

УДК 531.3

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

© 2021 г. А. В. Борисов^{a,*}, И. Е. Каспирович^{b,**}, Р. Г. Мухарлямов^{b,***}

^a Филиал ФГБОУ ВО НИУ “МЭИ” в г. Смоленске. Смоленск, Россия

^b Российский университет дружбы народов. Москва, Россия

*e-mail: borisowandrej@yandex.ru

**e-mail: kaspirovich.ivan@mail.ru

***e-mail: robgar@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2019 г.

После доработки 12.01.2020 г.

Принята к публикации 14.01.2020 г.

Рассматривается моделирование механической системы с произвольным числом звеньев переменной длины, составленных из двух невесомых участков переменной длины и расположенного между ними массивного абсолютно твердого стержня. Рассматривается задача управления целенаправленным движением системы с произвольным количеством звеньев переменной длины. Управление осуществляется изменением длины невесомых участков звеньев и изменением углов между звеньями. Связь между звеньями реализуется двумя цилиндрическими шарнирами, обеспечивая значительную механическую прочность, простоту конструкции и расположения управляющих приводов. Составляется система дифференциальных уравнений движения и записывается в векторно-матричной форме записи.

В качестве примера использования разработанной модели рассматривается антропоморфная механическая система в виде лыжника-сноубордиста. В модели лыжника-сноубордиста учитывается неголономная связь лыжи с поверхностью. Составляется система дифференциальных уравнений движения и проводится анализ изменения уравнений при учете неголономной связи. Рассматривается численный пример моделирования движения лыжника-сноубордиста с использованием управления на основе метода стабилизации связи.

Ключевые слова: механическая система, звено переменной длины, произвольное число звеньев, система дифференциальных уравнений движения, управление, целенаправленное движение, возмущения связей, лыжник-сноубордист, лыжа, неголономная связь, звено переменной длины, шарнир

DOI: 10.31857/S0572329921020057

1. Введение. Исследованию динамики антропоморфных систем, моделируемых системой твердых тел, посвящено значительное число работ. Исследования ведутся по проектированию экзоскелетов и созданию антропоморфных роботов. Разработке экзоскелетов на основе системы твердых тел посвящены работы [1–5]. Моделирование антропоморфных роботов системами твердых тел рассматривается в работах [6–10]. Однако, практически во всех работах, для описания движения антропоида не используются звенья переменной длины и понятие связи. Построению алгоритмов составления уравнений динамики пространственной модели экзоскелета и антропоморфного робота посвящены работы [11, 12]. В [12] был предложен рекуррентный метод постро-

ения уравнений движений экзоскелета, содержащего звенья переменной длины и управляемого моментами в суставах. Реальные условия функционирования управляемых антропоморфных систем и экзоскелетов предполагают наличие действия сил трения и наличие неголономных связей. Использование уравнений неголономной динамики [13, 14] позволяет существенно сократить размерность системы. Задачи динамики систем с трением и с неголономными связями рассмотрены в работах [13–18]. В настоящей работе рассматривается модель антропоморфного механизма сложной конструкции, содержащего звенья переменной длины. Звеном переменной длины называется часть механизма между шарнирами-суставами, составляющая прямолинейную конструкцию, способную изменять расстояние между шарнирами-суставами, т.е. реализовывать растяжение-сжатие, но не подверженное деформациям изгиба и кручения.

В связи с тем, что задача моделирования неголономных систем является весьма сложной, для лучшего понимания модели, рассмотрим вначале модель звена переменной длины без учета неголономной связи. Отработаем на ней методику составления дифференциальных уравнений движения, получим обобщения дифференциальных уравнений движения и разработаем методику составления для антропоморфной системы с произвольным числом звеньев. Далее рассмотрим задачу управления целенаправленным движением системы твердых тел, содержащей звенья переменной длины. Затем обобщим и перенесем полученные результаты на модель лыжника-сноубордиста, с учетом неголономной связи и управления движением такой неголономной модели с использованием метода стабилизации связей. Далее рассмотрим числовой пример для модели лыжника-сноубордиста с выбранным количеством звеньев и заданными числовыми параметрами.

2. Описание модели закрепленного звена переменной длины и постановка задачи. Введем неподвижную правую декартову систему координат $Ox\eta z$, в которой происходит движение механизма. Пусть стержень переменной длины имеет конструкцию, показанную на рис. 1. Звено AB переменной длины, состоящее из двух невесомых частей изменяющих свою длину $AC = \xi_{11}(t)$ и $DB = \xi_{12}(t)$ и весомой абсолютно твердой части $CD = l_1$ [2]. На рис. 1 схематично изображено звено переменной длины и введены соответствующие обозначения.

Положение весомого участка звена зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_{11}(t)$. Рассматриваемая система имеет три степени свободы. Обозначим через $M_{1\varphi}$ и $M_{1\psi}$ управляющие моменты, развиваемые в шарнире A . Продольную силу, действующую вдоль стержня на участке AC , обозначим F_{11} , на участке DB , обозначим F_{12} .

Длина звена складывается из суммы длин переменной части и постоянной длины:

$$l(t) = l_1 + \xi_{11}(t) + \xi_{12}(t) \quad (2.1)$$

Масса участка звена постоянной длины $m_1 = \rho_1 l_1$, где ρ_1 – плотность материала из которого изготовлена часть стержня постоянной длины. Участки звена, в которых реализуется переменность его длины $\xi_{11}(t)$ и $\xi_{12}(t)$, считаем невесомыми. Это означает, что момент инерции стержня относительно точки C , расположенной на конце весомого участка, не меняется.

Координаты бесконечно малой частицы весомого участка звена, отсчитываемые от точки A , записываются в виде:

$$x_1 = (x + \xi_{11})C_1^\psi C_1^\varphi, \quad y_1 = (x + \xi_{11})C_1^\psi S_1^\varphi, \quad z_1 = (x + \xi_{11})S_1^\psi \quad (2.2)$$

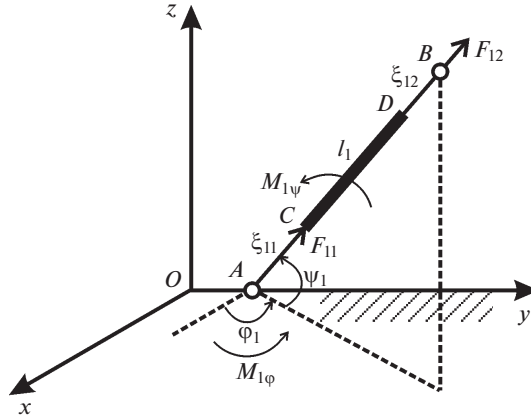


Рис. 1

где $C_1^\phi = \cos\phi_1$, $C_1^\psi = \cos\psi_1$, $S_1^\phi = \sin\phi_1$, $S_1^\psi = \sin\psi_1$, x – расстояние от точки C до точки, задающей положение бесконечно малой частицы весомого участка CD звена AB . Квадрат скорости частицы весомого участка CD равен:

$$v_1^2 = \dot{\xi}_{11}^2 + (x + \xi_{11})^2(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\phi}_1^2(C_1^\psi)^2) \quad (2.3)$$

Кинетическая энергия механизма, с учетом выражения момента инерции тонкого однородного стержня, если ось проходит через его конец

$$I_1 = m_1 l_1^2 / 3 \quad (2.4)$$

имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} v_1^2 \rho dx = \frac{1}{2} [m_1 \dot{\xi}_{11}^2 + \zeta_{11}(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\phi}_1^2(C_1^\psi)^2)] \quad (2.5)$$

$$\text{где } \zeta_{11} = I_1 + m_1 l_1 \xi_{11} + m_1 \xi_{11}^2$$

Потенциальная энергия звена записывается в виде:

$$\Pi = g m_1 (l_1 / 2 + \xi_{11}) S_1^\psi \quad (2.6)$$

Составляя уравнения Лагранжа второго рода, получаем дифференциальные уравнения движения для модели одного подвижного звена переменной длины в трехмерном пространстве:

$$\zeta_{11}(C_1^\psi)^2 \ddot{\phi}_1 + 2m_1 \lambda_{11} (C_1^\psi)^2 \dot{\xi}_{11} \dot{\phi}_1 - 2\zeta_{11} C_1^\psi S_1^\psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 = M_{1\phi} \quad (2.7)$$

$$\zeta_{11} \ddot{\psi}_1 + \zeta_{11} C_1^\psi S_1^\psi \dot{\phi}_1^2 + 2m_1 \lambda_{11} \dot{\xi}_{11} \dot{\psi}_1 + g m_1 \lambda_{11} C_1^\psi = M_{1\psi} \quad (2.8)$$

$$m_1 \ddot{\xi}_{11} - m_1 \lambda_{11} (C_1^\psi)^2 \dot{\phi}_1^2 - m_1 \lambda_{11} \dot{\psi}_1^2 + g m_1 S_1^\phi = F_1 \quad (2.9)$$

$$\text{где } \zeta_{11} = I_1 + m_1 l_1 \xi_{11} + m_1 \xi_{11}^2, \lambda_{11} = \xi_{11} + l_1 / 2, C_1^\psi = \cos\psi_1, S_1^\psi = \sin\psi_1.$$

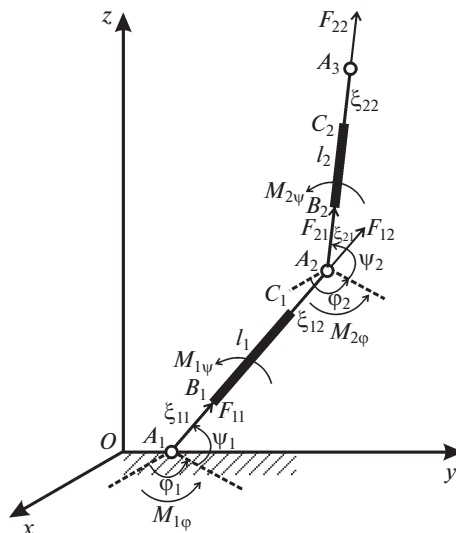


Рис. 2

Общее решение системы уравнений движения зависит от 6 произвольных постоянных, которые определяются заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \varphi_1|_{t=0} = \varphi_{10}, \quad \dot{\varphi}_1|_{t=0} = \dot{\varphi}_{10}, \quad \psi_1|_{t=0} = \psi_{10}, \quad \dot{\psi}_1|_{t=0} = \dot{\psi}_{10} \\ \xi_{11}|_{t=0} = \xi_{110}, \quad \dot{\xi}_{11}|_{t=0} = \dot{\xi}_{110} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику звена переменной длины.

Задача исследования заключается в создании математической модели механизмов, составленных из таких звеньев. Требуется записать систему дифференциальных уравнений движения в векторно-матричном виде для модели с произвольным конечным количеством звеньев и получить общие формулы для матриц, входящих в дифференциальные уравнения движения. Перенести полученные результаты на систему с неголономной связью. Провести исследование ее динамики, численным методом на основе метода стабилизации связи для выбранной в качестве примера модели лыжника-сноубордиста. Для этого необходимо получить решение системы дифференциальных уравнений движения с эмпирически определенными методами биомеханики параметрами системы, соответствующими опорно-двигательному аппарату реального лыжника и сноуборда. Результатом должна быть проверка возможности получения устойчивого движения механической модели лыжника-сноубордиста за счет неголономной связи.

3. Модель механизма с двумя звеньями переменной длины. Составим систему дифференциальных уравнений движения для механизма с двумя последовательными подвижными звеньями переменной длины (рис. 2).

Система имеет два звена A_1A_2 и A_2A_3 , состоящее каждое из двух невесомых частей изменяющих свою длину $A_1B_1 = \xi_{11}(t)$, $C_1A_2 = \xi_{12}(t)$, $A_2B_2 = \xi_{21}(t)$, $C_2A_3 = \xi_{22}(t)$ и весо-мых абсолютно твердых частей $B_1C_1 = l_1$, $B_2C_2 = l_2$ (рис. 2). Положение весомого участка B_1C_1 звена A_1A_2 зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\psi_1(t)$, $\varphi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_{11}(t)$. Положение весомого участка B_2C_2

звена A_2A_3 зависит от семи параметров и определяется углами $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ и переменными длинами участков стержней $\xi_{11}(t)$, $\xi_{12}(t)$, $\xi_{21}(t)$. Обозначим через $M_{1\psi}$, $M_{1\phi}$ — управляющие моменты, развиваемые в шарнире A_1 , через $M_{2\psi}$, $M_{2\phi}$ — в шарнире A_2 . Продольную силу, действующую вдоль стержня на участке A_1B_1 , обозначим F_{11} , на участке C_1A_2 , обозначим F_{12} , на участке A_2B_2 , обозначим F_{21} .

Кинетическая энергия звена A_1A_2 , совершающего вращательное движение вокруг неподвижного шарнира A_1 , имеет вид, аналогичный модели с одним звеном (2.5).

Для вычисления кинетической энергии звена A_2A_3 найдем скорость v_2^2 . Весомый участок данного звена совершает сложное движение. В качестве полюса выберем точку A_2 . Определим квадрат ее скорости:

$$v_{A_2}^2 = \lambda_{12}^2(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\phi}_1^2(C_1^\Psi)^2) + \dot{\lambda}_{12}^2 \quad (3.1)$$

где $\lambda_{12} = \xi_{11} + l_1 + \xi_{12}$, $\dot{\lambda}_{12} = \dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12}$

Тогда скорость v_2^2 бесконечно малой частицы участка звена A_2A_3 определяется в соответствии с теоремой о сложении скоростей.

$$\begin{aligned} v_2^2 = & \lambda_{12}^2(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\phi}_1^2(C_1^\Psi)^2) + \dot{\lambda}_{12}^2 + (\xi_{21} + x_2)^2(\dot{\psi}_2^2 + \dot{\phi}_2^2(C_2^\Psi)^2) + \xi_{21}^2 + \\ & + 2\{[(\xi_{21} + x_2)\dot{\lambda}_{12}\dot{\phi}_2 - \lambda_{12}\dot{\xi}_{21}\dot{\phi}_1]S_{12}C_1^\Psi C_2^\Psi + \\ & + [(\xi_{21} + x_2)\lambda_{12}\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + \dot{\lambda}_{12}\xi_{21}]C_{12}C_1^\Psi C_2^\Psi + \\ & + (\xi_{21} + x_2)(\lambda_{12}\dot{\phi}_1\dot{\psi}_2S_{12}C_1^\Psi S_2^\Psi + \dot{\lambda}_{12}C_{12})\dot{\psi}_2C_1^\Psi S_2^\Psi + \dot{\lambda}_{12}\xi_{21}S_1^\Psi S_2^\Psi - \\ & - \lambda_{12}[(C_{12}S_1^\Psi C_2^\Psi - C_1^\Psi S_2^\Psi)\dot{\xi}_{12} + \\ & + (\xi_{21} + x_2)(S_{12}S_1^\Psi C_2^\Psi \dot{\phi}_2 - (C_1^\Psi C_2^\Psi + C_{12}S_1^\Psi S_2^\Psi)\dot{\psi}_2)]\dot{\psi}_1\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\lambda_{12} = \xi_{11} + l_1 + \xi_{12}$, $\dot{\lambda}_{12} = \dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12}$, $C_{12} = \cos(\phi_1 - \phi_2)$, $S_{12} = \sin(\phi_1 - \phi_2)$

Кинетическая энергия второго звена является весьма громоздким выражением равно как и система дифференциальных уравнений движения, составленных с помощью уравнений Лагранжа второго рода, состоящая из восьми уравнений. Поэтому в качестве примера, поясняющего изменения, происходящие в системе уравнений, приведем только предпоследнее, седьмое уравнение полученной системы, соответствующее обобщенной координате ξ_{21} — нижнему невесомому участку переменной длины второго звена.

$$\begin{aligned} & -m_2\lambda_{12}S_{12}C_1^\Psi C_2^\Psi \ddot{\phi}_2 - m_2\lambda_{12}(C_{12}S_1^\Psi C_2^\Psi - C_1^\Psi S_2^\Psi)\ddot{\psi}_1 + \\ & + m_2(C_{12}C_1^\Psi C_2^\Psi + S_1^\Psi S_2^\Psi)(\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12}) + m_2\dot{\xi}_{21} - \\ & - m_2\lambda_{12}C_{12}C_1^\Psi C_2^\Psi \dot{\phi}_1^2 - m_2\lambda_{21}(1 + \cos(2\psi_2))\dot{\phi}_2^2/2 - \\ & - m_2\lambda_{12}(C_{12}C_1^\Psi C_2^\Psi + S_1^\Psi S_2^\Psi)\dot{\psi}_1^2 - m_2\lambda_{21}\dot{\psi}_2^2 - \\ & - 2m_2S_{12}C_1^\Psi C_2^\Psi (\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12})\dot{\phi}_1 + 2m_2\lambda_{12}S_{12}S_1^\Psi C_2^\Psi \dot{\phi}_1\dot{\psi}_1 - \\ & - 2m_2(C_{12}S_1^\Psi C_2^\Psi - C_1^\Psi S_2^\Psi)(\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12})\dot{\psi}_1 + gm_2S_2^\Psi = F_{21} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\lambda_1 = \xi_{11} + l_1$, $\lambda_{11} = \xi_{11} + l_1/2$, $\lambda_{12} = \xi_{11} + l_1 + \xi_{12}$, $\lambda_2 = \xi_{21} + l_2$, $\lambda_{21} = \xi_{21} + l_2/2$, $C_j = \cos\phi_j$, $S_j = \sin\phi_j$, $j = 1, 2$, $C_{12} = \cos(\phi_1 - \phi_2)$, $S_{12} = \sin(\phi_1 - \phi_2)$.

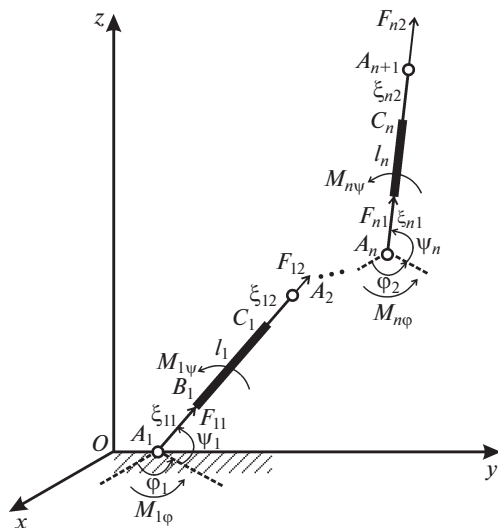


Рис. 3

В дифференциальное уравнение (3.3) входит информация о движении первого звена, к которому прикрепляется рассматриваемое второе звено. Кроме того, в сравнении с аналогичным уравнением системы (2.9) для модели с одним звеном, в уравнении для модели с двумя подвижными звеньями (3.3) возникает достаточно много новых слагаемых, связанных с тем, что движение второго звена сложное.

4. Обобщение модели механизма на случай произвольного количества звеньев переменной длины. Рассмотрим многосвязную стержневую модель с n звеньями. Система имеет звенья переменной длины, конструкция которых была описана выше. Все длины стержней складываются из участка постоянной длины l_i ($i = 1, \dots, n$) и переменной длины $\xi_{i\alpha} = \xi_{i\alpha}(t)$ ($\alpha = 1, 2$ – номер невесомого участка переменной длины на звене). На рис. 3 изображена модель со звеньями переменной длины в одноопорной фазе движения и введены соответствующие обозначения.

Положение однозначно определяется углами ϕ_i и участками переменной длины стержней $\xi_{i\alpha}$. Рассматриваемая система имеет $4n - 1$ степеней свободы, так как движение каждого звена описывается набором из четырех параметров: углов $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$ и изменением длин невесомых участков $\xi_{i1}(t)$, $\xi_{i2}(t)$. При этом на конце последнего звена находится невесомый участок, который не оказывает влияния на движение звена, поэтому $\xi_{n2}(t)$ не включается в обобщенные координаты. Массы звеньев обозначим m_i , моменты инерции звеньев относительно осей, проходящих через один из концов весомого стержня, перпендикулярно плоскости движения – I_i . Обозначим: $M_{i\phi}$, $M_{i\psi}$ – моменты, развиваемые в i -м шарнире; $F_{i\alpha}$ – продольные силы, действующие вдоль i -го стержня, обеспечивающие изменение его длины требуемым образом. Моменты и продольные силы являются управлением в данной механической системе.

Уравнения движения элементов n -звенной механической системы в одноопорной фазе представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, которые в матричной форме можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& A_{\kappa}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})\dot{\varphi} + B_{\kappa}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})\dot{\psi} + \sum_{\alpha=1}^2 C_{\kappa\alpha}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})\dot{\xi}_{\alpha} + D_{\kappa}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})\dot{\Phi}\dot{\varphi} \\
& + E_{\kappa}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})\dot{\Psi}\dot{\psi} + 2\sum_{\alpha=1}^2 F_{\kappa\alpha}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})\dot{\Phi}\dot{\xi}_{\alpha} + 2G_{\kappa}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})\dot{\Phi}\dot{\Psi} + \\
& + 2\sum_{\alpha=1}^2 H_{\kappa\alpha}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})\dot{\Psi}\dot{\xi}_{\alpha} + gK_{\kappa}(\psi) = M_{\kappa}(\varphi, \psi, \xi_{\alpha})
\end{aligned} \quad (4.1)$$

где нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $\kappa = 1, \dots, 4$, где 1 соответствует обобщенной координате φ , 2 – ψ , 3 – ξ_{i1} , 4 – ξ_{i2} ; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ – векторы углов; $\xi_{\alpha} = (\xi_{1\alpha}, \dots, \xi_{n\alpha})^T$ – вектор переменных длин звеньев участка α ($\alpha = 1, 2$); $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ – вектор длин звеньев участков постоянной длины; $\dot{\varphi}$ – вектор угловых скоростей; $\ddot{\varphi}$ – вектор угловых ускорений; $\dot{\Phi} = \text{diag}(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n)$ – диагональная матрица; M, F_{α} – векторы управляющих моментов и сил на участке α ($\alpha = 1, 2$) звена; $A, B, G_{\alpha}, H_{\alpha}$ – матрицы, учитывающие инерционные свойства системы; C, K_{α} – матрицы, определяемые моментами силы тяжести; $D_1, D_2, E_1, E_2, L_{\alpha 1}, L_{\alpha 2}, P_{\alpha 1}, P_{\alpha 2}$ – матрицы, учитывающие переменную длину звеньев.

Приведем, в качестве примера, формулу для матрицы A . Матрица $A = (a_{ij})$ является симметрической: $a_{ij} = a_{ji}$, поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если i – номер строки, j – номер столбца, то $i, j = 1, 2, \dots, n$, при этом $j \geq i$.

Элементы симметрической матрицы A имеют вид:

$$\begin{aligned}
a_{ij} = & \delta_{ij}I_i + (l_i + \xi_{i1} + (1 - \delta_{ij})\xi_{i2}) \times \\
& \times \left(m_j(l_j\tilde{\delta}_{ij} + \xi_{j1}) + (l_j + \xi_{j1} + \xi_{j2})(l_j\delta_{ij} + \xi_{j1}\delta_{ij} + \xi_{j2}\delta_{ij}) \sum_{k=j+1}^n m_k \right) \times \\
& \times \cos(\varphi_i - \varphi_j) \cos\psi_i \cos\psi_j
\end{aligned} \quad (4.2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, тогда $\tilde{\delta}_{ij}$ – половинный антикронекар:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \tilde{\delta}_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1/2, & i \neq j \end{cases}$$

Матричная форма записи уравнений движения (4.1) является универсальной и может быть применена к описанию движения экзоскелета или антропоморфного робота с любым числом звеньев.

Дальнейшей задачей является разработка методов управления рассмотренными выше системами с произвольным числом звеньев переменной длины.

5. Управление целенаправленным движением системы твердых тел, содержащей звенья переменной длины. Система уравнений (4.1) содержит управляющие моменты M_{κ} и силы F_{κ} , призванные обеспечить выполнение уравнений связей, наложенных на обобщенные координаты и скорости:

$$\begin{aligned}
& f^{\mu}(q, t) = 0, \quad g^{\gamma}(q, v, t) = 0 \\
& \mu = 1, \dots, m, \quad \gamma = m + 1, \dots, r, \quad r < 4n
\end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь $v = dq/dt$, $q = (q^1, \dots, q^{4n})$ – вектор обобщенных координат, соответствующих переменным $\varphi_j, \psi_j, \xi_{j1}, \xi_{j2}$, $j = 1, \dots, n$. В новых переменных дифференциально-ал-

гебраические уравнения динамики замкнутой системы и уравнения возмущений связей запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dq^i}{dt} &= v^i \\ \frac{dv^i}{dt} &= Q^i(q, v, t) + \sum_{s=1}^S b^{is}(q, v, t) u_s\end{aligned}\quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}q^i(t_0) &= q_0^i, \quad i = 1, \dots, 4n \\ y^\mu - f^\mu(q, t) &= 0\end{aligned}\quad (5.3)$$

$$z^\rho - g^\rho(q, v, t) = 0, \quad g^\mu = \frac{df^\mu}{dt}\quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy^\mu}{dt} &= z^\mu \\ \frac{dz^\rho}{dt} &= \sum_{\mu=1}^m h_\mu^\rho(q, v, t) y^\mu + \sum_{\sigma=1}^r k_\sigma^\rho(q, v, t) z^\sigma \\ \rho &= 1, \dots, r\end{aligned}\quad (5.5)$$

Число S управляющих воздействий зависит от числа звеньев переменной длины, коэффициенты h_μ^ρ , k_σ^ρ уравнений (5.5) возмущений связей определяются из условий асимптотической устойчивости тривиального решения.

Из уравнений (5.2)–(5.5) следуют выражения управляющих воздействий

$$u_s = u^0 u_s^\tau + u_s^\nu \quad (5.6)$$

Здесь u^0 – произвольная скалярная величина, u_s^τ вычисляется как определитель, первая строка которого состоит из величин $\delta^{sl} = 0$, $l \neq s$, $\delta^{ss} = 1$, $s, l = 1, \dots, S$, последующие строки составлены из элементов матрицы $(g^{\rho s})$,

$$g^{\rho s} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\partial g^\rho}{\partial v^i} b^{is}$$

и произвольных величин $g^{\kappa s}$, $\kappa = r + 1, \dots, S - 1$, которые не обращают в нуль величину определителя. Второе слагаемое определяется выражением

$$\begin{aligned}u_s^\nu &= - \sum_{l=1}^S \delta_{sl} \sum_{\rho, \sigma=1}^r X_l g^{\rho l} \omega_{\rho\sigma} (h_\mu^\sigma y^\mu + k_\eta^\sigma z^\eta + \tilde{g}^\sigma), \\ \delta_{sl} &= 0, \quad s \neq l, \quad \delta_{ss} = 1, \quad (\omega_{\sigma\rho}) = (\omega^{\sigma\rho})^{-1}, \quad \omega^{\sigma\rho} = \sum_{l,s=1}^S g^{\sigma l} \delta_{ls} g^{\rho s}\end{aligned}$$

Выражения (5.6) управлений соответствуют асимптотической устойчивости многообразия, определяемого уравнениями связей, и при дальнейшем уточнении коэффициентов уравнений возмущений связей позволяет обеспечить стабилизацию связей при численном решении уравнений динамики замкнутой системы [5].

6. Модели лыжника-сноубордиста. В качестве примера решения прикладной задачи, модифицируем предложенный выше подход к моделированию системы с произвольным числом звеньев на случай антропоморфных систем с неголономными связями в виде лыжника-сноубордиста.

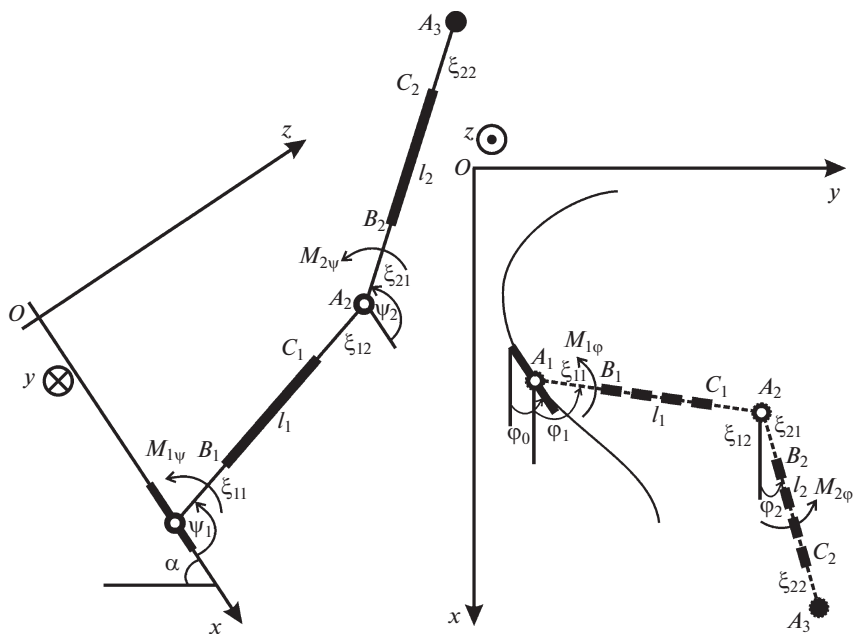


Рис. 5

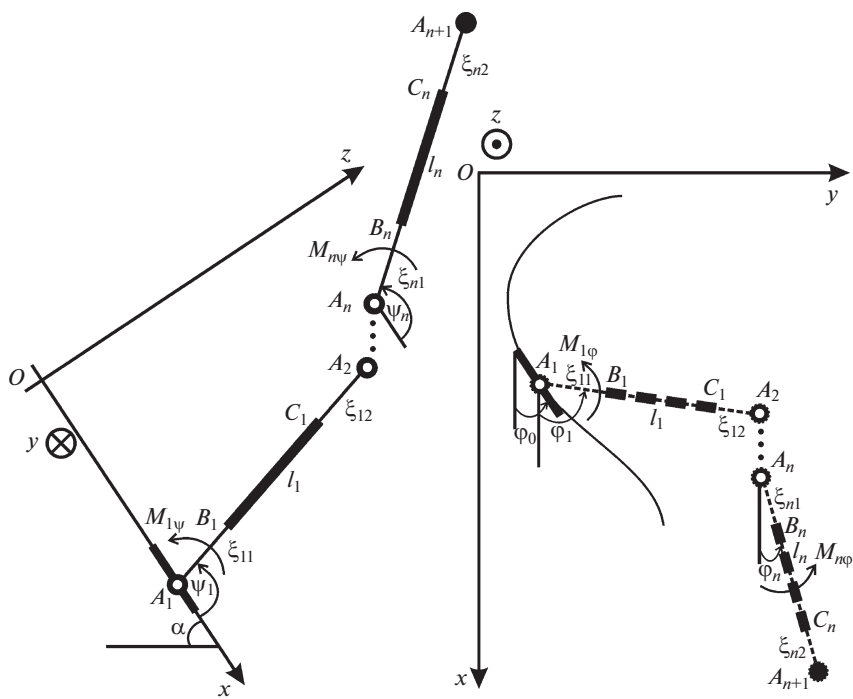


Рис. 6

получения выражения для кинетической энергии с использованием бесконечно малых участков стержня и интегрированием по весомому отрезку CD описана выше.

Кинетическая энергия всего механизма складывается из кинетической энергии лыжи, звена CD и сосредоточенной массы в точке B .

$$T = T_0 + T_{CD} + T_B \quad (7.1)$$

Кинетическая энергия механизма в выпisanном виде имеет вид:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}[\theta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I_0\dot{\phi}_0^2 + m_1\dot{\xi}_{11}^2 + m_G(\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12})^2 + \zeta(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\phi}_1^2(C_1^\Psi)^2)] + \\ & + \dot{x}[(m_1\dot{\xi}_{11} + m_G(\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12}))C_1^\Phi C_1^\Psi - \\ & - (I_1(m_G + m_1/2) + m_1\xi_{11} + m_G(\xi_{11} + \xi_{12}))(C_1^\Psi S_1^\Phi \dot{\phi}_1 + C_1^\Phi S_1^\Psi \dot{\psi}_1)] + \\ & + \dot{y}[(m_1\dot{\xi}_{11} + m_G(\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12}))S_1^\Phi C_1^\Psi + \\ & + (I_1(m_G + m_1/2) + m_1\xi_{11} + m_G(\xi_{11} + \xi_{12}))(C_1^\Psi C_1^\Phi \dot{\phi}_1 - S_1^\Phi S_1^\Psi \dot{\psi}_1)] \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $\theta = m_0 + m_1 + m_G$ – масса всего механизма в виде лыжника-сноубордиста вместе с лыжей, ногами и корпусом, $\zeta = I_1 + m_1\xi_{11}(I_1 + \xi_{11}) + m_G(I_1 + (\xi_{11} + \xi_{12}))^2$.

Сравнивая полученное выражение для кинетической энергии лыжника-сноубордиста (7.2) и отдельного звена (2.5) видно, что ее структура изменилась незначительно, только добавились слагаемые, соответствующие дополнительно введенным обобщенным координатам и массе лыжи и корпуса лыжника-сноубордиста.

Связь по поверхности контакта лыжи и снега является неголономной. Уравнение связи имеет вид:

$$\dot{x}\operatorname{tg}\varphi_0 - \dot{y} = 0 \quad (7.3)$$

Траектория сноубордиста (рис. 4) описывается синусоидой

$$y = A\sin(kx), \quad \dot{y} = Ak\cos(kx) \quad (7.4)$$

где A – амплитуда траектории. Тогда уравнение связи принимает вид:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 - Ak\cos(kx) = 0 \quad (7.5)$$

и накладывает ограничение на вариации координат:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 \cdot \delta x - \delta y = 0 \quad (7.6)$$

Для описания движения неголономной системы используем уравнения Рауса с множителями Лагранжа. В данном случае, на систему наложена одна неголономная связь (7.3). Система дифференциальных уравнений для модели, представленной на рис. 4 имеет вид:

$$\begin{aligned} & \theta \operatorname{sc}^2 \varphi_0 \ddot{x} + (\eta_1 + \vartheta_1)(C_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 - S_1^\Phi)C_1^\Psi \ddot{\phi}_1 - \\ & - (\eta_1 + \vartheta_1)(S_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 + C_1^\Phi)S_1^\Psi \ddot{\psi}_1 - (m_1 + m_G)(S_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 - C_1^\Phi)C_1^\Psi \ddot{\xi}_{11} - \\ & - m_G(S_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 - C_1^\Phi)C_1^\Psi \ddot{\xi}_{12} - (\eta_1 + \vartheta_1)(S_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 + C_1^\Phi)C_1^\Psi \ddot{\phi}_1^2 - \\ & - (\eta_1 + \vartheta_1)(S_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 + C_1^\Phi)C_1^\Psi \dot{\psi}_1^2 - 2(\eta_1 + \vartheta_1)(C_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 - S_1^\Phi)S_1^\Psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 + \\ & + (m_1 + m_G)(C_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 - S_1^\Phi)C_1^\Psi \dot{\phi}_1 \dot{\xi}_{11} + m_G(C_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 - S_1^\Phi)C_1^\Psi \dot{\phi}_1 \dot{\xi}_{12} - \\ & - 2(m_1 + m_G)(S_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 - C_1^\Phi)C_1^\Psi \dot{\psi}_1 \dot{\xi}_{11} - 2m_G(C_1^\Phi \operatorname{tg}\varphi_0 - S_1^\Phi)C_1^\Psi \dot{\psi}_1 \dot{\xi}_{12} + \\ & + \theta \operatorname{sc}^2 \varphi_0 \operatorname{tg}\varphi_0 \dot{x}\dot{\phi}_0 = \theta g_1 + R_x + R_y \operatorname{tg}\varphi_0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\ddot{\phi}_0 = 0 \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} & (\eta_l + \vartheta_l)(C_1^\varphi \operatorname{tg} \phi_0 - S_1^\varphi) C_1^\psi \ddot{x} + \zeta_{11} (C_1^\psi)^2 \ddot{\phi}_1 + 2(\eta_l + \vartheta_l) (C_1^\psi)^2 \dot{\xi}_{11} \dot{\phi}_1 + \\ & + 2\vartheta_l (C_1^\psi)^2 \dot{\xi}_{12} \dot{\phi}_1 - 2\zeta_l C_1^\psi S_1^\psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 + \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} & + (\eta_l + \vartheta_l) C_1^\psi C_1^\varphi \operatorname{sc}^2 \phi_0 \dot{x} \dot{\phi}_0 = M_{1\varphi} + R_x (\xi_{11} + l_1) \sin \phi_1 + R_y (\xi_{11} + l_1) \cos \phi_1 \\ & - (\eta_l + \vartheta_l) (S_1^\varphi \operatorname{tg} \phi_0 + C_1^\varphi) S_1^\psi \ddot{x} + \zeta_l \ddot{\psi}_1 + \zeta_l C_1^\psi S_1^\psi \dot{\phi}_1^2 + 2(\eta_l + \vartheta_l) \dot{\xi}_{11} \dot{\psi}_1 + \\ & + 2\vartheta_l \dot{\xi}_{12} \dot{\psi}_1 + g \eta_l C_1^\psi - \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} & - (\eta_l + \vartheta_l) S_1^\varphi S_1^\psi \operatorname{sc}^2 \phi_0 \dot{x} \dot{\phi}_0 = M_{1\psi} + R_x (\xi_{11} + l_1) \sin \psi_1 + R_z (\xi_{11} + l_1) \cos \psi_1 \\ & (m_1 + m_G) (S_1^\varphi \operatorname{tg} \phi_0 + C_1^\varphi) C_1^\psi \ddot{x} + (m_1 + m_G) \dot{\xi}_{11} + m_G \dot{\xi}_{12} - (\eta_l + \vartheta_l) (C_1^\psi)^2 \dot{\phi}_1^2 - \\ & - (\eta_l + \vartheta_l) \dot{\psi}_1^2 + g m_1 S_1^\psi + (m_1 + m_G) S_1^\varphi C_1^\psi \operatorname{sc}^2 \phi_0 \dot{x} \dot{\phi}_0 = F_1 \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} & m_G (S_1^\varphi \operatorname{tg} \phi_0 + C_1^\varphi) C_1^\psi \ddot{x} + m_G \dot{\xi}_{11} + m_G \dot{\xi}_{12} - \vartheta_l (C_1^\psi)^2 \dot{\phi}_1^2 - \vartheta_l \dot{\psi}_1^2 + g m_G S_1^\psi + \\ & + m_G S_1^\varphi C_1^\psi \operatorname{sc}^2 \phi_0 \dot{x} \dot{\phi}_0 = F_2 \end{aligned} \quad (7.12)$$

где $\zeta_1 = I_1 + m_1 \xi_{11} (l_1 + \xi_{11}) + m_G (l_1 + (\xi_{11} + \xi_{12}))^2$, $\eta_l = m_1 (\xi_{11} + l_1/2)$, $\vartheta_l = m_G (\xi_{11} + l_1 + \xi_{12})$, $\theta = m_0 + m_1 + m_G$, $\theta_l = m_1 + m_G$, $C_1^\psi = \cos \psi_1$, $S_1^\psi = \sin \psi_1$.

Были составлены также дифференциальные уравнения движения для сноубордиста с двумя звеньями переменной длины. Система дифференциальных уравнений для модели сноубордиста сохраняет вид (4.1). Однако, матрицы становятся матрицами следующего набора аргументов: $A_K(x, \phi_0, \phi, \psi, \xi_\alpha)$, нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $k = 1, \dots, 6$, где 1 соответствует обобщенной координате x , 2 — ϕ_0 , 3 — ϕ , 4 — ψ , 5, 6 — ξ_α ($\alpha = 1, 2$ — номер несомого участка переменной длины на звене). Теперь в векторы обобщенных координат включаются дополнительные координаты: $\phi = (x, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)^T$ и $\psi = (x, \phi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)^T$; $\xi_\alpha = (x, \phi_0, \xi_{1\alpha}, \dots, \xi_{n\alpha})^T$; $l = (x, \phi_0, l_1, \dots, l_n)^T$. $\dot{\Phi} = \operatorname{diag}(\dot{x}, \dot{\phi}_0, \dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n)$, $\dot{\Psi} = \operatorname{diag}(\dot{x}, \dot{\phi}_0, \dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_n)$ — диагональные матрицы.

Матрицы A_K , B_K и т.д. распадаются на блочные матрицы, с различными блоками, соответствующими первым двум обобщенным координатам, и остальным обобщенным координатам, аналогично тому, как это было в модели антропоморфного механизма в безопорной и двухопорной фазах движения, рассмотренных в работе [10].

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{array}{cc} a_{11}(x, \phi_0, \phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) & 0 \\ 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{c} \{ a_{13}(x, \phi_0, \phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \dots a_{1n}(x, \phi_0, \phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \} \\ 0 \dots 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a_{31}(x, \phi_0, \phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \quad 0 \\ \dots \quad \dots \\ a_{n1}(x, \phi_0, \phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \quad 0 \end{array} & \begin{array}{c} \{ a_{33}(\phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \dots a_{3n}(\phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n3}(\phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \dots a_{nn}(\phi_i \psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \end{array} \end{array} \right) \quad (7.13)$$

Были получены обобщения матриц для модели n -звенного лыжника-сноубордиста. Приведем, для примера, обобщающие формулы для матрицы A . Матрица A распалась на блоки, показанные в формуле (7.13). Верхний левый блок матрицы A (показанный сплошной линией), содержащий первые две строки и столбца дает уравнения, описывающие движение точки крепления ноги к лыже

$$a_{11} = \sum_{k=0}^n (m_k + m_G), \quad a_{22} = 1, \quad a_{2j} = a_{j2} = 0 \quad (i = j \neq 2) \quad (7.14)$$

Формулу для части матрицы A блоков, содержащих информацию о движении лыжи и неголономной связи, показанных штрих-пунктирным выделением, запишем только для верхней строки, так как эти блоки являются симметрическими. Как и прежде i – номер строки, j – номер столбца. Для верхнего правого блока: $i = 1, j = 3, 4, \dots, n$, при этом $a_{1j} = a_{i1}$.

$$a_{1j} = (\eta_{j-2} + \vartheta_{j-2,2})(C_{j-2}^\varphi \operatorname{tg} \varphi_0 - S_{j-2}^\psi) C_{j-2}^\psi \quad (7.15)$$

Формула для части матрицы A блока, расположенного снизу справа и выделенного пунктиром, содержащего информацию об угловых переменных представим следующим образом. Часть матрицы A является симметрической, поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если i – номер строки, j – номер столбца, то $i, j = 1, 2, \dots, n$, при этом $j \geq i$.

Элементы симметрического блока матрицы A имеют вид:

$$a_{ij} = (\delta_{ij} \zeta_{j-2} + (1 - \delta_{ij})(\eta_{j-2} + \vartheta_{j-2,2}) \cos(\varphi_{i-2} - \varphi_{j-2})) \cos \psi_{i-2} \cos \psi_{j-2} \quad (7.16)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$

$$\begin{aligned} \zeta_j &= I_j + m_j(\xi_{j1}(l_j + \xi_{j1}) + l_{j+1}(2(\xi_{j1} + \xi_{j2}) + l_j)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n m_{j+1}(\xi_{j1} + \xi_{j2})^2 + m_G(l_j + (\xi_{j1} + \xi_{j2}))^2, \end{aligned}$$

$$\eta_j = m_j \left(\xi_{j1} + l_j/2 + \sum_{j=1}^n l_{j+1} \right) + \sum_{j=1}^n (\xi_{j1} + \xi_{j2}), \quad \vartheta_j = m_G(\xi_{j1} + l_j + \xi_{j2})$$

Остальные элементы: $a_{ji} = a_{ij}$. Эта формула аналогична выражению (4.2), однако, ввиду добавления элементов в модели и увеличившейся громоздкости записана в более компактных выражениях, а не в полностью выписанном виде.

Таким образом, на основании формулы (4.2) возможно построить выражение (7.16), что позволяет упростить получение системы дифференциальных уравнений движения.

8. Численное моделирование динамики лыжника-сноубордиста. Рассмотрим динамику модели, состоящей из двух звеньев. Для этого систему уравнений движения (7.7)–(7.12) и связей (7.3), (7.5) необходимо дополнить с целью удержания звеном околорытального положения. Дополнительные связи позволяют однозначно определить управляющие воздействия, обеспечивающие заданное состояние звеньев.

Рассмотрим следующий набор связей:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = 0 \quad (8.1)$$

$$(\xi_{11} + l_1) \sin \psi_1 = l_c \quad (8.2)$$

где l_c – заданное значение совместной длины.

Неголономная связь (7.3) может быть учтена, применив метод Чаплыгина. Связь (8.1) можно сразу учесть в выражении для функции Лагранжа. Таким образом, связи (8.2) и (5.5) определяют управляющие воздействия для движения по φ_0 , ξ_{11} и ψ_1 .

Для анализа полученной системы (7.7)–(7.12), (7.3), (7.5), (8.1) и (8.2) используется численное интегрирование при помощи разностной схемы первого порядка. Для получения устойчивого численного решения применяется метод стабилизации связей.

Рассмотрим значение отклонений численного решения от уравнений связей со временем, представленном на рис. 7, 8. По рисункам видно, что управляющее воздействие, полученное численным методом с учетом стабилизации связей обеспечивает почти вертикальное положение верхнего звена.

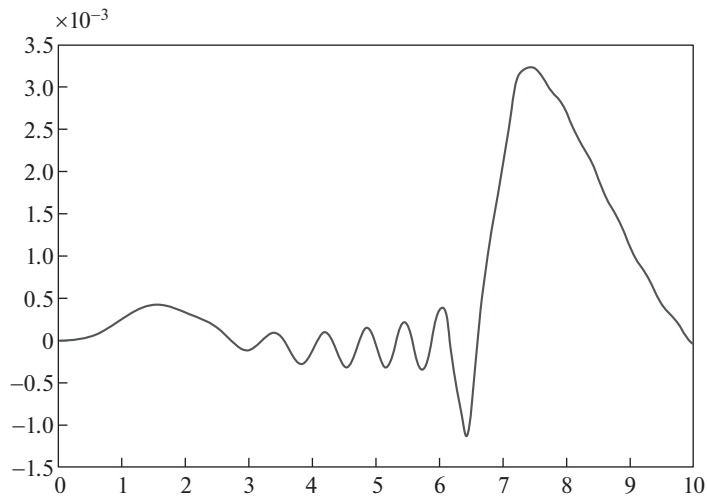


Рис. 7

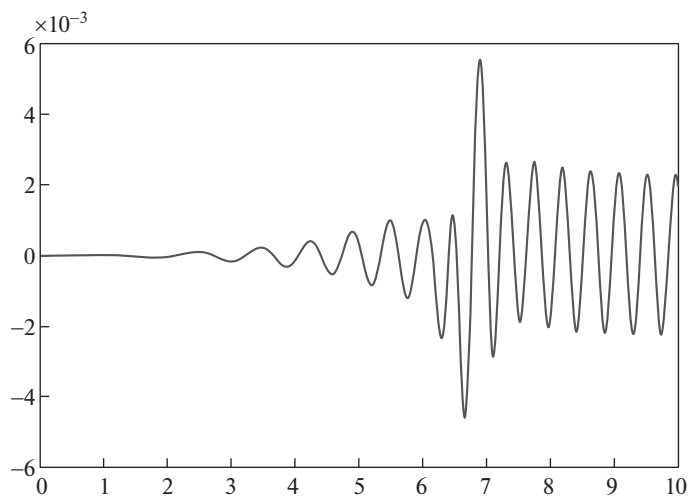


Рис. 8

9. Заключение. Разработана динамическая модель системы твердых тел с произвольным числом звеньев переменной длины, соединенных между собой шарнирами. Предложен матричный метод записи системы дифференциальных уравнений движения и получены обобщающие формулы для матриц, одна из которых приводится в качестве примера. Поставлена задача управления такой системой на основе метода стабилизации связей.

В качестве примера использования разработанной механической системы предложена пространственная модель лыжника-сноубордиста с неголономной связью и звеньями переменной длины. Каждое звено переменной длины состоит из двух невесо-

мых участков переменной длины и абсолютно твердого весомого звена между ними. Проведено численное моделирование управляемого движения лыжника-сноубордиста. Установлено, что метод стабилизации связи позволяет реализовывать управляемое, устойчивое, целенаправленное движение такой неустойчивой системой как лыжник-сноубордист. Результаты моделирования могут быть использованы в дальнейшем для решения задач управления антропоморфными системами с неголономными связями.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 19-08-00261 А, и Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН “5-100”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вукобратович М., Христич Д. Управление антропоморфическими системами // Управление в пространстве. М.: Наука, 1976. Т. 2. С. 180–187.
2. Иванов А.В. Исследование математической модели экзоскелетона нижних конечностей // Ломоносовские чтения: тезисы докладов науч. конф. (16–25 апреля 2012, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова). М.: Издательство Московского университета, 2012. С. 84.
3. Лавровский Э.К., Письменная Е.В. Алгоритмы управления экзоскелетом нижних конечностей в режиме одноопорной ходьбы по ровной и ступенчатой поверхностям // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2014. № 1. С. 44–51.
4. Павловский В.Е. и др. Биомехатронный комплекс нейрореабилитации — концепция, конструкция, модели и управление // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 111. 19 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-111>
5. Механика и управление экзоскелетами нижних конечностей для нейрореабилитации спинальных больных / А.П. Алисейчик, И.А. Орлов, В.Е. Павловский, В.В. Павловский, А.К. Платонов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. С. 319.
6. Формальский А.М. Об одном способе управления экзоскелетом // Ломоносовские чтения: тезисы докладов науч. конф. (16–25 апреля 2012, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова). М.: Издательство Московского университета, 2012. С. 151–152.
7. Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
8. Белецкий В.В. Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 288 с.
9. Бербюк В.Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наукова думка, 1989. 192 с.
10. Охоцимский Д.Е. и др. Опыт проектирования многоцелевого гидравлического шагающего шасси // Механика и управление движением шагающих машин. 1995. № 2. С. 103–111.
11. Борисов А.В. Механика пространственной модели экзоскелета и антропоморфного робота // Вопросы оборонной техники. Научно-технический журнал. Технические средства противодействия терроризму. Серия 16. Вып. 3–4. 2018. С. 46–55.
12. Борисов А.В., Розенблат Г.М. Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 148–174.
13. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М. Наука, 1967. 519 с.
14. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация. М.: Издательство ИПМех РАН (Препринт № 1128), 2016. 154 с.
15. Мухарлямов Р.Г. Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 15–28.
16. Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. Применение метода стабилизации связей к задачам неголономной механики // LII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики

- частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. Москва, РУДН, 17–19 мая 2016 г. Москва: РУДН, 2016. С. 112–116.
17. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А.* Избранные задачи неголономной механики. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 289 с.
 18. *Калёнова В.И., Каранетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А.* Неголономные механические системы и стабилизация движения // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2005. Т. 11. № 7. С. 117–158.
 19. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им // *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. № 5. С. 511–522.
 20. *Борисов А.В.* Дифференциальные уравнения движения плоских стержневых систем со звеньями переменной длины в безопорной и двухопорной фазах движения для моделирования опорно-двигательного аппарата человека, экзоскелета и антропоморфного робота // *Международный научный теоретико-практический альманах 2017*. Вып. 2. Смоленск, 2017. С. 153–165.