ . Следовательно, для определенной в (1.35, [1]) функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  при всех  $\beta$  выполнено неравенство  $\Delta U_*(p, \beta) \geq 0$ .

Рассмотрим функцию  $V_p$ , определенную в (1.34, [1]). Она имеет знакпостоянную отрицательную производную (1.36, [1]) по  $t$  в силу системы  $S_p$ . Поэтому на решении  $z_p(t)$  функция  $V_p$  не превосходит своего начального значения  $V_{p0}$ , то есть фазовые переменные в этом решении принадлежат множеству

$$\{(\beta, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) : T_*(\beta, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \Delta U_*(p, \beta) + \Delta U_1(\gamma) \leq V_{p0}\} \quad (1.9)$$

Как было отмечено в п. 1.4 [1], функция  $T_*$ , определенная формулой (1.31, [1]), при любом  $\beta$  является определено положительной квадратичной формой переменных  $\beta, \dot{\gamma}$ . Функция  $T_1$ , определенная формулой (1.26, [1]), является определено положительной квадратичной формой переменных  $x, i_1, \dots, i_{n_2}$ . Функции  $\Delta U_1(\gamma)$  и  $\Delta U_*(p, \beta)$ , как отмечено выше, неотрицательны. Поскольку все функции  $T_*$ ,  $T_1$ ,  $\Delta U_*$ ,  $\Delta U_1$  неотрицательны на решении  $z_p(t)$ , то  $V_{p0} \geq 0$ , и тогда из (1.9) следуют четыре неравенства

$$T_*(\beta, \dot{\gamma}, \beta) \leq v_{p0}, \quad T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq v_{p0}, \quad \Delta V_*(p, \beta) \leq V_{p0}, \quad \Delta U_1(\gamma) \leq V_{p0} \quad (1.10)$$

Снова воспользуемся тем, что функция  $T_*$  является определенно положительной квадратичной формой переменных  $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$  с непрерывными  $2\pi$ -периодическими по  $\beta$  коэффициентами, а функция  $T_1$  является определенно положительной по переменным  $x, i_1, \dots, i_{n_2}$ . Тогда из двух первых неравенств (1.10) следует, что на рассматриваемом решении  $z_p(t)$  выполняются неравенства

$$\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 \leq \rho_1^2 \quad (\rho_1 \geq 0), \quad x^2 + i_1^2 + \dots + i_{n_2}^2 \leq \rho_2^2 \quad (\rho_2 \geq 0)$$

Тем самым установлена ограниченность решения  $z_p(t)$  по переменным  $\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ . Угловая переменная  $\beta$  также ограничена, если, следуя [3], рассматривать ее изменение на окружности единичного радиуса.

1.3. Структура множества стационарных решений при условиях  $D_1, D_2$ . Если выполнены условия  $D_1$  или  $D_2$ , установленные в лемме 1 [1], то  $U_*(\tilde{p}, \beta) \equiv \text{const}$  тождественно по  $\beta$ , и преобразованная система (1.9, [1]) имеет стационарное решение

$$p = \tilde{p}, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \tilde{\beta}^0, \quad \gamma = \tilde{\gamma}^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0 \quad (1.11)$$

при  $\beta = \tilde{\beta}^0$  любом и  $\gamma = \tilde{\gamma}^0$ , равном одному из значений, указанных в (1.15, [1]). Решению (1.11) соответствует решение

$$\dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \tilde{\beta}^0, \quad \gamma = \tilde{\gamma}^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0 \quad (1.12)$$

приведенной системы  $S_{\tilde{p}}$ , в котором  $\tilde{\beta}^0$  – любое, а  $\tilde{\gamma}^0$  равно одному из значений (1.15, [1]).

Чтобы изучить вопрос об устойчивости стационарного решения (1.11), с помощью теоремы Ла-Салля 1 проводится анализ нелокального поведения решений возмущенной приведенной системы  $S_p$ , соответствующей ненулевому возмущению  $p - \tilde{p}$  постоянной  $p$ . Нелокальное поведение таких решений тесно связано со структурой множества стационарных решений системы  $S_p$ . Структура этого множества при условиях  $D_1, D_2$  установлена в леммах 4, 5.

*Лемма 4.* Пусть  $c_0/b_0 < 1$ , и выполнены условия  $D_1, D_2$ , указанные в лемме 1 [1]. Пусть величины  $\delta p_1, \delta p_2$  и  $\beta_{1n}, \beta_{2n}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) определены формулами

$$\delta p_1 = - \left| \frac{\tilde{p} - \omega q}{g_1} \right| (|g_1| + 4|g_4|), \quad \delta p_2 = \left| \frac{\tilde{p} - \omega q}{g_1} \right| (|g_1| - 4|g_4|) \quad (1.13)$$

$$\beta_{1n} = 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \quad \beta_{2n} = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.14)$$

где  $\tilde{p}$  выражается по формуле (1.21, [1]), а величины  $\gamma_{1s}, \gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) определены формулами (1.15, 1.16, [1]).

Тогда

1)  $\delta p_1 < 0, \delta p_2 > 0$ ;

2) при положительных возмущениях  $\delta p = p - \tilde{p} \in (0, \delta p_2)$  периодическая по  $\beta$  функция  $U_*(p, \beta)$ , определенная формулой (1.22, [1]), имеет локальные минимумы в точках  $\beta_{2n}$  и локальные максимумы в точках  $\beta_{1n}$ , при отрицательных возмущениях  $\delta p \in (\delta p_1, 0)$  функция  $U_*(p, \beta)$ , наоборот, имеет локальные минимумы в точках  $\beta_{1n}$  и локальные максимумы в точках  $\beta_{2n}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), на интервалах между точками локальных минимумов и максимумов функция  $U_*(p, \beta)$  является строго монотонной;

3) функция  $U_1(\gamma)$ , определенная формулой (1.19, [1]), имеет локальные минимумы в точках  $\gamma_{1s}$  и локальные максимумы в точках  $\gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), на интервалах между точками локальных минимумов и максимумов эта функция строго монотонна;

4) при  $\delta p \in (\delta p_1, \delta p_2)$ ,  $\delta p \neq 0$ , множество стационарных решений приведенной системы  $S_p$  состоит из точек

$$\beta = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0 \quad (1.15)$$

где  $\beta^0$  – одно из значений  $\beta_{1n}, \beta_{2n}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), а  $\gamma^0$  – одно из значений  $\gamma_{1s}, \gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

*Доказательство.* При условиях  $D_1$  величина  $\tilde{p}$  определена формулой (1.21, [1]), согласно которой  $(\tilde{p} - \omega q_0)g_1 = -2\omega q_1(g_0 + g_4)$ . Правая часть здесь отрицательна, так как  $\omega, q_1 > 0$  по постановке задачи, а  $g_0 + g_4 > 0$  по лемме 1 [1]. Следовательно, величина  $\tilde{p} - \omega q_0$  отлична от нуля вместе с  $g_1$ , и эти две величины имеют разные знаки. Кроме того,  $g_4 < 0$  при условиях  $D_1$  согласно лемме 1 [1]. Поэтому имеем

$$\frac{\tilde{p} - \omega q_0}{g_1} = - \left| \frac{\tilde{p} - \omega q_0}{g_1} \right|, \quad g_4 = -|g_4| \quad (1.16)$$

Тогда из формул (1.13) и неравенства  $|(\tilde{p} - \omega q_0)/g_1| > 0$  с учетом установленного в лемме 1 [1] неравенства  $|g_1| > 4|g_4|$  следует утверждение 1 леммы 4.

Функция  $U_*(p, \beta)$  при условиях  $D_1$  выражается по формуле (1.22, [1]). Производная этой функции по  $\beta$  равна

$$U'_*(p, \beta) = -32(p - \tilde{p})g_4^2 \frac{(p - \tilde{p})g_1 + (p^* - \omega q_0)(g_1 - 4g_4 \sin \beta)}{g_1(g_1 - 4g_4 \sin \beta)^3} \cos \beta$$

или, при учете (1.16),

$$U'_*(p, \beta) = (p - \tilde{p})F(p, \beta) \cos \beta \quad (1.17)$$

Здесь

$$F(p, \beta) = -32g_4^2 \frac{(p - \tilde{p}) - f(\beta)|(\tilde{p} - \omega q_0)/g_1|}{f^3(\beta)} \quad (1.18)$$

$$f(\beta) = g_1 + 4|g_4| \sin \beta$$

Рассмотрев по отдельности случаи  $g_1 > 0$  и  $g_1 < 0$ , устанавливаем, что если при  $g_1 > 0$  выполнено условие  $\delta p \in (0, \delta p_2)$ , а при  $g_1 < 0$  выполнено условие  $\delta p \in (\delta p_1, 0)$ , то для функции  $F(p, \beta)$ , определенной в (1.18), при всех  $\beta$  выполнено неравенство  $F(p, \beta) > 0$ . Поэтому из формулы (1.17) следует, что при  $g_1 \neq 0$  любого знака и  $\delta p \in (\delta p_1, \delta p_2)$ ,  $\delta p \neq 0$  производная  $U'_*(p, \beta)$  функции  $U_*(p, \beta)$  по  $\beta$  имеет такие же интервалы знакопостоянства и точки обращения в нуль, как функция  $(p - \tilde{p}) \cos \beta$ . Тогда сама функция  $U_*(p, \beta)$ , рассматриваемая как функция переменной  $\beta$ , имеет такие же интервалы монотонности и точки экстремума, как функция  $(p - \tilde{p}) \sin \beta$ , то есть график этой функции представляет собой деформированную синусоидальную кривую. Это означает справедливость утверждения 2 леммы 4.

Утверждение 3 следует при  $c_0/b_0 < 1$  из формулы (1.19, [1]) для  $U_1(\gamma)$ .

Утверждение 4 следует из утверждений 2, 3.

*Лемма 5.* Пусть выполнены условия  $D_2$ , указанные в лемме 1 [1]. Пусть  $c_0/b_0 < 1$ , величины  $\beta_{1n}, \beta_{2n}$  определены формулами (1.14), величины  $\gamma_{1s}, \gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) определены формулами (1.15, 1.16, [1]), а величина  $\tilde{p}$  выражается по формуле (1.23, [1]). Тогда

1) для любых возмущений  $\delta p = p - \tilde{p} \neq 0$  периодическая по  $\beta$  функция  $U_*(p, \beta)$ , определенная формулой (1.24, [1]), при  $g_1 > 0$  имеет локальные минимумы в точках  $\beta_{1n}$  и локальные максимумы в точках  $\beta_{2n}$ , а при  $g_1 < 0$  эта функция имеет локальные минимумы в точках  $\beta_{2n}$  и локальные максимумы в точках  $\beta_{1n}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), на интервалах между точками локальных минимумов и максимумов функция  $U_*(p, \beta)$  является строго монотонной;

2) функция  $U_1(\gamma)$ , определенная формулой (1.19, [1]), имеет локальные минимумы в точках  $\gamma_{1s}$  и локальные максимумы в точках  $\gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), на интервалах между точками локальных минимумов и максимумов эта функция строго монотонна;

3) при  $\delta p \neq 0$  множество стационарных решений приведенной системы  $S_p$  состоит из точек (1.15), где  $\beta^0$  — одно из значений  $\beta_{1n}, \beta_{2n}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), а  $\gamma^0$  — одно из значений  $\gamma_{1s}, \gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

*Доказательство.* При условиях  $D_2$  функция  $U_*(p, \beta)$  определена формулой (1.24, [1]). Производная этой функции по  $\beta$  равна

$$U'_*(p, \beta) = -(p - \tilde{p})^2 g_4^2 \frac{g_1 \cos \beta}{2(g_0 + g_1 \sin \beta)^2} \quad (1.19)$$

Согласно лемме 1 [1], при условиях  $D_2$  имеют место неравенства  $g_1 \neq 0, |g_0| > |g_1|$ , и поэтому  $g_0 + g_1 \sin \beta \neq 0$  при любом  $\beta$ . Следовательно, при любом  $\delta p = p - \tilde{p} \neq 0$  производная (1.19) функции  $U_*(p, \beta)$  по  $\beta$  имеет такие же интервалы знакопостоянства и точки обращения в нуль, как функция  $-g_1 \cos \beta$ . Тогда сама функция  $U_*(p, \beta)$  имеет такие же интервалы монотонности и точки экстремумов, как функция  $-g_1 \sin \beta$ . Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 следует при  $c_0/b_0 < 1$  из формулы (1.19, [1]) для  $U_1(\gamma)$ .

Утверждение 3 следует из утверждений 1, 2.

Леммы 4, 5 дают качественное описание зависимости функции  $U_*(p, \beta)$  от  $\beta$  при условиях  $D_1, D_2$  и позволяют изобразить при этих условиях поверхности  $U_* = U_*(p, \beta)$  и  $U_p = U_p(\beta, \gamma) = U_*(p, \beta) + U_1(\gamma)$ . Сечения поверхности  $U_*(p, \beta)$  плоскостями  $p = \text{const} \neq \tilde{p}$  представляют собой деформированные синусоидальные кривые. При условиях  $D_1$  точки минимумов и максимумов этих кривых меняются местами при изменении знака возмущения  $p - \tilde{p}$ , если это возмущение достаточно мало по модулю. При условиях  $D_2$  точки минимумов и максимумов не меняются местами при изменении знака  $p - \tilde{p}$ .

**2. Нелокальное поведение решений при условиях  $D_1, D_2$ .** Для исследования устойчивости стационарных решений вида (1.11), которые при условиях  $D_1, D_2$  и  $p = \tilde{p}$  существуют при всех  $\tilde{\beta}^0$ , воспользуемся нелокальными свойствами решений возмущенной приведенной системы  $S_p$  при ненулевых возмущениях  $\delta p = p - \tilde{p}$ . Такие свойства

установлены в следующей лемме для решений, определенных на бесконечном промежутке времени  $[0, \infty)$  и ограниченных по переменной  $\gamma$ .

*Лемма 6.* Пусть  $c_0/b_0 < 1$  и выполнены условия  $D_1$  или  $D_2$ , указанные в лемме 1 [1]. Пусть в случае выполнения условия  $D_1$  приведенная система  $S_p$  соответствует ненулевому возмущению  $\delta p = p - \tilde{p}$  из интервала  $(\delta p_1, \delta p_2)$ , где  $\delta p_1, \delta p_2$  определены в (1.13), а в случае выполнения условий  $D_2$  приведенная система  $S_p$  соответствует произвольному ненулевому возмущению  $\delta p = p - \tilde{p}$ . Если в решении  $z_p(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , такой системы  $S_p$  функция  $\gamma(t)$  ограничена по модулю при  $t \in [0, \infty)$ , то справедлива следующая альтернатива:

- 1) либо функция  $\beta(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , в этом решении неограниченна по модулю;
- 2) либо это решение при  $t \rightarrow \infty$  стремится к одной из стационарных точек системы  $S_p$ , указанных в леммах 4, 5 для случаев  $D_1, D_2$ .

*Доказательство* леммы 6 состоит из четырех частей, которые занумерованы римскими цифрами.

*I. Проверка выполнения условий теоремы 1.* Применим к системе  $S_p$  принцип Ла-Салля в формулировке теоремы 1, взяв в качестве функции  $V$  функцию  $V_p$ , определенную формулой (1.34, [1]). Производная этой функции по  $t$  в силу системы  $S_p$  выражается по формуле (1.36, [1]). При учете (1.4, [1]) отсюда следует, что в фазовом пространстве системы  $S_p$  выполнено условие (1.2) теоремы 1.

Функция  $\Delta U_1$ , определенная формулой (1.35, [1]), ограничена снизу на рассматриваемом решении  $z_p(t)$  системы  $S_p$ , поскольку функция  $\gamma(t)$  в этом решении ограничена снизу при  $t \geq 0$  по условию леммы 6. Остальные функции в правой части формулы (1.34, [1]) для  $V_p$  ограничены снизу во всем фазовом пространстве. Поэтому на решении  $z_p(t)$  для функции  $V_p$  выполнено условие (а) теоремы 1. В лемме 3 доказано, что из ограниченности решения приведенной системы по переменной  $\gamma$  следует его ограниченность по всем фазовым переменным, если рассматривать изменение  $\beta$  на окружности единичного радиуса. Тогда выполнено и условие (б) теоремы 1. Следовательно, по теореме 1, решение  $z_p(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно приближается к инвариантному множеству  $M_p$ .

*II. Геометрический анализ инвариантного множества  $M_p$ .* Множество  $M_p$  состоит здесь из фазовых траекторий непродолжаемых влево и вправо решений  $z_p(t)$  системы  $S_p$ , удовлетворяющих условию  $\dot{V}_p(z_p(t)) = 0$  для всех  $t$  из максимального интервала существования  $J_p$ . При учете формулы (1.36, [1]) для  $\dot{V}_p$  это означает, что множество  $M_p$  состоит из целых фазовых траекторий решений, удовлетворяющих условиям

$$\dot{\gamma}(t) = 0, \quad x(t) = 0, \quad i_1(t) = 0, \dots, \quad i_{n_2}(t) = 0, \quad t \in J_p$$

Таким образом,  $M_p$  состоит из фазовых траекторий непродолжаемых влево и вправо решений вида

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}(t), \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta(t), \quad \gamma = \gamma_0, \quad x = i_1 = \dots = i_{n_2} = 0 \quad (2.1)$$

где  $\gamma_0$  – некоторая постоянная величина.

В таких решениях функции  $\dot{\beta}(t), \beta(t)$  при всех  $t$  из максимального интервала существования  $J_p$  удовлетворяют соотношению

$$\dot{\beta}^2(t) \frac{G(\beta(t))H - N^2(\beta(t))}{2G(\beta(t))} + \Delta U_*(p, \beta(t)) = e \quad (2.2)$$

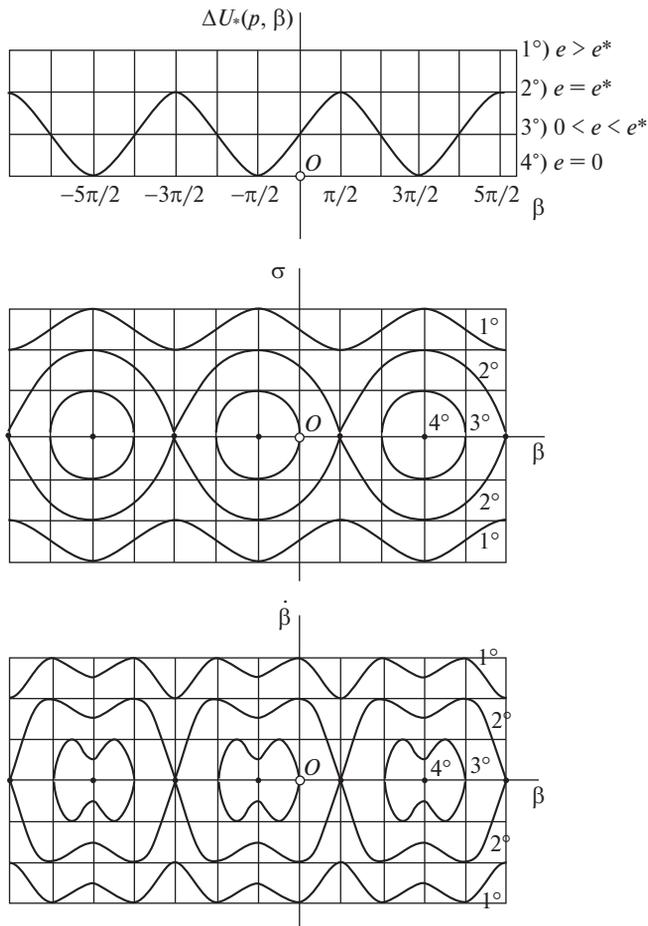


Рис. 1

а если интервал  $J_p$  содержит полюсь  $[0, \infty)$ , то также и соотношению

$$\frac{[p - \omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))}{G(\beta(t))} + \dot{\beta}(t) \frac{G(\beta(t))R - Q(\beta(t))N(\beta(t))}{G(\beta(t))} = f \quad (2.3)$$

Здесь  $e, f$  – постоянные. Соотношение (2.2) выражает тот факт, что функция  $V_p$ , определенная по формуле (1.34, [1]), постоянна на решениях вида (2.1). Соотношение (2.3) следует для решения (2.1) при  $[0, \infty) \subseteq J_p$  из третьего уравнения преобразованной системы (1.9, [1]) при учете равенства  $b_0 \sin \gamma_0 + c_0 = 0$ , установленного в лемме 3 [1].

В первую очередь проанализируем фазовые траектории решений вида (2.1), определяемые одним только соотношением (2.2). Это соотношение фактически определяет проекции траекторий решений вида (2.1) на координатную плоскость  $(\beta, \dot{\beta})$ . Сами фазовые траектории лежат в плоскости, получаемой параллельным сдвигом плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  в направлении оси  $O\gamma$  на величину  $\gamma_0$ . Из неравенств Сильвестра (1.3, [1]) и неравенства  $\Delta U_*(p, \beta) \geq 0$  для определенной в (1.35, [1]) функции  $\Delta U_*$  следует, что левая

часть соотношения (2.2) неотрицательна, и поэтому  $e \geq 0$ . Изучим кривые, определяемые на плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  соотношением (2.2) при разных значениях  $e \geq 0$ .

Рассмотрим сначала случай, когда либо выполнены условия  $D_1$  и возмущение  $\delta p$  является малым положительным (точнее,  $\delta p \in (0, \delta p_2)$ ), либо при условиях  $D_2$  выполнено неравенство  $g_1 < 0$ . Тогда, согласно леммам 4, 5, график зависимости функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  от  $\beta$  имеет такой же вид, как график функции  $a(1 + \sin \beta)$  ( $a > 0$ ). Этот график показан в верхней части рис. 1. Четыре качественно различных варианта соответствуют следующим значениям  $e$ : 1°)  $e > e_*$ , 2°)  $e = e_*$ , 3°)  $0 < e < e_*$ , 4°)  $e = 0$ . Здесь  $e_* = \max_{\beta} \Delta U_*(p, \beta)$ .

Пусть

$$F(\beta) = \frac{G(\beta)H - N^2(\beta)}{2G(\beta)} \quad (2.4)$$

Согласно (1.2, 1.3, [1]), функция  $F(\beta) - 2\pi$ -периодическая и положительная при всех  $\beta$ . Введем вместо  $\dot{\beta}$  переменную  $\sigma = \dot{\beta}\sqrt{F(\beta)}$ . Тогда соотношение (2.2) определяет зависимость  $\sigma$  от  $\beta$  в виде

$$\sigma = \pm \sqrt{e - \Delta U_*(p, \beta)} \quad (2.5)$$

Для указанных выше вариантов 1°, 2°, 3°, 4° формула (2.5) определяет на плоскости  $(\beta, \sigma)$  кривые, имеющие такой же вид, как для математического маятника. Эти кривые изображены в средней части рис. 1.

Воспользовавшись обозначением (2.4), получаем из (2.2) формулу

$$\dot{\beta} = \pm \frac{1}{\sqrt{F(\beta)}} \sqrt{e - \Delta U_*(p, \beta)} \quad (2.6)$$

которая определяет зависимость  $\dot{\beta}$  от  $\beta$ . Ее правая часть получается путем умножения правой части формулы (2.5) на положительную  $2\pi$ -периодическую функцию  $1/\sqrt{F(\beta)}$ . Поэтому семейство кривых  $\dot{\beta}(\beta)$ , определяемое на плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  равенством (2.6), получается из семейства кривых  $\sigma(\beta)$  путем деформации в вертикальном направлении, сопровождающейся, возможно, появлением дополнительных “волн”. При этом не изменяются точки пересечения рассматриваемых кривых с осью абсцисс и не изменяется также тип кривых, то есть бесконечные периодические и замкнутые кривые переходят в такие же кривые, как это показано в нижней части рис. 1.

Рассмотрим теперь случай, когда либо выполнены условия  $D_1$  и возмущение  $\delta p$  является малым отрицательным (точнее,  $\delta p \in (\delta p_1, 0)$ ), либо при условиях  $D_2$  выполнено неравенство  $g_1 > 0$ . В этом случае, согласно леммам 4, 5, функция  $\Delta U_*(p, \beta)$  ведет себя как функция  $a(1 - \sin \beta)$  ( $a > 0$ ), так что график зависимости функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  от  $\beta$  отличается от такого графика в предыдущем случае только горизонтальным сдвигом на  $\pi$ . Следовательно, кривые  $\sigma(\beta)$  и  $\dot{\beta}(\beta)$  в этом случае отличаются от аналогичных кривых в предыдущем случае только сдвигом на  $\pi$  по  $\beta$ .

Таким образом, качественное поведение кривых  $\dot{\beta}(\beta)$ , определяемых соотношением (2.2), во всех случаях одинаково, и оно аналогично поведению таких кривых для математического маятника.

Для варианта 2°, когда  $e = e_*$ , соотношение (2.2) определяет непродолжаемые фазовые траектории, соединяющие пары соседних стационарных точек, соответствующих

точкам максимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ . Вдоль таких траекторий (их называют гомоклиническими орбитами) решение приведенной системы определено при  $t \in (-\infty, \infty)$ , и оно стремится к одной из двух крайних стационарных точек при  $t \rightarrow \infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ . Сами эти точки также являются непродолжаемыми фазовыми траекториями. С учетом этого в варианте 2° выделяются два случая: случай 2<sub>1</sub><sup>o</sup>, соответствующий гомоклиническим орбитам, и случай 2<sub>2</sub><sup>o</sup>, соответствующий стационарным решениям при максимуме функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ .

*III. Совместность условий, определяющих множество  $M_p$ .* Стационарные решения, которые соответствуют точкам максимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  (случай 2<sub>2</sub><sup>o</sup>), при надлежащем выборе постоянной  $f$  вместе с соотношением (2.2) удовлетворяют и соотношению (2.3). Соотношения (2.2) и (2.3) совместны также для стационарных решений, соответствующих точкам минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , то есть для варианта 4°, когда  $e = 0$ . Таким образом, инвариантное множество  $M_p$  содержит все стационарные точки системы  $S_p$ .

Покажем, что соотношения (2.2), (2.3) являются несовместными для варианта 3°, когда  $0 < e < e_*$ , то есть множество  $M_p$  не содержит замкнутых фазовых траекторий. Для доказательства заметим, что если коэффициент при  $\dot{\beta}(t)$  в соотношении (2.3) отличен от тождественного нуля, то оно однозначно определяет  $\dot{\beta}(t)$  при заданном  $\beta(t)$ , и тогда соответствующая траектория не может быть замкнутой. Значит, для замкнутых фазовых траекторий этот коэффициент тождественно равен нулю, то есть  $G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta) = 0$  при  $\beta = \beta(t)$ ,  $t \geq 0$ . Тогда соотношение (2.3) переходит в равенство  $[p - \omega Q(\beta)]Q(\beta)/G(\beta) = f$ , которое выполняется тождественно по  $t \geq 0$  при  $\beta = \beta(t)$ . Поскольку функция  $\beta(t)$  не является здесь постоянной по  $t$ , полученные два равенства должны быть тождествами не только по  $t$ , но и по  $\beta$ . Однако в [4] доказаны леммы 1, 2, согласно которым это невозможно при любых значениях параметров прибора и постоянных  $p, f$ . Следовательно, вариант 3° нереализуем.

Анализ совместности соотношений (2.2), (2.3) для  $2\pi$ -периодических по  $\beta$  фазовых траекторий (вариант 1°), а также для гомоклинических орбит (случай 2<sub>1</sub><sup>o</sup>) сопряжен с большими трудностями. Вместо проведения такого анализа будем предполагать возможность существования фазовых траекторий типов 1° и 2<sub>1</sub><sup>o</sup>. Наличие или отсутствие таких траекторий не влияет на установленные ниже в разделе 3 результаты о неустойчивости стационарных решений при условиях  $D_1$  и  $D_2$ .

*IV. Нелокальное поведение рассматриваемого решения.* Итак, вместо инвариантного множества  $M_p$  рассматриваем содержащее его множество  $M_p^+$ , которое включает все стационарные точки системы  $S_p$ , а также фазовые траектории типов 1° и 2<sub>1</sub><sup>o</sup>, которые удовлетворяют соотношению (2.2), но, возможно, не удовлетворяют соотношению (2.3). При таком подходе утверждение теоремы Ла-Салля 1 применительно к системе  $S_p$  переходит в утверждение, что в предположении ограниченности рассматриваемое решение  $z_p(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к одной из непродолжаемых влево и вправо фазовых траекторий, образующих множество  $M_p^+$  и определенных при  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

Как уже отмечалось, чтобы при использовании теоремы 1 обеспечить ограниченность решения  $z_p(t)$  по переменной  $\beta$ , достаточно перейти в цилиндрическое фазовое пространство, в котором эта переменная изменяется на окружности единичного ради-

уса. При переходе к цилиндрическому фазовому пространству множество  $M_p^+$  приобретает следующую структуру. Каждой паре неограниченных периодических по  $\beta$  фазовых траекторий типа  $1^\circ$  соответствует пара замкнутых интегральных кривых, не имеющих общих точек и охватывающих фазовый цилиндр (это предельные циклы второго рода [3]). Двум счетным наборам гомоклинических орбит типа  $2_1^\circ$  соответствуют две замкнутые интегральные кривые, которые также охватывают фазовый цилиндр, но при этом имеют на нем одну общую стационарную точку типа  $2_2^\circ$ . Кроме того, по доказанному выше, на фазовом цилиндре существует одна стационарная точка типа  $4^\circ$ , но отсутствуют замкнутые фазовые траектории типа  $3^\circ$ , которые не охватывают фазовый цилиндр (предельные циклы первого рода).

Тогда, согласно теореме 1, для рассматриваемого решения  $z_p(t)$  возможны такие варианты его поведения на фазовом цилиндре при  $t \rightarrow \infty$ :

- 1) решение  $z_p(t)$  неограниченно приближается к предельному циклу второго рода (типа  $1^\circ$ ), бесконечно наматываясь на фазовый цилиндр;
- 2) это решение неограниченно приближается к гомоклинической орбите (типа  $2_1^\circ$ ), бесконечно наматываясь на фазовый цилиндр;
- 3) рассматриваемое решение стремится к одной из двух стационарных точек (типов  $2_2^\circ$  и  $4^\circ$ ), имеющихся на фазовом цилиндре.

Из полученного результата следует, что в фазовом пространстве, где переменная  $\beta$  изменяется на числовой прямой, справедлива альтернатива, указанная в лемме 6.

**3. Неустойчивость стационарных решений при условиях  $D_1, D_2$ .** Если выполнены условия  $D_1$  или  $D_2$ , установленные в лемме 1 [1], то  $U_*(\tilde{p}, \beta) \equiv \text{const}$ , и преобразованная система (1.9, [1]) имеет стационарное решение (1.11), где значение  $\tilde{p}$  определено формулой (1.21, [1]) или (1.23, [1]),  $\tilde{\beta}^0$  – любое, а  $\tilde{\gamma}^0$  равно одному из значений (1.15, [1]), существующих при  $c_0/b_0 < 1$ . Решению (1.11) преобразованной системы соответствует решение (1.12) приведенной системы  $S_{\tilde{p}}$ , в котором  $\tilde{\beta}^0$  – любое, а  $\tilde{\gamma}^0$  равно одному из значений (1.15, [1]). С учетом определений фазовых векторов (1.10, [1]) эти стационарные решения задаются векторами

$$\tilde{y}^0 = (\tilde{p}, 0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0), \quad \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 = (0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0) \quad (3.1)$$

Обозначим через  $z_p(t, z_{p0})$  решение приведенной системы  $S_p$  при начальном условии  $z_p(0, z_{p0}) = z_{p0}$ . Пусть  $J_p(z_{p0})$  – максимальный интервал существования этого решения,  $J_p^+(z_{p0}) = [0, \tau_p(z_{p0}))$  – его максимальный правый интервал существования. Вводим следующие обозначения:  $\|z_p\|$  – норма вектора  $z_p$ , равная максимальному из модулей его компонент;  $B_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0)$  – открытый шар радиуса  $\delta > 0$  с центром  $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ ;  $I_\delta(\tilde{p})$  – числовой интервал  $I_\delta(\tilde{p}) = (\tilde{p} - \delta, \tilde{p} + \delta)$ .

Неустойчивость решения  $y = \tilde{y}^0$  преобразованной системы означает, что для решений  $z_p(t, z_{p0})$  приведенных систем  $S_p$  справедливо такое утверждение:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists p \in I_\delta(\tilde{p}))(\exists z_{p0} \in B_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0))(\exists t \in J_p^+(z_{p0})) \quad (3.2)$$

$$\|z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0\| \geq \varepsilon$$

На вопрос об устойчивости решений вида (1.11) при условиях  $D_1$  отвечает теорема 2.

*Теорема 2.* Пусть  $c_0/b_0 < 1$ , выполнены условия  $D_1$ , указанные в лемме 1 [1], а постоянная  $\tilde{p}$  определена по формуле (1.21, [1]). Тогда при любом значении  $\tilde{\beta}^0$  и любом из значений  $\tilde{\gamma}^0$ , указанных в (1.15, 1.16, [1]), стационарное решение (1.11) преобразованной системы (1.9, [1]) неустойчиво.

*Доказательство* теоремы 2 состоит из трех частей, которые занумерованы римскими цифрами.

*I. Выбор класса возмущенных решений.* Выделим стационарное решение (1.11) преобразованной системы при условиях  $D_1$ , соответствующее определенному в (1.21, [1]) значению  $\tilde{p}$  постоянной  $p$  и некоторым фиксированным значениям  $\tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0$ . Принимая его в качестве невозмущенного, рассмотрим следующий класс возмущенных решений преобразованной системы, которые в начальный момент  $t = 0$  отличаются по норме от невозмущенного решения (1.11) на сколь угодно малую величину  $\delta > 0$ .

Выбираем  $\delta > 0$  так, чтобы выполнялось условие  $\delta < \min(|\delta p_1|, \delta p_2, \pi/2)$ , где  $\delta p_1 < 0$ ,  $\delta p_2 > 0$  определены по формулам (1.13). Тогда, как установлено в лемме 4, при  $0 < p - \tilde{p} \leq \delta$  функция  $\Delta U_*(p, \beta)$  ведет себя как функция  $a(1 + \sin \beta)$  ( $a > 0$ ), а при  $-\delta \leq p - \tilde{p} < 0$  она ведет себя как функция  $a(1 - \sin \beta)$  ( $a > 0$ ). Это позволяет, задав возмущенное значение постоянной  $p$  равным  $p = \tilde{p} \pm \delta$ , выбрать здесь знак перед  $\delta$  так, чтобы исходное стационарное значение  $\tilde{\beta}^0$  не совпадало ни с одной из точек локального минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , рассматриваемой как функция переменной  $\beta$ .

При указанном выборе знака возмущения  $p - \tilde{p}$  точка  $\tilde{\beta}^0$  либо принадлежит одному из интервалов строгой монотонности функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , либо  $\tilde{\beta}^0$  совпадает с одной из точек локального максимума этой функции. Учитывая, что значение  $\tilde{\beta}^0$  определено с точностью до  $2\pi n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), без ограничения общности будем предполагать, что в случае  $p - \tilde{p} > 0$  значение  $\tilde{\beta}^0$  принадлежит интервалу  $(-\pi/2, 3\pi/2)$  длины  $2\pi$  с границами в точках минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  и с центром в точке  $\beta_c = \pi/2$  максимума этой функции, а при  $p - \tilde{p} < 0$  значение  $\tilde{\beta}^0$  принадлежит интервалу  $(-3\pi/2, \pi/2)$  длины  $2\pi$  также с границами в точках минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  и с центром в точке  $\beta_c = -\pi/2$  максимума этой функции.

Теперь следующим образом определяем начальное значение  $\beta_0 = \beta(0)$  переменной  $\beta$  для возмущенного решения. Если исходное значение  $\tilde{\beta}^0$  не совпадает с точкой  $\beta_c$  максимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , то оставляем  $\beta_0 = \tilde{\beta}^0$ , а в случае  $\tilde{\beta}^0 = \beta_c$  полагаем  $\beta_0 = \tilde{\beta}^0 + \delta$ . Начальные значения всех остальных фазовых переменных для возмущенного решения оставляем такими же, как и для невозмущенного.

Таким образом, при сколь угодно малом  $\delta > 0$  рассматривается возмущенное решение  $y(t, y_0)$  преобразованной системы, которое определено начальным условием  $y(0, y_0) = y_0$ , где

$$y_0 = (p, 0, 0, \beta_0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0)$$

Значения  $p, \beta_0$  определены выше. Этому решению соответствует решение  $z_p(t, z_{p0})$  возмущенной приведенной системы  $S_p$  при начальном условии  $z_p(0, z_{p0}) = z_{p0}$ , где

$$z_{p0} = (0, 0, \beta_0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0)$$

При выбранном сколь угодно малом  $\delta > 0$  имеем  $|p - \tilde{p}| = \delta$ ,  $\|z_{p0} - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0\| = 0$  или  $\|z_{p0} - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0\| = \delta$ , так что  $p \in \bar{I}_\delta(\tilde{p})$ ,  $z_{p0} \in \bar{B}_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0)$ . С учетом произвола в выборе  $\delta$  вместо открытого промежутка  $I_\delta(\tilde{p})$  и открытого шара  $B_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0)$  в определении неустойчивости (3.2) можно рассматривать замкнутый промежуток  $\bar{I}_\delta(\tilde{p})$  и замкнутый шар  $\bar{B}_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0)$ . Поэтому указанный выбор  $\delta$  и  $p$  обеспечивает выполнение второго, третьего и четвертого пунктов в утверждении (3.2).

Далее, при указанном выборе начальной точки  $z_{p0}$  функция  $V_p$ , определенная по формуле (1.34, [1]), принимает в этой точке значение  $V_p(z_{p0})$ , которое строго меньше ее значения в стационарной точке

$$z_{pc}^0 = (0, 0, \beta_c, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0)$$

системы  $S_p$ , соответствующей точке  $\beta_c^0 = \pi/2$  или  $\beta_c^0 = -\pi/2$  максимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  на выбранном интервале  $(-\pi/2, 3\pi/2)$  или  $(-3\pi/2, \pi/2)$  для  $\tilde{\beta}^0$ . Поскольку функция  $V_p$  не возрастает на решениях системы  $S_p$ , возмущенное решение  $z_p(t, z_{p0})$  не может с течением времени приблизиться к точке  $z_{pc}^0$ , то есть эта точка недостижима из начальной точки  $z_{p0}$ .

*II. Выбор величины  $\epsilon$  в определении неустойчивости. Точка (3.1):*

$$\tilde{z}_{\tilde{p}}^0 = (0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0)$$

– стационарная для системы  $S_{\tilde{p}}$ , но она в общем случае не является стационарной для системы  $S_p$ . Пусть  $z_{p \min}^0$  – ближайшая к  $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$  стационарная точка для системы  $S_p$ , отличная от недостижимой стационарной точки  $z_{pc}^0$ . Пусть  $\epsilon = \rho/2$ , где  $\rho = \|\tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - z_{p \min}^0\|$  – расстояние от точки  $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$  до точки  $z_{p \min}^0$ . Покажем, что величина  $\epsilon$  положительна и определена только невозмущенным значением  $\tilde{\beta}^0$  угла  $\beta$ .

Обозначим через  $\beta_1^0$  ближайшую к  $\tilde{\beta}^0$  точку минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  или правую из двух равноотстоящих ближайших к  $\tilde{\beta}^0$  точек минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ . Пусть  $\rho_1 = |\tilde{\beta}^0 - \beta_1^0|$  – расстояние между этими точками на числовой оси. Тогда при  $p - \tilde{p} > 0$ , когда  $-\pi/2 < \tilde{\beta}^0 < 3\pi/2$ , имеем  $\rho_1 = \min(\pi/2 + \tilde{\beta}^0, 3\pi/2 - \tilde{\beta}^0)$ , а при  $p - \tilde{p} < 0$ , когда  $-3\pi/2 < \tilde{\beta}^0 < \pi/2$ , имеем  $\rho_1 = \min(3\pi/2 + \tilde{\beta}^0, \pi/2 - \tilde{\beta}^0)$ . Итак, значение  $\rho_1$  лежит в диапазоне  $0 < \rho_1 < \pi$  и зависит только от  $\tilde{\beta}^0$ .

Обозначим через  $\gamma_1^0$  то из стационарных значений угла  $\gamma$ , которое наиболее близко к его невозмущенному значению  $\tilde{\gamma}^0$ . Если  $\tilde{\gamma}^0$  – одно из определенных в (1.15, 1.16, [1]) значений  $\gamma_{1s}$ , то  $\gamma_1^0$  – это ближайшее к  $\tilde{\gamma}^0$  значение  $\gamma_{2s}$ . Если же  $\tilde{\gamma}^0$  – одно из определенных в (1.15, 1.16, [1]) значений  $\gamma_{2s}$ , то  $\gamma_1^0$  – это ближайшее к  $\tilde{\gamma}^0$  значение  $\gamma_{1s}$ . Поэтому на

числовой оси расстояние между точками  $\gamma_1^0, \tilde{\gamma}^0$  равно  $\rho_2 = \gamma^{(0)} - \gamma^{(1)} = \pi + 2\gamma^{(0)}$ , где  $\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0)$  в предположении, что  $c_0/b_0 < 1$ . Следовательно,  $0 < \rho_2 < \pi$ .

В фазовом пространстве возмущенной системы  $S_p$  рассмотрим стационарные точки

$$\begin{aligned} z_{p1}^0 &= (0, 0, \beta_1^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0) \\ z_{p2}^0 &= (0, 0, \beta_c^0, \gamma_1^0, 0, 0, \dots, 0) \\ z_{p3}^0 &= (0, 0, \beta_1^0, \gamma_1^0, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Все эти точки различаются только значениями координат  $\beta, \gamma$ . Поэтому они лежат в одной плоскости, параллельной плоскости  $O\beta\gamma$ , и вместе с точкой  $z_{pc}^0$  образуют в этой плоскости прямоугольник с параллельными сторонами  $[z_{pc}^0, z_{p1}^0], [z_{p2}^0, z_{p3}^0]$ . Точка  $\tilde{z}_p^0$  принадлежит стороне  $[z_{pc}^0, z_{p1}^0]$  этого прямоугольника. Ближайшие к точке  $\tilde{z}_p^0$  стационарные точки соответствуют вершинам данного прямоугольника. Из них достижимыми из начальной точки  $z_{p0}$  являются три точки (3.3). Поэтому расстояние  $\rho$  от точки  $\tilde{z}_p^0$  до ближайшей к ней достижимой стационарной  $z_{p\min}^0$  точки равно  $\rho = \min_{i=1,2,3} \|\tilde{z}_p^0 - z_{pi}^0\|$ . Здесь расстояния  $\|\tilde{z}_p^0 - z_{pi}^0\|$  равны расстояниям между соответствующими точками на плоскости  $(\beta, \gamma)$ . При этом расстояние между двумя точками плоскости  $(\beta, \gamma)$  равно максимальному из модулей разностей их одноименных координат. Следовательно, искомые расстояния выражаются формулами

$$\|\tilde{z}_p^0 - z_{pi}^0\| = \rho_i \quad (i = 1, 2), \quad \|\tilde{z}_p^0 - z_{p3}^0\| = \max(\rho_1, \rho_2)$$

в которых величины  $\rho_1, \rho_2 > 0$  определены выше. В результате приходим к выводу, что расстояние от точки  $\tilde{z}_p^0$  до ближайшей к ней достижимой стационарной точки равно  $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$ , и при этом величина  $\rho > 0$  вместе с величинами  $\rho_1, \rho_2$  зависит только от невозмущенного значения  $\tilde{\beta}^0$ .

*III. Доказательство основного неравенства в определении неустойчивости.* Полагая  $\varepsilon = \rho/2$ , покажем, что для возмущенного решения  $z_p(t, z_{p0})$  в некоторый момент времени  $t$  из правого максимального интервала его существования  $J_p^+(z_{p0}) = [0, \tau_p(z_{p0}))$  выполняется неравенство

$$\|z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}_p^0\| \geq \varepsilon \quad (3.4)$$

обеспечивающее выполнение свойства неустойчивости (3.2).

Установим выполнение неравенства (3.4) для каждого из логически возможных вариантов поведения рассматриваемого решения  $z_p(t, z_{p0})$ .

*Вариант 1. Правый максимальный интервал существования решения  $z_p(t, z_{p0})$  конечен, то есть  $0 < \tau_p(z_{p0}) < \infty$ .*

В этом случае, согласно лемме 2, хотя бы одна из угловых переменных  $\beta, \gamma$  в рассматриваемом решении неограниченна по модулю при  $t \rightarrow \tau_p(z_{p0})$ . Поэтому при любом  $\varepsilon > 0$  и, в частности, при определенном выше  $\varepsilon = \rho/2$ , в некоторый момент вре-

мени  $t \in [0, \tau_p(z_{p0}))$  выполняется хотя бы одно из неравенств  $|\beta(t, z_{p0}) - \tilde{\beta}^0| \geq \varepsilon$ ,  $|\gamma(t, z_{p0}) - \tilde{\gamma}^0| \geq \varepsilon$ . Следовательно, в этот момент выполняется и неравенство (3.4).

*Вариант 2. Правый максимальный интервал существования решения  $z_p(t, z_{p0})$  бесконечен, то есть  $J_p^+ = [0, \infty)$ , и функция  $\gamma(t, z_{p0})$  в этом решении неограниченна по модулю.*

В этом случае при любом  $\varepsilon > 0$  и, в частности, при  $\varepsilon = \rho/2$  в некоторый момент времени  $t \in [0, \infty)$  выполняется неравенство  $|\gamma(t, z_{p0}) - \tilde{\gamma}^0| \geq \varepsilon$ , а вместе с ним выполняется и неравенство (3.4).

*Вариант 3. Правый максимальный интервал существования решения  $z_p(t, z_{p0})$  бесконечен, то есть  $J_p^+ = [0, \infty)$ , и функция  $\gamma(t, z_{p0})$  в этом решении ограничена по модулю.*

Согласно лемме 6, для решения  $z_p(t, z_{p0})$  справедлива такая альтернатива:

- 1) либо функция  $\beta(t, z_{p0})$  в этом решении неограниченна по модулю;
- 2) либо это решение при  $t \rightarrow \infty$  стремится к одной из стационарных точек системы  $S_p$ , указанных в леммах 4, 5.

В первом случае при любом  $\varepsilon > 0$  и, в частности, при  $\varepsilon = \rho/2$  в некоторый момент времени  $t \in [0, \infty)$  выполняется неравенство  $|\beta(t, z_{p0}) - \tilde{\beta}^0| \geq \varepsilon$ , а вместе с ним выполняется и неравенство (3.4).

Во втором случае решение  $z_p(t, z_{p0})$  с течением времени попадает в сколь угодно малую окрестность одной из стационарных точек  $z_p^0$  системы  $S_p$  и затем остается в этой окрестности. Значит, существует момент времени  $t > 0$ , когда

$$\|z_p(t, z_{p0}) - z_p^0\| < \rho/2 \tag{3.5}$$

Воспользуемся теперь известным свойством нормы

$$\|z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}_p^0\| \geq \|\tilde{z}_p^0 - z_p^0\| - \|z_p(t, z_{p0}) - z_p^0\| \tag{3.6}$$

Здесь расстояние от точки  $\tilde{z}_p^0$  до неизвестной стационарной точки  $z_p^0$  больше либо равно расстоянию  $\rho$  от точки  $\tilde{z}_p^0$  до ближайшей к ней достижимой стационарной точки  $z_{p \min}^0$ :

$$\|\tilde{z}_p^0 - z_p^0\| \geq \|\tilde{z}_p^0 - z_{p \min}^0\| = \rho \tag{3.7}$$

Из (3.6) при учете (3.5), (3.7) следует, что существует момент времени  $t > 0$ , когда выполняется неравенство (3.4). Теорема 2 доказана.

Согласно лемме 5, при условиях  $D_2$  положение точек минимума и максимума функции  $U_*(p, \beta)$  не изменяется, когда возмущение  $p - \tilde{p}$  меняет знак. Поэтому математическая техника, использованная для доказательства теоремы 2, в случае выполнения условий  $D_2$  приводит к следующему результату.

*Теорема 3.* Пусть  $c_0/b_0 < 1$ , выполнены условия  $D_2$ , указанные в лемме 1 [1], а постоянная  $\tilde{p}$  определена по формуле (1.23, [1]). Тогда стационарное решение (1.11) преобразованной системы (1.9, [1]) неустойчиво в случаях, когда

- 1) значение  $\tilde{\beta}^0$  при  $p \neq \tilde{p}$  не является точкой минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , определенной формулами (1.35, 1.24, [1]), а  $\tilde{\gamma}^0$  — любое из значений  $\gamma_{1s}, \gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), указанных в (1.15, 1.16, [1]);

2) значение  $\tilde{\beta}^0$  при  $p \neq \tilde{p}$  является точкой минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , но  $\tilde{\gamma}^0$  — одна из точек  $\gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) максимума функции  $\Delta U_1(\gamma)$ , указанных в (1.15, 1.16, [1]).

*Доказательство.* Рассмотрим в качестве невозмущенного одно из стационарных решений (1.11) преобразованной системы при условиях  $D_2$ , соответствующее определенному в (1.23, [1]) значению  $\tilde{p}$  постоянной  $p$ , какому-либо фиксированному значению  $\tilde{\beta}^0$  и значению  $\tilde{\gamma}^0$ , принадлежащему одному из двух счетных наборов (1.15, 1.16, [1]). Следуя схеме доказательства теоремы 2, определим класс возмущенных решений, сколь угодно близких к невозмущенному в начальный момент  $t = 0$ , и установим, что эти решения с течением времени отклоняются от невозмущенного на конечное расстояние. Класс возмущенных решений определим по-разному при доказательстве утверждений 1) и 2).

*Доказательство утверждения 1).* В лемме 5 установлено, что в случае выполнения условий  $D_2$ , указанных в лемме 1 [1], при  $p \neq \tilde{p}$  поведение функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , рассматриваемой как функция переменной  $\beta$ , зависит от знака коэффициента  $g_1$  при  $\sin \beta$  в выражении  $G(\beta)$ . Точнее, при любом возмущении  $p - \tilde{p} \neq 0$  функция  $\Delta U_*(p, \beta)$  ведет себя как  $a(1 + \sin \beta)$  ( $a > 0$ ) в случае  $g_1 < 0$ , и она ведет себя как  $a(1 - \sin \beta)$  ( $a > 0$ ) в случае  $g_1 > 0$ . Воспользовавшись тем, что в утверждении 1) значение  $\tilde{\beta}^0$  отлично от точек минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , и это значение определено с точностью до  $2\pi l$  ( $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), будем предполагать, что в случае  $g_1 < 0$  значение  $\tilde{\beta}^0$  принадлежит интервалу  $(-\pi/2, 3\pi/2)$  с границами в точках минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  и с центром в точке  $\beta_c = \pi/2$  максимума этой функции, а в случае  $g_1 > 0$  значение  $\tilde{\beta}^0$  принадлежит интервалу  $(-3\pi/2, \pi/2)$  также с границами в точках минимума и с центром в точке  $\beta_c = -\pi/2$  максимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ .

Выбрав сколь угодно малое  $\delta > 0$ , для возмущенного решения полагаем  $p = \tilde{p} + \delta$ . Начальное значение  $\beta_0 = \beta(0)$  для возмущенного решения определяем так же, как в доказательстве теоремы 2, то есть берем  $\beta_0 = \tilde{\beta}^0$  при  $\tilde{\beta}^0 \neq \beta_c$  и  $\beta_0 = \tilde{\beta}^0 + \delta$  при  $\tilde{\beta}^0 = \beta_c$ . Начальные значения всех остальных фазовых переменных для возмущенного решения преобразованной системы оставляем такими же, как и для невозмущенного. Таким образом, при сколь угодно малом  $\delta > 0$  определены начальные условия для возмущенного решения  $y(t, y_0)$  преобразованной системы. Ему соответствует решение  $z_p(t, z_{p0})$  приведенной системы  $S_p$  при начальном условии  $z_{p0} = (0, 0, \beta_0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0)$ .

Теперь так же, как и в доказательстве теоремы 2, определяем величину  $\varepsilon > 0$ , зависящую только от  $\tilde{\beta}^0$ , и устанавливаем, что в некоторый момент времени  $t > 0$  выполнено неравенство  $\|z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0\| \geq \varepsilon$ , где  $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0 = (0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0)$ .

*Доказательство утверждения 2).* Пусть в невозмущенном стационарном решении преобразованной системы, определяемом вектором  $\tilde{y}^0 = (\tilde{p}, 0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0)$ , значение  $\tilde{\beta}^0$  — точка минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  при условиях  $D_2$  и  $p \neq \tilde{p}$ , а  $\tilde{\gamma}^0$  — одна из точек  $\gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 1, \dots$ ) локального максимума функции  $\Delta U_1(\gamma)$ .

Выберем сколь угодно малое  $\delta > 0$ , удовлетворяющее условию  $\delta < \rho$ , где  $\rho = |\tilde{\gamma}^0 - \gamma_1|$ ,  $\gamma_1$  — ближайшая к  $\tilde{\gamma}^0$  точка локального минимума функции  $\Delta U_1(\gamma)$ . Для воз-

мущенного решения  $y(t, y_0)$  преобразованной системы полагаем  $p = \tilde{p} + \delta$ . Начальные значения  $\beta_0 = \beta(0)$ ,  $\gamma_0 = \gamma(0)$  для возмущенного решения выбираем равными  $\beta_0 = \tilde{\beta}^0$ ,  $\gamma_0 = \tilde{\gamma}^0 + \delta$ . Начальные значения всех остальных фазовых переменных для возмущенного решения  $y(t, y_0)$  преобразованной системы оставляем такими же, как и для невозмущенного. Обозначим через  $z_p(t, z_{p0})$  решение приведенной системы  $S_p$ , соответствующее решению  $y(t, y_0)$  преобразованной системы.

Так как  $\tilde{\beta}^0$  – точка минимума функции  $\Delta U_*(p, \beta)$ , определенной в (1.35, [1]), имеем  $\Delta U_*(p, \tilde{\beta}^0) = 0$ . Поэтому в точке  $\tilde{z}_p = (0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \dots, 0)$  функция  $V_p$ , определенная формулой (1.34, [1]), равна  $V_p(\tilde{z}_p) = \Delta U_1(\tilde{\gamma}^0)$ . А поскольку  $\tilde{\gamma}^0$  – точка локального максимума функции  $\Delta U_1(\gamma)$ , то в близкой к ней точке  $\gamma_0$  имеем  $\Delta U_1(\gamma_0) < \Delta U_1(\tilde{\gamma}^0)$ . Следовательно, в начальный момент  $t = 0$  функция  $V_p$  принимает значение  $V_p(z_{p0})$ , которое меньше ее значения  $V_p(\tilde{z}_p)$  в точке  $\tilde{z}_p$ , а значит, и во всех стационарных точках системы  $S_p$ , соответствующих невозмущенному значению  $\tilde{\gamma}^0$ . Функция  $V_p$  не возрастает на решениях системы  $S_p$ , и поэтому возмущенное решение  $z_p(t, z_{p0})$  не может с течением времени приблизиться ни к одной из стационарных точек, соответствующих значению  $\tilde{\gamma}^0$ . Это решение может неограниченно приближаться только к одной из стационарных точек  $z_p^0 = (0, 0, \beta^0, \gamma^0, 0, 0, \dots, 0)$ , соответствующих значениям  $\gamma^0 \neq \tilde{\gamma}^0$ . Ближайшая из них удалена от точки  $\tilde{z}_p$  на расстояние  $\|\tilde{z}_p - z_p^0\| = \rho$ , где  $\rho > 0$  определено выше.

Положив  $\varepsilon = \rho/2$  и повторив часть III доказательства теоремы 2, заключаем, что в некоторый момент  $t > 0$  выполнено неравенство  $\|z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}_p\| \geq \varepsilon$ , обеспечивающее выполнение свойства неустойчивости (3.2). Теорема 3 доказана.

Следствие равенства  $2u_1g_1 + \omega^2q_1^2 = 0$ , входящего в число условий  $D_2$ , коэффициенты  $u_1$  и  $g_1$  имеют разные знаки. Поэтому при любом  $p \neq \tilde{p}$  функция  $-g_1 \cos \beta$  в выражении (1.19) для  $U_*(p, \beta)$  с точностью до положительного множителя совпадает с производной  $U'(\beta) = u_1 \cos \beta$  потенциальной энергии силы тяжести. Следовательно, если выполнены условия  $D_2$ , то при  $p \neq \tilde{p}$  функции  $\Delta U_*(p, \beta)$  и  $U(\beta) = u_0 + u_1 \sin \beta$  имеют одинаковые интервалы монотонности и одинаковые точки максимумов и минимумов.

**Выводы.** Из теорем 2, 3 и теорем 3, 5, 6 [1] следует такой вывод.

*Теорема 4.* Наличие изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии  $U_{p^0}(\beta, \gamma) = U_*(p^0, \beta) + U_1(\gamma)$  в точке  $(\beta^0, \gamma^0)$  является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного решения (1.17, [1]), преобразованной системы (1.9, [1]), исключая, быть может, случай, когда при условиях  $D_2$  рассматривается стационарное решение, для которого  $p^0 = \tilde{p}$ , а в качестве  $(\beta^0, \gamma^0)$  выбрана точка минимума функции  $U_p(\beta, \gamma)$  при  $p \neq \tilde{p}$ .

Поскольку уравновешенный гироскоп ( $U(\beta) \equiv \text{const}$ ) и гироскоп общепринятой конструкции ( $G(\beta) = g_0 + g_4 \cos 2\beta$ ) не удовлетворяют условиям  $D_2$  (а именно, неравенству  $u_1 \neq 0$  и неравенству  $g_1 \neq 0$ ), то из теоремы 4 следует, что для них наличие изолированного минимума функции  $U_p(\beta, \gamma)$  в стационарной точке является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного режима.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многоугольной модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 1// Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 124–141.
2. *LaSalle J., Lefschetz S.* Stability by Liapunov's direct method with applications. Academic press, New York, London, 1961. = *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
3. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.
4. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Свойство притяжения стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 3–14.