ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 157–164

УДК 539.374,539.214

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

© 2021 г. Н. В. Минаева[a],*, Д. В. Сабынин[a]

[a] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

**e-mail: nminaeva@yandex.ru*

Поступила в редакцию 01.11.2020 г.
После доработки 15.11.2020 г.
Принята к публикации 02.12.2020 г.

Найдено решение методом возмущений с точностью до величин второго порядка малости, описывающее состояние неоднородной упругопластической толстостенной трубы, находящейся под действием сжимающих усилий. Отклонения контура поперечного сечения трубы от окружности и неоднородность материала характеризуются независимыми малыми параметрами. Получено условие, при выполнении которого в случае экспериментального анализа состояния трубы средние значения напряжений и перемещений будут близки к значениям при осесимметричном состоянии.

Ключевые слова: толстостенная труба, метод малого параметра, сходимость, стохастическая неоднородность

DOI: 10.31857/S0572329921020136

Разработка аналитических методов решения стохастических задач сталкивается с серьезными трудностями, основными из которых являются нелинейность определяющих уравнений. Одним часто используемых методов аналитического решения стохастических краевых задач является метод возмущений. В [1, 2] разработаны методы решений стохастических краевых задач для квазиоднородных линейноупругих материалов. Применение метода малого параметра при исследовании напряженно-деформированного состояния упругопластических тел приведено в монографии Д.Д. Ивлева, Л.В. Ершова [3]. Влияние случайных возмущений механических характеристик материалов на поля деформации и напряжений исследуется во многих работах [4–7]. В [6, 7] метод малого параметра используется при исследовании влияния стохастических неоднородностей материала в задачах ползучести. Было получено аналитическое решение краевой задачи для толстостенной трубы под действием внутреннего давления до третьего приближения [7]. В работах [8, 9] используется метод малого параметра при решении нелинейных краевых задач для элементов конструкций с возмущенными границами. Этот подход связан с трудностями вычислительного характера, поэтому при решении конкретных стохастических задач обычно ограничиваются первым приближением.

Оценка погрешности решений и анализ сходимости полученных разложений проводились в основном в некоторых частных случаях, а также путем сравнения с известными точными или численными решениями [6, 10, 11].

Вопросы получения решений краевых задач с более высоким порядком членов разложения для неодномерных задач, проблема сходимости решений пока остаются мало изученными.

В данной работе рассматривается поведение неоднородной упругопластической толстостенной трубы с поперечным сечением, близком к круговому кольцу, при сжатии. Труба выполнена из несжимаемого материала, находится под действием сжимающих внутреннего и внешнего давлений. В упругой области ее состояние описывается решением следующей задачи [3]:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^e}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^e}{\partial\theta}+\frac{\sigma_\rho^e-\sigma_\theta^e}{\rho}=0,\quad \frac{\partial\tau^e}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^e}{\partial\theta}+\frac{2\tau^e}{\rho}=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial u^e}{\partial\rho}+\frac{\partial v^e}{\partial\theta}+u^e=0 \tag{2}$$

$$\sigma_\rho^e-\sigma_\theta^e=4\frac{\partial u^e}{\partial\rho},\quad \tau^e=\frac{\partial v^e}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^e}{\partial\theta}-\frac{v^e}{\rho} \tag{3}$$

$$\sigma_n^e\Big|_{\rho=\Psi_2(\theta)}=-q_2;\quad \tau_n^e\Big|_{\rho=\Psi_2(\theta)=0} \tag{4}$$

В пластической зоне уравнения равновесия и условие несжимаемости имеют вид аналогичный (1), (2). Реологические соотношения будут следующими:

$$(\sigma_\rho^p-\sigma_\theta^p)^2+4(\tau^p)^2=4k^2,\quad 4\frac{\partial u^p}{\partial\rho}\tau^p-\left(\frac{\partial v^p}{\partial\rho}-\frac{v^p}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^p}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^p-\sigma_\theta^p)=0 \tag{5}$$

Граничные условия на внутреннем контуре трубы

$$\sigma_n^p\Big|_{\rho=\Psi_1(\theta)}=-q_1,\quad \tau_n^p\Big|_{\rho=\Psi_1(\theta)}=0 \tag{6}$$

В (1)–(6) характеристики материала примем в виде $G=1+\varepsilon_1 f_1(\theta)$, $k=k_0/G_0+\varepsilon_1 f_1(\theta)$, где k_0 – предел текучести однородного материала. Все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к модулю упругости однородного материала G_0. Компоненты вектора перемещений отнесены к внешнему радиусу сечения. Функции $\Psi_1(\theta)$, $\Psi_2(\theta)$ описывают форму поперечного сечения трубы в деформированном состоянии. В ненагруженном эти контуры с точностью до малых параметров характеризуются функциями $r=\alpha+\varepsilon_2 f_2(\theta)$ и $r=1+\varepsilon_2 f_2(\theta)$. Здесь ε_1 и ε_2 – независимые случайные величины. К (1)–(6) следует добавить условия сопряжения решений на контуре $\rho=\rho_s(\theta)$, отделяющем пластическую зону от упругой [3].

Воспользуемся методом возмущений для решения задачи, согласно которому:

$$\sigma_\rho^p=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sigma_\rho^{mnp}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n$$

$$\sigma_\theta^p=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sigma_\theta^{mn\,p}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n,\ \ldots\ v^e=\sum_{m,n=0}^{\infty}v^{mne}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n \tag{7}$$

$$\rho_s=\sum_{m,n=0}^{\infty}\rho_s^{mn}(\theta)\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n$$

где в качестве нулевого приближения используется осесимметричное решение

$$\begin{gathered}
\sigma_\rho^{0p} = 2\kappa\ln\rho + C_1; \quad \sigma_\theta^{0p} = 2\kappa + 2\kappa\ln\rho + C_1, \\
\sigma_\rho^{0e} = A\rho^{-2} + C_2; \quad \sigma_\theta^{0e} = -A\rho^{-2} + C_2 \\
\tau^{0p} = \tau^{0e} \equiv 0; \quad u^{0p} = u^{0e} = -A\rho^{-1}, \quad v^{0p} = v^{0e} \equiv 0 \\
\kappa = \pm k/G, \quad A = -\frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2, \quad C_1 = -q_1 - 2\kappa\ln\left[\alpha + \frac{\kappa}{2\alpha}(\rho_s^0)^2\right] \\
C_2 = \kappa - q_2 + 2\kappa\ln\rho_s^0 - 2\ln\left[\alpha(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\kappa}{2\alpha}\rho_s^0\right]
\end{gathered} \tag{8}$$

Величина ρ_s^0 находится из уравнения

$$q_2 - q_1 + \kappa - 2\kappa\ln\left[\alpha(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\kappa}{2}\rho_s^0\alpha^{-1}\right] - \kappa(\rho_s^0)^2\left[1 + \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2\right]^{-2} = 0 \tag{9}$$

Ряды (7) будут сходящимися, если удовлетворяются требования, содержащиеся в критерии аналитичности по малым параметрам в окрестности $\varepsilon_i = 0$ $(i = 1, 2)$ [13]. В результате проведенных исследований было получено следующее условие

$$q_1 - q_2 = q_*, \quad q_1 - q_2 = q_{**} \tag{10}$$

Здесь через q_* наибольший отрицательный корень системы уравнений (9) и (11) при $q_2 = 0$, $\kappa = -k/G$,

$$\begin{gathered}
\Delta = \kappa(\rho_s^0)^4\left\{\kappa(\rho_s^0)^2\alpha^{-2} - 1 - \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2 - \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^{-2} + 2\kappa\ln\frac{\alpha}{\rho_s^0} + \right. \\
\left. + \left[(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\kappa}{2}\rho_s^0\right]^4\right\} = 0
\end{gathered} \tag{11}$$

а через q_{**} — наименьший положительный корень этой системы уравнений при $q_2 = 0$, $\kappa = k/G$.

Таким образом, если значения параметров сжимающих усилий q_1, q_2 не выходят за пределы области, ограниченной (10), то решение исходной задачи будет аналитическими функциями параметров ε_i в окрестности точки $\varepsilon_i = 0$.

Для определения компонент разложения (7) были получены задачи, в которых уравнения равновесия, условие несжимаемости аналогичны (1) и (2), а реологические соотношения и граничные условия принимают вид:

Для компонент с индексом “10”

$$\sigma_\rho^{10e} - \sigma_\theta^{10e} = 4\frac{\partial u^{10e}}{\partial\rho}, \quad \tau^{10e} = \frac{\partial v^{10e}}{\partial\rho} - \frac{v^{10e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10e}}{\partial\theta} \tag{12}$$

$$\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p} = 0, \quad 4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{10p} = \left(\frac{\partial v^{10p}}{\partial\rho} - \frac{v^{10p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) \tag{13}$$

при $\rho = g_0 = \rho_0 + u^0(\rho_0)$ ($\rho_0 = 1$ и $\rho_0 = \alpha$)

$$\begin{gathered}
\sigma_\rho^{10} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}\left[\left(1 - \frac{u^0(\rho_0)}{\rho_0}\right)f_2(\theta) + u^{10}(\theta, \rho_0)\right] = 0 \\
\tau^{10} + \frac{\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0}{\rho}\left[\left(1 - \frac{u^0(\rho_0)}{\rho_0}\right)\frac{df_2}{d\theta} + \frac{\partial u^{10}(\theta, \rho_0)}{\partial\theta}\right] = 0
\end{gathered} \tag{14}$$

Для компонент с индексом “01”

$$\begin{gathered}(\sigma_\rho^{0p}-\sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{01p}-\sigma_\theta^{01p})=4\kappa f_1(\theta),\\ 4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{01p}=\left(\frac{\partial v^{01p}}{\partial\rho}-\frac{v^{01p}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p}-\sigma_\theta^{0p})\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{01e}-\sigma_\theta^{01e}=4\left(\frac{\partial u^{01e}}{\partial\rho}+f_1(\theta)\frac{\partial u^{0e}}{\partial\rho}\right),\\ \tau^{01e}=\frac{\partial v^{01e}}{\partial\rho}-\frac{v^{01e}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01e}}{\partial\theta}+f_1(\theta)\tau^{0e}\end{gathered}\tag{16}$$

при $\rho=g_0=\rho_0+u^0(\rho_0)$ ($\rho_0=1$ и $\rho_0=\alpha$)

$$\sigma_\rho^{01}+\frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}u^{01p}(\theta,\rho_0)=0,\qquad \tau^{01}+\frac{\sigma_\rho^0-\sigma_\theta^0}{\rho}\frac{\partial u^{01}}{\partial\theta}(\theta,\rho_0)=0\tag{17}$$

Вид граничных условий (14) при пренебрежении u^{10} соответствуют приведенным в [3], а условия (17) с точностью до обозначений совпадает с полученными в [12].

Для компонент с индексом “20” реологические соотношения упругой зоны аналогичны (12), а для пластической области принимают вид

$$\begin{gathered}2(\sigma_\rho^{0p}-\sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{20p}-\sigma_\theta^{20p})+(\sigma_\rho^{10p}-\sigma_\theta^{10p})^2+4(\tau^{10p})^2=0\\ 4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{20p}-\left(\frac{\partial v^{20p}}{\partial\rho}-\frac{v^{20p}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{20p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p}-\sigma_\theta^{0p})=\\ =\left(\frac{\partial v^{10p}}{\partial\rho}-\frac{v^{10p}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{10p}-\sigma_\theta^{10p})-4\frac{\partial u^{10p}}{\partial\rho}\tau^{10p}\end{gathered}\tag{18}$$

Граничные условия при $\rho=g_0=\rho_0+u^0(\rho_0)$ ($\rho_0=1$ и $\rho_0=\alpha$) следующие:

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{20}+\frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}g^{20}+\frac{\partial\sigma_\rho^{10}}{\partial\rho}g^{10}+\frac{1}{2}\frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}(g^{10})^2+(\sigma_\rho^0-\sigma_\theta^0)\left(\frac{\dot g^{10}}{g^0}\right)^2-2\tau^{10}\frac{\dot g^{10}}{g^0}=0;\\ \tau^{20}+\left(\frac{\partial(\sigma_\rho^0-\sigma_\theta^0)}{\partial\rho}\frac{\dot g^{10}}{g^0}+\frac{\partial\tau^{10}}{\partial\rho}\right)g^{10}+\\ +(\sigma_\rho^0-\sigma_\theta^0)\left(\frac{g^{10}\dot g^{10}}{(g^0)^2}-\frac{\dot g^{20}}{g^0}\right)^2+(\sigma_\rho^{10}-\sigma_\theta^{10})\frac{\dot g^{10}}{g^0}=0\end{gathered}\tag{19}$$

Здесь точка наверху означает дифференцирование по θ.

Для приближения “02” физические соотношения имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{02e}-\sigma_\theta^{02e}=4\left(\frac{\partial u^{02e}}{\partial\rho}+f_1(\theta)\frac{\partial u^{01e}}{\partial\rho}\right)\\ \tau^{02e}=\frac{\partial v^{02e}}{\partial\rho}-\frac{v^{02e}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{02e}}{\partial\theta}+f_1(\theta)\left(\frac{\partial v^{01e}}{\partial\rho}-\frac{v^{01e}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01e}}{\partial\theta}\right)\\ 2(\sigma_\rho^{0p}-\sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{02p}-\sigma_\theta^{02p})+(\sigma_\rho^{01p}-\sigma_\theta^{01p})^2+4(\tau^{01p})^2=4\left(f_1(\theta)\right)^2\\ 4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{02p}-\left(\frac{\partial v^{02p}}{\partial\rho}-\frac{v^{02p}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{02p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p}-\sigma_\theta^{0p})=\\ =\left(\frac{\partial v^{01p}}{\partial\rho}-\frac{v^{01p}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{01p}-\sigma_\theta^{01p})-4\frac{\partial u^{01p}}{\partial\rho}\tau^{01p}\end{gathered}\tag{20}$$

Граничные условия в этом случае аналогичны (19), в которых следует индексы “20” и “10” заменить соответственно на “02” и “01”.

Для приближения “11” получены реологические соотношения в виде

$$\sigma_\rho^{11e} - \sigma_\theta^{11e} = 4\left(\frac{\partial u^{11e}}{\partial\rho} + f_1(\theta)\frac{\partial u^{10e}}{\partial\rho}\right)$$

$$\tau^{11e} = \frac{\partial v^{11e}}{\partial\rho} - \frac{v^{11e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{11e}}{\partial\theta} + f_1(\theta)\left(\frac{\partial v^{10e}}{\partial\rho} - \frac{v^{10e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10e}}{\partial\theta}\right)$$

$$(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{11p} - \sigma_\theta^{11p}) + (\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p})(\sigma_\rho^{01p} - \sigma_\theta^{01p}) + 4\tau^{01p}\tau^{10p} = 0 \tag{21}$$

$$4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{11p} - \left(\frac{\partial v^{11p}}{\partial\rho} - \frac{v^{11p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{11p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) =$$

$$= \left(\frac{\partial v^{01p}}{\partial\rho} - \frac{v^{01p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p}) + \left(\frac{\partial v^{10p}}{\partial\rho} - \frac{v^{10p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{01p} - \sigma_\theta^{01p}) -$$

$$- 4\left(\frac{\partial u^{10p}}{\partial\rho}\tau^{01p} + \frac{\partial u^{01p}}{\partial\rho}\tau^{10p}\right)$$

Граничные условия при $\rho = g_0 = \rho_0 + u^0(\rho_0)$ ($\rho_0 = 1$ и $\rho_0 = \alpha$) такие

$$\sigma_\rho^{11} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}g^{11} + \frac{d^2\sigma_\rho^0}{d\rho^2}g^{01}g^{10} + \frac{\partial\sigma_\rho^{01}}{\partial\rho}g^{10} + \frac{\partial\sigma_\rho^{10}}{\partial\rho}g^{01} = 0$$

$$\tau^{11} + \frac{\partial\tau^{01}}{\partial\rho}g^{10} + \frac{\partial\tau^{10}}{\partial\rho}g^{01} = 0 \tag{22}$$

В (19), (22) компоненты разложения функции, характеризующей контуры сечения трубы в деформированном состоянии, будут следующими (с учетом $v^0 = 0$, $\dot{g}_0 = 0$):

$$g^{10}(\theta,\rho_0) = u^{10} + \left(\frac{du^0}{d\rho} + 1\right)f_2(\theta), \quad g^{01}(\theta,\rho_0) = u^{01}$$

$$g^{20}(\theta,\rho_0) = u^{20} + \frac{d^2u^0}{d\rho^2}\frac{(f_2(\theta))^2}{2} + f_2(\theta)\frac{\partial u^{10}}{\partial\rho} + \frac{(v^{10})^2 - (u^{10})^2 - 2u^{10}\left(\frac{du^0}{d\rho} + 1\right)f_2(\theta) - 2v^{10}\dot{g}^{10}}{2g_0}$$

$$g^{02}(\theta,\rho_0) = u^{02} + \frac{(v^{01})^2 - 2v^{01}\dot{g}^{01}}{2g_0},$$

$$g^{11}(\theta,\rho_0) = u^{11} + f_2(\theta)\frac{\partial u^{01}}{\partial\rho} + \frac{v^{01}v^{10} - v^{01}\dot{g}^{10} - v^{10}\dot{g}^{01}}{g_0}$$

Условия сопряжения при $\rho = \rho_s^0 + u^0(\rho_s^0)$ имеют вид вполне аналогичный соотношениям из [3].

Поскольку задачи, включающие (18)–(22), весьма сложны для нахождения аналитического решения, ограничимся рассмотрением часто встречающегося на практике случая, когда $|A/\rho_0| \ll 1$.

Для функций, характеризующих отклонение свойств материала трубы от однородных и контуров сечения от окружностей, $f_i(\theta) = \cos\theta$ ($i = 1, 2$) было найдено решение с точностью до величин второго порядка малости.

Поскольку случайные величины ε_1 и ε_2 являются независимыми, то

$$\langle\sigma_\rho^p\rangle = \sigma_\rho^{0p} + \langle\varepsilon_1^2\rangle\sigma_\rho^{20p} + \langle\varepsilon_2^2\rangle\sigma_\rho^{02p}, \ldots, \langle v^e\rangle = v^{0e} + \langle\varepsilon_1^2\rangle v^{20e} + \langle\varepsilon_2^2\rangle v^{02e} \tag{23}$$

где

$$\sigma_{\rho}^{20p} = \frac{\sqrt{3}}{\rho}\left(-C_1^{20}\sin(\sqrt{3}\ln\rho) + C_2^{20}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - \frac{(C_1^{10})^2}{2\sqrt{3}\kappa\rho}\right)\cos 2\theta + \frac{(C_1^{10})^2}{4\kappa\rho^2}$$

$$\sigma_{\theta}^{20p} = -\frac{\sqrt{3}}{\rho}(C_1^{20}\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - C_2^{20}\cos(\sqrt{3}\ln\rho))\cos 2\theta - \frac{(C_1^{10})^2}{4\kappa\rho^2}$$

$$\tau^{20p} = \frac{\sqrt{3}}{2\rho}\left((C_1^{20} - \sqrt{3}C_2^{20})\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - (C_2^{20} + \sqrt{3}C_1^{20})\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \frac{(C_1^{10})^2}{2\sqrt{3}\kappa\rho}\right)\sin 2\theta$$

$$u^{20p} = -\left(\left(2C_3^{20} + \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}C_2^{20}\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \right.$$

$$\left. + \left(2C_4^{20} - \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}C_1^{20}\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - \frac{C_1^{10}\rho_s^0}{6\kappa\rho^3} - \frac{C_1^{10}C_3^{10}}{2\kappa\rho}\right)\cos 2\theta$$

$$v^{20p} = \left(\left(C_3^{20} + \sqrt{3}C_4^{20} - \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}(C_2^{20} + \sqrt{3}C_1^{20})\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \right.$$

$$\left. + \left(C_4^{20} - \sqrt{3}C_3^{20} + \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}(C_1^{20} - \sqrt{3}C_2^{20})\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - \frac{C_1^{10}\rho_s^0}{6\kappa}\rho^{-3}\right)\sin 2\theta$$

$$\sigma_{\rho}^{20e} = 4(2C_5^{20}\rho^{-2} - C_6^{20} + 3C_7^{20}\rho^{-4})\cos 2\theta + \frac{3}{4}A\rho^{-2}$$

$$\sigma_{\theta}^{20e} = 4(C_6^{20} + 6C_8^{20}\rho^2 - 3C_7^{20}\rho^{-4})\cos 2\theta - \frac{3}{4}A\rho^{-2}$$

$$\tau^{20e} = 4(C_5^{20}\rho^{-2} + C_6^{20} + 3C_7^{20}\rho^{-4} + 3C_8^{20}\rho^2)\sin 2\theta$$

$$u^{20e} = -2(C_5^{20}\rho^{-1} + C_6^{20}\rho + C_7^{20}\rho^{-3} + C_8^{20}\rho^3 + C_9^{20})\cos 2\theta - \frac{3}{4}A\rho^{-1}$$

$$v^{20e} = (2C_6^{20}\rho - 2C_7^{20}\rho^{-3} + 4C_8^{20}\rho^3 - C_9^{20})\sin 2\theta, \quad \rho_s^{20} = C_9^{20}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\rho}^{02p} = \frac{\sqrt{3}}{\rho}\left(-C_1^{20}\sin(\sqrt{3}\ln\rho) + C_2^{20}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - \frac{(C_2^{01})^2}{2\sqrt{3}\kappa\rho} - \frac{2C_2^{01}}{3\sqrt{3}\kappa}\right)\cos 2\theta + \frac{(C_2^{01})^2}{4\kappa\rho^2} + \frac{2C_2^{01}}{3\kappa\rho} + \frac{1}{9\kappa}$$

$$\sigma_{\theta}^{02p} = -\frac{\sqrt{3}}{\rho}(C_1^{20}\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - C_2^{20}\cos(\sqrt{3}\ln\rho))\cos 2\theta - \frac{(C_2^{01})^2}{4\kappa\rho^2} + \frac{1}{9\kappa};$$

$$\tau^{02p} = \frac{2\sqrt{3}}{\rho}\left((C_1^{02} - \sqrt{3}C_2^{02})\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - (C_2^{02} + \sqrt{3}C_1^{02})\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \frac{(C_2^{01})^2}{8\sqrt{3}\kappa\rho}\right)\sin 2\theta;$$

$$u^{02p} = -\left(\left(2C_3^{02} + \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}C_2^{02}\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \left(2C_4^{02} - \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}C_1^{02}\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - \right.$$

$$\left. - \frac{(C_2^{01})^2\rho_s^0}{8\kappa}\rho^{-3} - \frac{17C_2^{01}\rho_s^0}{84}\rho^{-2} + \left(\frac{\rho_s^0}{18} + \frac{C_2^{01}C_4^{01}}{4}\right)\rho^{-1} - \frac{2}{9}C_4^{01}\right)\cos 2\theta;$$

$$v^{02p} = \left(\left(C_3^{02} + \sqrt{3}C_4^{02} - \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}(C_2^{02} + \sqrt{3}C_1^{02})\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \right.$$

$$\left. + \left(C_4^{02} - \sqrt{3}C_3^{02} + \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}(C_1^{02} - \sqrt{3}C_2^{02})\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho) + \frac{(C_2^{01})^2\rho_s^0}{4\kappa}\rho^{-3} + \frac{17C_2^{01}\rho_s^0}{84}\rho^{-2} - \frac{2}{9}C_4^{01}\right)\sin 2\theta$$

$$\sigma_\rho^{02e} = \left(-4C_5^{02} + 8C_6^{02}\rho^{-2} + 12C_8^{02}\rho^{-4} - \frac{4}{15}C_5^{01}\rho + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}C_6^{01}\rho^{-3} + \frac{4A}{3}\rho^{-2}\ln\rho + \frac{5A}{3}\rho^{-2}\right)\cos 2\theta + 4C_5^{01}\rho + \frac{4}{3}C_6^{01}\rho^{-3} + \frac{4A}{3}\rho^{-2}$$
$$\sigma_\theta^{02e} = \left(4C_5^{02} + 24C_7^{02}\rho^2 - 12C_8^{02}\rho^{-4} + \frac{8}{5}C_5^{01}\rho - \frac{8}{15}C_6^{01}\rho^{-3} + \frac{A}{3}\rho^{-2}\right)\times$$
$$\times \cos 2\theta + 8C_5^{01}\rho - \frac{8}{3}C_6^{01}\rho^{-3} - \frac{4A}{3}\rho^{-2}$$
$$\tau^{02e} = \left(4C_5^{02} + 4C_6^{02}\rho^{-2} + 12C_7^{02}\rho^2 + 12C_8^{02}\rho^{-4} + \right.$$
$$\left. + \frac{16}{15}C_5^{01}\rho + \frac{16}{15}C_6^{01}\rho^{-3} + \frac{A}{3}\rho^{-2}(\ln\rho + 1)\right)\sin 2\theta$$
$$u^{02e} = -2\left(C_5^{02}\rho + C_6^{02}\rho^{-1} + C_7^{02}\rho^3 + C_8^{02}\rho^{-3} + \right.$$
$$\left. + C_9^{02} - \frac{2}{15}C_5^{01}\rho^2 - \frac{2}{15}C_6^{01}\rho^{-2} + \frac{A}{6}\rho^{-1}\ln\rho\right)\cos 2\theta$$
$$v^{02e} = \left(2C_5^{02}\rho + 4C_7^{02}\rho^3 - 2C_8^{02}\rho^{-3} - C_9^{02} - \frac{2}{5}C_5^{01}\rho^2 + \frac{2}{15}C_6^{01}\rho^{-2} + \frac{A}{6}\rho^{-1}\right)\sin 2\theta,$$
$$\rho_s^{02} = C_9^{02}\cos 2\theta$$

Выражения для констант C_k^{ij} достаточно громоздкие и поэтому не приводятся.

Из (23) следует, что в случае экспериментального исследования среднестатистические значения напряжений и перемещений будут отличаться от значений, соответствующих осесимметричному состоянию (8), на величину $\langle \varepsilon_i^2 \rangle$ при условии, что параметры внешних воздействий содержатся внутри полосы (10). Если же характеристики материала, размеры поперечного сечения и сжимающие усилия таковы, что нарушается условие (10), то среднестатистические значения напряжений и перемещений превзойдут значения, соответствующие нулевому приближению (8), более, чем на величину второго порядка малости. В этом случае (7) уже не являются сходящимися рядами, позволяющими определять напряженно-деформированного состояния трубы с заданной погрешностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 137 с.
2. *Ломакин В.А., Шейнин В.И.* Статистические характеристики полей напряжений в случайно-неоднородной упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 124–130.
3. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
4. *Болотин В.В.* Статистические методы в строительной механике. М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965. 208 с.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
6. *Радченко В.П., Попов Н.Н.* Использование метода малого параметра для решения стохастических нелинейных задач теории установившейся ползучести // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 185–194.
7. *Должковой А.А., Попов Н.Н., Радченко В.П.* Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 1. С. 161–171.
8. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев: Выща школа, 1989. 352 с.

9. *Качанов Л.М.* Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра // ПММ. 1948. Т. 12. № 4. С. 375–386.
10. *Кунташев П.А., Немировский Ю.В.* О сходимости метода возмущений в задачах теории упругости неоднородных тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 75–78.
11. *Башканкова Е.А., Вакаева А.Б., Греков М.А.* Метод возмущений в задаче о почти круговом отверстии в упругой плоскости // Изв. РАН МТТ. 2015. № 2. С. 106–117.
12. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журнал. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
13. *Минаева Н.В.* Метод возмущений в механике деформируемых тел. М.: Научная книга, 2002. 156 с.