

УДК 531

О РАВНОВЕСИИ НЕРАСТЯЖИМОЙ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ НА КОНУСЕ ИЛИ СФЕРЕ

© 2021 г. Г. М. Розенблат

*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет,
Москва, Россия*

e-mail: gr51@mail.ru

Поступила в редакцию 31.08.2020 г.

После доработки 01.09.2020 г.

Принята к публикации 02.09.2020 г.

Рассматривается задача о нахождении равновесных конфигураций тяжелой нерастяжимой замкнутой нити (цепочки) на гладкой поверхности. Поверхность является для нити односторонней связью и представляет собой либо круговой конус, ось которого параллельна вертикали (силе тяжести), либо сферу. Показано: 1) для конуса равновесные негоризонтальные конфигурации нити-цепочки возможны лишь тогда, когда угол раствора конуса заключен в пределах от 60 до 90 градусов; 2) для сферы равновесные негоризонтальные конфигурации нити-цепочки невозможны.

Ключевые слова: гибкая нерастяжимая нить, равновесие, конус, сфера, эллиптический интеграл третьего рода

DOI: 10.31857/S0572329921030107

1. Описание модели и основные уравнения. Пусть гладкая поверхность, на которой находится нерастяжимая тяжелая нить, задана уравнением $h(x, y, z) = 0$. Натяжение в точке нити с естественной координатой s обозначим через $T(s) \geq 0$, внешние силы, действующие на единицу длины нити, в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ обозначим x, y, z . Тогда уравнения равновесия нити на указанной поверхности суть (см. [1, 2, 9–16])

$$(Tx')' + X + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (Ty')' + Y + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (Tz')' + Z + \lambda \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

В (1.1) штрих “'” означает производную по параметру s — длине дуги нити (естественная координата), а $\lambda > 0$ — неопределенный множитель, характеризующий нормальную реакцию поверхности (односторонней связи $h \geq 0$). К уравнениям (1.1) следует добавить еще два уравнения

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad h(x, y, z) = 0 \quad (1.2)$$

Первое из уравнений системы (1.2) характеризует свойство нерастяжимости нити (неголономная связь). Пять скалярных уравнений систем (1.1) и (1.2) полностью определяют пять неизвестных функций (x, y, z, T, λ) параметра s , которые реализуются при равновесии нити.

2. Формулировки и решения задач равновесия. Далее рассмотрим два случая: 1) поверхность — круговой конус, 2) поверхность — сфера.

2.1. Круговой конус. Рассмотрим круговой конус, ось симметрии которого вертикальна, а половина угла его раствора равна α . Пусть система координат $Oxyz$ выбрана так, что точка O совпадает с вершиной конуса, ось его симметрии совпадает с осью Oz , которая направлена вертикально вниз (т.е. по направлению силы тяжести), а оси Ox и Oy лежат в горизонтальной плоскости. Тогда уравнение поверхности конуса будет таким

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0, \quad z > 0 \quad (2.1)$$

Пусть на этот конус (односторонняя связь) положена нерастяжимая тяжелая однородная замкнутая нить плотности ρ . Исследуем возможность ее равновесия при отсутствии сил трения.

В этом случае имеем $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \rho g$, и уравнения равновесия (1.1) принимают вид

$$(Tx')' + 2\lambda x = 0, \quad (Ty')' + 2\lambda y = 0, \quad (Tz')' - 2\lambda z(\operatorname{tg}^2 \alpha) + \rho g = 0 \quad (2.2)$$

Система (2.2) имеет следующий интеграл натяжений (“энергии”)

$$T + \rho g z = T_0 = \text{const} > 0 \quad (2.3)$$

Кроме того, (так как внешние силы, приложенные в каждой точке нити, создают нулевой момент относительно оси z) имеется следующий интеграл момента сил натяжения в любой точке нити относительно оси Oz

$$T(y'x - x'y) = D = \text{const} \quad (2.4)$$

Введем полярные координаты (r, φ) в плоскости (x, y) следующим образом

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ x' &= r' \cos \varphi - r\varphi' \sin \varphi, & y' &= r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2 \varphi'^2$$

Используя (2.4) и (2.5), получим

$$Tr^2 \varphi' = D \quad (2.6)$$

Из (2.1) имеем равенство $r^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$, подставляя которое в (2.6), получим, с учетом интеграла (2.3), соотношение

$$\varphi' = \frac{\gamma^2 \operatorname{ctg} \alpha}{z^2(z_0 - z)}, \quad \text{где} \quad z_0 = \frac{T_0}{\rho g} = \text{const} > 0, \quad \gamma^2 = \frac{D \operatorname{ctg} \alpha}{\rho g} = \text{const} > 0 \quad (2.7)$$

Используя последнее уравнение системы (2.5), соотношение (2.7) и равенство $r^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$, из первого уравнения системы (1.2) получим

$$z'^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{\gamma^4}{z^2(z_0 - z)^2} = 1$$

Из последнего уравнения находим для $z = z(s)$ и $s = s(z)$ соотношения:

$$\frac{dz}{ds} = \pm \cos \alpha \frac{\sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}}{z(z_0 - z)}, \quad \frac{ds}{dz} = \pm \frac{1}{\cos \alpha} \frac{z(z_0 - z)}{\sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}} \quad (2.8)$$

Далее, из третьего уравнения системы (2.2) находим $\lambda = \lambda(z)$ по формуле

$$\lambda = \frac{\rho g [1 + (z_0 - z)z'' - z'^2]}{2z \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\rho g}{2z \operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\sin^2 \alpha + \frac{\gamma^4 \cos^2 \alpha}{z^3 (z_0 - z)} \right] > 0$$

В последней формуле использовано (2.8) и тождество $z'' = 0.5d(z^2)/dz$.

Найдем квадратуру для функции $\varphi = \varphi(z)$. Умножая уравнение (2.7) на второе из равенств (2.8), получим

$$d\varphi = \pm \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} \frac{dz}{z \sqrt{P(z)}}, \quad P(z) = z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4 \quad (2.9)$$

Представим многочлен $P(z)$ из (2.9) в виде

$$P(z) = [(0.5z_0 - z_2)^2 - (z - 0.5z_0)^2][0.25z_0^2 + \gamma^2 - (z - 0.5z_0)^2], \quad (2.10)$$

$$z_2 = 0.5z_0 + \sqrt{0.25z_0^2 - \gamma^2}$$

Многочлен $P(z)$ при $0.25z_0^2 \in [\gamma^2, \infty)$ имеет еще вещественный положительный корень $z_1 = 0.5z_0 - \sqrt{0.25z_0^2 - \gamma^2} < z_2$. Два других вещественных корня $z_{3,4} = 0.5z_0 \pm \sqrt{0.25z_0^2 + \gamma^2}$ находятся вне (снаружи) интервала (z_1, z_2) , причем $z_4 < 0$, $z_3 > z_2 > 0$. При $z \in [z_1, z_2]$ имеем $P(z) \geq 0$. Нетрудно установить, что это единственный интервал изменения z , на котором существуют вещественные 2π -периодические решения $z(\varphi)$ уравнения (2.9) для положения равновесия замкнутой нити. Этот интервал существует только тогда, когда выполнено условие $0.25z_0^2 \in [\gamma^2, \infty)$.

Отметим, что при условии $0.25z_0^2 \in [0, \gamma^2)$ уравнение $P(z) = 0$ имеет лишь два вещественных корня $z_{3,4} = 0.5z_0 \pm \sqrt{0.25z_0^2 + \gamma^2}$, один из которых (корень z_4) отрицателен. В этом случае будут соблюдаться неравенства

$$P(z) < 0, \quad z \in (0, z_3), \quad P(z) \geq 0, \quad z \geq z_3$$

Тогда решения уравнения (2.9) существуют только при $z \geq z_3 > 0$ и имеют асимптотический характер: нить либо “спиралью навивается” вверх на конус к уровню $z = z_3$ из некоторого начального положения $z = z_0 > z_3$, либо же, “навиваясь спиралью”, удаляется вниз по конусу от начальной точки $z = z_0 \geq z_3$, т.е. свойство замкнутости нити при равновесии не может быть реализовано.

Таким образом, для существования решения представленных уравнений равновесия замкнутой нити (цепочки) необходимо выполнение двух условий:

1. $0.25z_0^2 \in [\gamma^2, \infty)$; 2. При изменении z в пределах от $z = z_1$ до $z = z_2$ функция $\varphi(z)$ (решение уравнения (2.9)) изменяется ровно на π (это условие следует из симметрии и требования замкнутости нити).

Следовательно, согласно (2.9), необходимо исследовать разрешимость уравнения

$$\pi = \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z \sqrt{P(z)}} \quad (2.11)$$

В (2.11) параметры $\{z_0, \gamma^2, \alpha\}$ изменяются в области

$$(0 < z_0 < \infty, 0 < \gamma^2 < 0.25z_0^2, 0 < \alpha < \pi/2)$$

Исследование разрешимости уравнения (2.11) в указанной области изменения параметров проведем двумя независимыми методами.

1 метод. Использование эллиптических интегралов. Делаем в (2.11) замену

$$z - 0.5z_0 = (0.5z_0 - z_2) \sin \varphi, \quad \varphi \in [-0.5\pi, 0.5\pi].$$

Тогда, используя (2.10), приходим к исследованию разрешимости следующего уравнения

$$\pi = \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(0.5z_0 - \sqrt{0.25z_0^2 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}) \sqrt{0.25z_0^2 + \gamma^2 - (0.25z_0^2 - \gamma^2) \sin^2 \varphi}}$$

Вводя обозначение $\mu = 4\gamma^2/z_0^2 \in (0, 1)$ и преобразуя интеграл к пределам от 0 до $\pi/2$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \pi = I(\mu, \alpha) &= \frac{2\mu}{\sin \alpha \sqrt{1+\mu}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}}, \\ \sigma^2 &= 1 - \mu, \quad k^2 = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Интеграл в (2.12) является полным эллиптическим интегралом 3-го рода, обозначаемым как $\Pi(\sigma^2, k)$. Используя формулы приведения из [3, см. формулы 413.01 на стр. 228], имеем

$$\Pi(\sigma^2, k) = \frac{\pi \sigma}{2\sqrt{(\sigma^2 - k^2)(1 - \sigma^2)}} \Lambda_0(\xi, k), \quad \xi = \arcsin \sqrt{\frac{\sigma^2 - k^2}{\sigma^2 k'^2}}, \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad (2.13)$$

В (2.13) фигурирует Heuman's Lambda Function $\Lambda_0(\xi, k)$, которая дается следующей формулой [3, формула 413 на стр. 228]

$$\Lambda_0(\xi, k) = \frac{2}{\pi} [E(k)F(\xi, k') + K(k)E(\xi, k') - K(k)F(\xi, k')], \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad (2.14)$$

В (2.14) обозначены стандартным образом $K(k)$, $E(k)$ полные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го родов от модуля k , а $F(\xi, k')$, $E(\xi, k')$ — неполные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го родов с аргументом ξ от модуля $k' = \sqrt{1 - k^2}$. В нашем конкретном случае, в соответствии с обозначениями из (2.12), (2.13), имеем $\xi = \arcsin \sqrt{(\sigma^2 - k^2)/(\sigma^2 k'^2)} = \arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$. Тогда, используя обозначения из (2.12), получим из (2.13)

$$\Pi(\sigma^2, k) = \Pi\left(1 - \mu, \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}\right) = \frac{\pi \sqrt{1 + \mu}}{2\mu} \Lambda_0\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}\right)$$

Подставляя полученное выражение в (2.12), приходим к уравнению

$$\pi = I(\mu, \alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha} \Lambda_0\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}\right), \quad \mu \in (0, 1) \quad (2.15)$$

Функция $\Lambda_0\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right)$, стоящая в правой части уравнения (2.15), является монотонной по μ . Это следует из формулы для производной функции $\Lambda_0(\varphi, k)$ по модулю k

$$\frac{d}{dk} \Lambda_0(\varphi, k) = \frac{2(E - K) \sin \varphi \cos \varphi}{\pi k \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} < 0, \quad \varphi \in (0, \pi/2) \quad (2.16)$$

(см. формулу 710.11 на стр. 283 книги [3]). Кроме того, так как $k = \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}$, то

$$\frac{dk}{d\mu} = -\sqrt{\frac{1}{(1-\mu)(1+\mu)^3}}. \text{ Следовательно, используя (2.16), получаем}$$

$$\frac{d}{d\mu} \Lambda_0\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right) > 0$$

Итак, функция $I(\mu, \alpha)$, фигурирующая в правой части уравнения (2.15), является монотонно возрастающей по параметру μ . Следовательно, для разрешимости уравнения (2.15) на интервале $0 < \mu < 1$ необходимо и достаточно выполнения двойного неравенства

$$I(0, \alpha) < \pi < I(1, \alpha) \quad (2.17)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} I(0, \alpha) &= \pi \Lambda_0(0.25\pi, 1)/\sin \alpha = 0.5\pi/\sin \alpha \\ I(1, \alpha) &= \pi \Lambda_0(0.25\pi, 0)/\sin \alpha = \pi/(\sqrt{2}\sin \alpha) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Формулы (2.18) следуют из известных соотношений

$$\Lambda_0(\beta, 1) = 2\beta/\pi, \quad \Lambda_0(\beta, 0) = \sin \beta$$

(см. формулы 151.01 на стр. 36 книги [3]). Отметим, что значение $I(1, \alpha) = \pi/(\sqrt{2}\sin \alpha)$ из (2.18) также может быть получено и непосредственно из (2.12) при $\mu = 1$. Далее, используя (2.18), из (2.17) получаем неравенства

$$0.5 < \sin \alpha < \sqrt{2}/2$$

Последние неравенства эквивалентны следующим

$$30^\circ < \alpha < 45^\circ$$

Таким образом, для возможности равновесия замкнутой нити на конусе необходимо выполнения неравенств

$$60^\circ < 2\alpha < 90^\circ \quad (2.19)$$

В (2.19) 2α — угол раствора конуса.

2 метод. Использование методов теории функций комплексной переменной. Вычисляем интеграл в формуле (2.11) при помощи контурного интегрирования (с использованием теоремы Коши из теории функций комплексного переменного и теории вычетов). В рассматриваемой области изменения параметров ($0 < z_0 < \infty$, $0 < \gamma^2 < 0.25z_0^2$, $0 < \alpha < \pi/2$) подкоренное выражение под знаком интеграла в (2.11) является полиномом 4-го порядка, который имеет 4 различных вещественных корня z_1, z_2, z_3, z_4 , причем соблюдены следующие неравенства

$$-\infty < z_4 < 0 < z_1 < z_2 < z_3 < +\infty$$

Тогда интеграл из (2.11) можно записать в виде

$$I(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}} \quad (2.20)$$

$$z_{1,2} = 0.5z_0 \mp \sqrt{0.25z_0^2 - \gamma^2}, \quad z_{3,4} = 0.5z_0 \pm \sqrt{0.25z_0^2 + \gamma^2} \quad (2.21)$$

В первой из формул (2.21) верхний знак соответствует корню z_1 , а в последней формуле из (2.21) верхний знак соответствует корню z_3 . Подынтегральное выражение в (2.20) будем рассматривать как функцию комплексного переменного $z = x + iy$. Выберем стандартный контур интегрирования для однозначной ветви корня в подынтегральном выражении интеграла (2.20). Этот контур состоит из окружности C_R с центром в точке $z = 0$ достаточно большого радиуса R ($R \rightarrow \infty$), и двух сторон трех разрезов на действительной оси $S_1 = (-R, z_4)$, $S_2 = (z_1, z_2)$, $S_3 = (z_3, +R)$, ($R \rightarrow \infty$). Точки z_1 , z_2 , z_3 , z_4 являются точками ветвления (устраняемая особенность), а точка $z = 0$ — единственным полюсом подынтегральной функции интеграла (2.20). Однозначную ветвь корня мы выбираем так, что на верхнем берегу разреза S_2 корень отрицателен (на нижнем берегу — положителен), а тогда на верхних берегах разрезов S_1 , S_3 корень положителен (соответственно, на нижних берегах — отрицателен). Отметим, что для этой ветви значение корня в точке $z = 0$ также следует выбирать со знаком минус, то есть имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sqrt{P(z)}\Big|_{z=0} &= \sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}\Big|_{z=0} = \\ &= \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}\Big|_{z=0} = -i\gamma^2, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

По теореме Коши интеграл от рассматриваемой однозначной ветви подынтегральной функции по указанному замкнутому контуру равен вычету в точке $z = 0$, умноженному на $2\pi i$. Учитывая равенство (2.22), приходим к соотношению

$$I_{C_R} + 2I(z_4) + 2I(z_3) - 2I(z_1, z_2) = 2\pi i \left(\frac{1}{-i\gamma^2} \right) \quad (2.23)$$

где обозначено: I_{C_R} — интеграл от рассматриваемой функции, взятый по полной окружности C_R , $I(z_4)$ — интеграл от рассматриваемой функции, взятый по действительной оси от точки $z = -R$ до точки $z = z_4$ (верхний берег разреза S_1), $I(z_3)$ — интеграл от рассматриваемой функции, взятый по действительной оси от $z = z_3$ до $z = +R$ (верхний берег разреза S_3), $I(z_1, z_2)$ — искомый интеграл из (2.20). Устремляя в (2.23) $R \rightarrow +\infty$, несложно показать, что $I_{C_R} \rightarrow 0$, и справедливы соотношения

$$I(z_4) \rightarrow - \int_{|z_4|}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2(z_0 + z)^2 - \gamma^4}}, \quad I(z_3) \rightarrow \int_{z_3}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}} \quad (2.24)$$

В результате, из (2.23) и (2.24) получаем формулу

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} + \int_{z_3}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}} - \int_{|z_4|}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2(z_0 + z)^2 - \gamma^4}} \quad (2.25)$$

Делаем в интегралах из (2.25) замену $z = z_0 y$. Получим

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} \int_{z_3/z_0}^{+\infty} \frac{dy}{y \sqrt{z_0^4 \gamma^{-4} y^2 (1-y)^2 - 1}} - \frac{1}{\gamma^2} \int_{|z_4|/z_0}^{+\infty} \frac{dy}{y \sqrt{z_0^4 \gamma^{-4} y^2 (1+y)^2 - 1}}$$

Для упрощения выкладок введем обозначение $\varepsilon = \gamma^2/z_0^2 \in (0, 0.25)$ (так как в рассматриваемой области параметров выполнено неравенство $0 < \gamma^2 < 0.25 z_0^2$). Тогда получим

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} + \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_1}^{+\infty} \frac{dy}{y \sqrt{y^2 (1-y)^2 - \varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy}{y \sqrt{y^2 (1+y)^2 - \varepsilon^2}} \quad (2.26)$$

Для нижних пределов интегралов в (2.26) введены обозначения

$$k_1 = z_3/z_0 = 0.5 + \sqrt{0.25 + \varepsilon}, \quad k_2 = |z_4|/z_0 = -0.5 + \sqrt{0.25 + \varepsilon} \quad (2.27)$$

В первом из интегралов в (2.26) делаем замену переменной $y = y_1 + 1$. Получим

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} + \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy_1}{(y_1 + 1) \sqrt{y_1^2 (1 + y_1)^2 - \varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy}{y \sqrt{y^2 (1 + y)^2 - \varepsilon^2}}$$

Окончательно получаем следующую формулу

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy}{y(y+1) \sqrt{y^2 (1+y)^2 - \varepsilon^2}} \quad (2.28)$$

Обозначим

$$F(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy}{y(y+1) \sqrt{y^2 (1+y)^2 - \varepsilon^2}}, \quad (2.29)$$

$$\text{где } k_2 = -0.5 + \sqrt{0.25 + \varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0, 0.25)$$

Покажем, что функция $F(\varepsilon)$ из (2.29) является монотонной по аргументу $\varepsilon \geq 0$. Действительно, сделаем в интеграле из (2.29) замену переменной

$$y(y+1) = \varepsilon u \Rightarrow y = -0.5 + \sqrt{0.25 + \varepsilon u}, \quad dy = \frac{\varepsilon du}{2\sqrt{0.25 + \varepsilon u}} = \frac{\varepsilon du}{\sqrt{1 + 4\varepsilon u}}$$

Тогда получим

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{\gamma^2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{1 + 4\varepsilon u}} \quad (2.30)$$

Из (2.30) монотонное убывание по $\varepsilon > 0$ функции $F(\varepsilon)$ (при любом фиксированном γ) становится очевидным. Следовательно, справедливы неравенства

$$F(0.25) \leq F(\varepsilon) \leq F(0), \quad \varepsilon \in (0, 0.25). \quad (2.31)$$

Из (2.30) получим

$$F(0) = \frac{1}{\gamma^2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \frac{2}{\gamma^2} \operatorname{arctg}(u + \sqrt{u^2-1}) \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2\gamma^2} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} F(0.25) &= \frac{1}{\gamma^2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)\sqrt{u-1}} = \\ &= \frac{2}{\gamma^2} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{u-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{\gamma^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Используя соотношения (2.28)–(2.33), получим неравенства

$$\frac{\pi}{2\gamma^2} \leq I(z_1, z_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}\gamma^2} \quad (2.34)$$

Теперь вернемся к уравнению (2.11), которое с учетом наших обозначений, имеет вид

$$\pi = \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} I(z_1, z_2)$$

Учитывая неравенства (2.34), можно утверждать, что разрешимость последнего уравнения эквивалентна неравенствам

$$\frac{\pi}{2\gamma^2} \leq \frac{\pi \sin \alpha}{\gamma^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}\gamma^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

В последних формулах 2α – угол раствора конуса. Таким образом, метод 2 дал те же самые результаты, что были получены выше методом 1.

Если неравенства (2.19) выполнены, то из уравнения (2.15) мы находим то единственное значение $\mu^* = \mu(\alpha) \in (0, 1)$, при котором возможно равновесие.

Предположим, что неравенства (2.19) выполнены, и соответствующее значение $\mu^* = \mu(\alpha) \in (0, 1)$ найдено. Рассмотрим второе из равенств формул (2.8), которое проинтегрируем в пределах от $z = z_1$ до $z = z_2$. В силу симметрии конфигурации замкнутой нити, слева должны получить её полудлину $L/2$. Тогда имеем равенство

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{\cos \alpha} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z(z_0 - z)dz}{\sqrt{P(z)}} \quad (2.35)$$

Аналогично предыдущему, делаем в интеграле формулы (2.35) замену

$$z - 0.5z_0 = (0.5z_0 - z_2) \sin \varphi, \quad \varphi \in [-0.5\pi, 0.5\pi]$$

Тогда уравнение (2.35) приобретает вид

$$\frac{L}{2} = \frac{z_0}{\sqrt{1 + \mu^* \cos \alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \sigma^2 \sin^2 \beta) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}, \quad \sigma^2 = 1 - \mu^*, \quad k^2 = \frac{1 - \mu^*}{1 + \mu^*} \quad (2.36)$$

Интеграл, фигурирующий в (2.36), может быть сведен к полному эллиптическому интегралу 3-го рода и далее аналогично предыдущему вычислен через функцию

$$\Lambda_0 \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1 - \mu^*}{1 + \mu^*} \right).$$

Из (2.36) мы находим постоянную величину z_0 , которая зависит от длины нити. Далее, вспоминая обозначение для μ , находим соответствующее γ_*^2 по формуле

$\gamma_*^2 = \mu^* z_0^2 / 4$. Используя обозначение из (2.7), находим в результате константу D по формуле $D = \rho g \gamma_*^2 \operatorname{tg} \alpha$.

Таким образом, задача о равновесии замкнутой нити на конусе полностью разрешена. Решение этой задачи единственно, с точностью до поворотов вокруг оси симметрии Oz (кроме горизонтальных положений равновесия, когда $z = \operatorname{const}$).

Замечание 1. Отметим, что почти одновременно с публикацией автором результата о равновесии нити на конусе при условии (2.19) в статье [7], аналогичный результат (но другим методом) был получен также в работе [8]. Основной недостаток работы [8] состоит в следующем. При нахождении равновесной конфигурации нити-цепочки на конусе автор статьи [8] также пришел к условию разрешимости (2.11), где в правой ча-

сти стоит эллиптический интеграл $I(\gamma) = \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z \sqrt{P(z)}}$, который зависит от параметра γ . Далее, автор статьи [8] отмечает, что *можно* показать монотонность этого интеграла по параметру γ , однако не делает этого и даже не указывает как это можно было бы сделать.

В настоящей статье монотонность интеграла $I(\gamma)$ по параметру γ доказана математически строго двумя независимыми методами математического анализа. Как видим, это требует немалых аналитических усилий и не является столь очевидным. Отметим, что аналогичные исследования зависимости эллиптических интегралов от параметров проводились также классиками теоретической механики при качественном анализе результатов решения задачи о сферическом маятнике (см., например, учебник [1], стр. 436–438). В статье [17] было показано (при помощи методов контурного интегрирования), что при любой (ненулевой) начальной окружной скорости сферического маятника за время его прохода от максимального до минимального значений координаты z (т.е. за четверть периода по углу отклонения от вертикали) плоскость его качаний поворачивается на угол больший прямого ($\pi/2$) и меньший развернутого (π). Из результатов статьи [17], в частности, следует, что в пределе, при нулевой начальной окружной скорости сферического маятника, он превращается в обычный (плоский) математический маятник, а плоскость его качаний (за четверть периода по углу отклонения от вертикали) поворачивается ровно на 90 градусов, хотя при наблюдении нам кажется, что она вообще не поворачивается.

2.2. Сфера. Рассмотрим в качестве поверхности сферу радиуса a . Для упрощения выкладок примем, что $a = 1$. Пусть система координат $Oxyz$ выбрана так, что точка O совпадает с центром сферической поверхности, ось Oz направлена вертикально вверх (т.е. против силы тяжести), а оси Ox и Oy лежат в горизонтальной плоскости. Тогда уравнение поверхности сферы будет таким

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (2.37)$$

Пусть на эту сферу (односторонняя связь) положена нерастяжимая тяжелая однородная замкнутая нить плотности ρ . Исследуем возможность ее равновесия при отсутствии сил трения. В этом случае имеем $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -\rho g$, и уравнения равновесия (1.1) принимают вид

$$(Tx')' + 2\lambda x = 0, \quad (Ty')' + 2\lambda y = 0, \quad (Tz')' + 2\lambda z - \rho g = 0 \quad (2.38)$$

Система (2.38) имеет следующий интеграл натяжений (“энергии”)

$$T - \rho g z = T_0 = \operatorname{const} \quad (2.39)$$

Следуя [1, 9], используем еще интеграл момента натяжения относительно вертикальной оси Oz . Вводя цилиндрические координаты (r, φ, z) по формулам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (2.40)$$

Тогда имеем соотношение

$$Tr^2 d\varphi = C ds, \quad C = \text{const} \quad (2.41)$$

Из (2.39) и (2.41) получим равенство

$$(z - z_0)r^2 d\varphi = A ds, \quad z_0 = -T_0/(\rho g) = \text{const}, \quad A = C/(\rho g) = \text{const} \quad (2.42)$$

Уравнение сферы (2.37) в координатах (2.40) имеет вид

$$r = \sqrt{1 - z^2} \quad (2.43)$$

Первое уравнение системы (1.2) в цилиндрических координатах (2.40) и учетом соотношения (2.43), принимает вид

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dz^2/r^2 \quad (2.44)$$

Используя (2.42) и (2.44), получим дифференциальное соотношение

$$d\varphi = \pm \frac{A dz}{(1 - z^2)\sqrt{f(z, z_0) - A^2}}, \quad f(z, z_0) = (1 - z^2)(z - z_0)^2 \quad (2.45)$$

Ясно, что при равновесии нити на сфере с односторонней связью $h \geq 0$ в (2.45) должно соблюдаться условие $z \in (0, 1)$. А из требования замкнутости и симметрии нити при равновесии должно соблюдаться следующее условие: при изменении z от значения $z = z_1$ до значения $z = z_2$ угол φ должен измениться ровно на π , где $z_1, z_2 \in (0, 1)$ – различные последовательные корни уравнения $f(z, z_0) - A^2 = 0$. Таким образом, задача сводится к решению уравнения

$$\pi = I(A, z_0), \quad I(A, z_0) = A \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(1 - z^2)\sqrt{f(z, z_0) - A^2}} \quad (2.46)$$

В (2.46) параметры $\{A, z_0\}$ изменяются в допустимой области.

Область допустимого изменения параметров $\{A, z_0\}$ находится из следующих соображений. Так как натяжение нити положительно $T = \rho g(z - z_0) > 0$ при $z \in (0, 1)$, то необходимо должно соблюдаться условие $z_0 \in (-\infty, 1]$. Далее, несложное исследование функции $f(z, z_0)$ показывает, что для существования двух вещественных корней $z_1, z_2 \in (0, 1)$ уравнения $f(z, z_0) - A^2 = 0$ параметр A^2 необходимо должен удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} 0 < A^2 &\leq f(z^*, z_0), \quad z_0 \in (0, 1] \\ z_0^2 < A^2 &\leq f(z^*, z_0), \quad z_0 \in (-\infty, 0] \end{aligned} \quad (2.47)$$

В (2.47) обозначено

$$f(z^*, z_0) = \max_{z \in (0, 1)} f(z, z_0), \quad z^* = 0.25(z_0 + \sqrt{z_0^2 + 8})$$

В разделе 3 данной статьи показано, что при всех допустимых значениях параметров $\{A, z_0\}$ для интеграла из (2.46) справедлива оценка $I(A, z_0) < \pi$. Следовательно, уравнение (2.46) не имеет решений.

Таким образом, негоризонтальные (т.е. с переменными значениями координаты z) положения равновесия замкнутой тяжелой нерастяжимой нити-цепочки на гладкой сфере невозможны.

Замечание 2. При исследовании задач равновесия, рассматриваемых в данной статье, использовались полные эллиптические интегралы Лежандра 3-го рода. Для вы-

числения этих интегралов автор настоящей статьи обращался к книге [3] (к сожалению, не переведенной на русский язык). Отметим, что в известном справочнике [4], для рассматриваемого в статье случая эллиптического интеграла 3-го рода, содержится ошибка. Действительно, в справочнике [4] на стр. 28, формула (22), для приведения интеграла 3-го рода в случае $-1 < v < -k^2 < 0$, такова (цитируем, сохранив обозначения оригинала):

$$\begin{aligned} & k' \frac{\sin \theta \cos \theta}{\Delta(\theta, k')} [\Pi(-\Delta^2(\theta, k'), k) - K(k)] = \\ & = \pi/2 - [E(k) - K(k)] F(\theta, k') - K(k) E(\theta, k) \end{aligned} \quad (2.48)$$

В (2.48) обозначено $\Delta(\theta, k) = (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$, $k' = (1 - k^2)^{1/2}$, $E(k)$, $K(k)$ — полные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го родов, а $E(\theta, k)$, $F(\theta, k)$ — неполные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го родов (при $\theta \in (0, \pi/2)$, $k \in (0, 1)$). Отметим, что в [4] для полного эллиптического интеграла 3-го рода (в отличие от обозначений данной статьи в формуле (2.12)) принято следующее обозначение

$$\Pi(v, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + v \sin^2 \varphi) \Delta(\varphi, k)}$$

Тогда в (2.48) положено $v = -\Delta^2(\theta, k') = -(1 - k'^2 \sin^2 \theta)$, $k'^2 = 1 - k^2$, $1 > -v > k^2 > 0$. Правильная формула в (2.48) должна быть такой

$$\begin{aligned} & k'^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{\Delta(\theta, k')} [\Pi(-\Delta^2(\theta, k'), k) - K(k)] = \\ & = \pi/2 - [E(k) - K(k)] F(\theta, k') - K(k) E(\theta, k') \end{aligned} \quad (2.49)$$

Справедливость соотношения (2.49) следует из формул, приведенных в книге [3] на стр. 228, а также в классическом трактате Лежандра [6] на стр. 138. Неправильность формулы (2.48) можно установить и непосредственно, рассматривая равенство (2.48) сначала: 1) при $k = 0$ (так мы покажем, что в последнем слагаемом правой части равенства (2.48) обязательно должно быть $E(\theta, k')$), а потом 2), полагая в (2.48) $v = -k$ и затем устремляя $k \rightarrow 1$ (так мы получим, что правая часть равенства (2.48) в точности равна $\pi/4$, а левая часть равенства (2.48) строго больше $\pi/4$).

Отметим, что неверное равенство (2.48) присутствует также и в источнике [5] — английском оригинале книги [4].

3. Оценка интеграла $I(A, z_0)$ из уравнения (2.46) раздела 2. Рассмотрим функцию $I(A, z_0)$, вычисляемую по формуле

$$I(A, z_0) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{Adz}{(1 - z^2) \sqrt{f(z, z_0) - A^2}}, \quad f(z, z_0) = (1 - z^2)(z - z_0)^2 \quad (3.1)$$

Покажем, что для этой функции верно неравенство $I(A, z_0) < \pi$, которое выполняется для всех допустимых значений параметров (A, z_0) , удовлетворяющих условиям (2.47) раздела 2 статьи. Мы докажем это неравенство непосредственно, не используя стандартной формулы для производной интеграла из (3.1) по параметру A . Эта операция некорректна, так как получаемый в результате такого дифференцирования интеграл является расходящимся.

Подынтегральная функция интеграла из (3.1) имеет два полюса в точках $z = z_1^* = +1$, $z = z_2^* = -1$. Кроме того, точки $z = z_1$, $z = z_2$ являются точками ветвления для

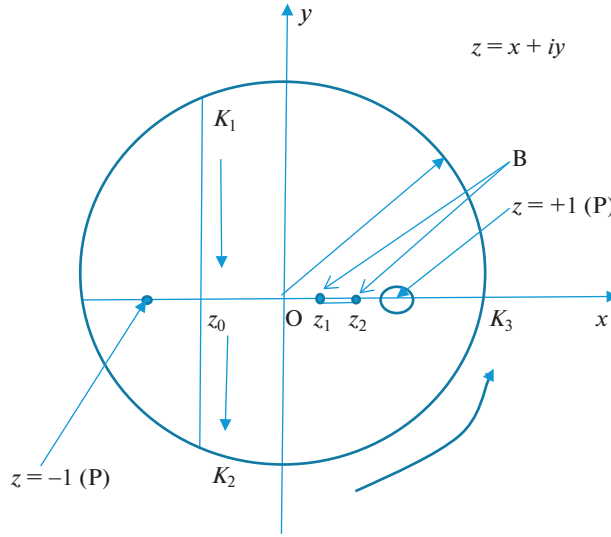


Рис. 1. Контур интегрирования в комплексной плоскости $z = x + iy$ для вычисления эллиптического интеграла. Внешний контур: отрезок $K_1 z_0 K_2$ прямой (параллельной мнимой оси Oy и проходящей через точку $z = z_0$ на вещественной оси Ox) $\cup$ дуга $K_2 K_3 K_1$ окружности радиуса R ($R \rightarrow \infty$), и внутренний контур (разрез по отрезку $[z_1, z_2]$): $(z_1, z_2)^+$ (верхний берег разреза) $\cup$ $(z_2, z_1)^-$ (нижний берег разреза). Стрелки указывают направление обхода внешнего контура. Внутренний и внешний контуры обходятся так, что область $K_1 z_0 K_2 K_3 K_1$, ограниченная внешним контуром, находится слева по ходу движения обхода. P – полюс. B – точки ветвления (нули под корнем)

корня в знаменателе подынтегральной функции. Это, как было указано в разделе 2 статьи, суть положительные вещественные корни уравнения 4-го порядка

$$(1 - z^2)(z - z_0)^2 - A^2 = 0 \quad (3.2)$$

Эти корни, как следует из условий (2.47) раздела 2 статьи, при $z_0 \in (0, 1)$ принадлежат интервалу $(z_0, 1)$, а при $z_0 \in (-\infty, 0)$ принадлежат интервалу $(0, 1)$. Уравнение 4-го порядка из (3.2), конечно, имеет еще два корня (возможно, комплексных), однако, несложно показать, что эти два оставшихся корня расположены заведомо левее вертикальной прямой $z = z_0 + iy$, $y \in (-\infty, +\infty)$, проведенной параллельно мнимой оси в комплексной плоскости $z = x + iy$.

Вычисление интеграла из (3.1) будем производить при помощи контурного интегрирования. Контур интегрирования (см. рис. 1) состоит из трех частей и строится следующим образом. Выберем достаточно большое число $R > \max(1, |z_0|)$.

1-я часть контура – кривая S_1 . Это дуга (часть) окружности радиуса R :

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x \in (z_0, R), \quad y \in (-R, R)$$

2-я часть контура – линия S_2 . Это вертикальный отрезок прямой

$$z = z_0 + iy, \quad y \in (-\sqrt{R^2 - z_0^2}, +\sqrt{R^2 - z_0^2})$$

Этот отрезок спрямляет (замыкает) дугу окружности S_1 до замкнутого контура $S_{12} = S_1 \cup S_2$, который охватывает начало координат и точки

$$z = z_0, \quad z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = +1$$

3-я часть контура — линия $S_3 = S_3^+ \cup S_3^-$. Это граница отрезка разреза вещественной оси $z = x \pm 0 \cdot i$, $x \in [z_1, z_2]$, состоящая из двух берегов: верхнего S_3^+ ($z = x + 0 \cdot i$, $x \in (z_1, z_2)$) и нижнего S_3^- ($z = x - 0 \cdot i$, $x \in (z_1, z_2)$).

Во внутренности области G , ограниченной указанными контурами S_{12} и S_3 , выберем однозначную ветвь квадратного корня подынтегрального выражения интеграла из (3.1) так, что на верхней границе разреза S_3^+ этот корень отрицателен, а на нижней границе этого разреза S_3^- он положителен. Тогда для этой ветви в точке полюса $z_1^* = +1$ для корня в подынтегральном выражении в (3.1) имеем значение $(+iA)$. А в точке полюса $z_2^* = -1$ для этого корня при $z_0 < -1$ (когда, как указано было выше, два корня уравнения $(1 - z^2)(z - z_0)^2 - A^2 = 0$ лежат в комплексной плоскости заведомо левее этого полюса) имеем значение $(-iA)$.

Ясно, что в области G эта однозначная ветвь подынтегральной функции является аналитической, за исключением ее полюсов $z_{1,2}^* = \pm 1$. Если $z_0 \in (-1, 1)$, то область G содержит только один полюс $z_1^* = +1$, а если $z_0 < -1$, то область G содержит уже два полюса $z_{1,2}^* = \pm 1$. В связи с этим, рассмотрим отдельно два возможных случая: 1) $z_0 \in (-1, 1]$ и 2) $z_0 \in (-\infty, -1]$.

1 случай $z_0 \in (-1, 1]$. Тогда полюс только один — в точке $z_1^* = +1$. Вычет в этой точке, умноженный на $2\pi i$, равен

$$Q_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{A \rho e^{i\varphi} i d\varphi}{2(-\rho e^{i\varphi}) \sqrt{-A^2}} = -\pi$$

Интегрируем по контуру $S_{12} \cup S_3$ так, что область G при обходе контура остается все время слева по ходу движения. Применяя теорему Коши, получаем соотношение

$$I(S_1) + I(S_2) + I(S_3) = Q_1 \quad (3.3)$$

В (3.3) $I(S_1)$ — интеграл по дуге окружности S_1 , $I(S_2)$ — интеграл по вертикальному отрезку S_2 , $I(S_3)$ — интеграл по двум берегам разреза $S_3 = S_3^+ \cup S_3^-$. Переходя в соотношении (3.3) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим $I(S_1) \rightarrow 0$. Для интеграла $I(S_2)$ получим следующее предельное (когда $R \rightarrow \infty$) значение

$$I(S_2) = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{Aidy}{(c - id)\sqrt{-a + ib}} \quad (3.4)$$

В (3.4) обозначено

$$c = y^2 + 1 - z_0^2, \quad d = 2yz_0, \quad a = A^2 + y^2c, \quad b = 2y^3z_0 \quad (3.5)$$

Для интеграла $I(S_3)$ имеем равенство $I(S_3) = -2I(A, z_0)$. Таким образом, из (3.3) получаем соотношение

$$I(S_2) - 2I(A, z_0) = -\pi$$

Отсюда следует равенство

$$I(A, z_0) = 0.5[\pi + I(S_2)] \quad (3.6)$$

Преобразуем интеграл из (3.4), используя обозначения (3.5). Получим сначала

$$I(S_2) = - \int_0^{+\infty} Ai \left[\frac{1}{(c - id)\sqrt{-a + ib}} + \frac{1}{(c + id)\sqrt{-a - ib}} \right] dy \quad (3.7)$$

Для корней из комплексных чисел в знаменателях подынтегрального выражения (3.7) имеем следующие формулы

$$\begin{aligned} \sqrt{-a - ib} &= \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} + i \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \\ &= \frac{b\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}|b|} + i \left(-\frac{|b|}{\sqrt{2}\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \right) \\ \sqrt{-a + ib} &= -\frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} + i \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \\ &= -\frac{b\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}|b|} + i \left(-\frac{|b|}{\sqrt{2}\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Указанный выбор знаков для значений квадратных корней в (3.8) обусловлен тем, что при $a < 0$, $b \rightarrow +0$ (нижний берег разреза S_3^- для числа $-a - ib$) должно, как это было принято выше, получаться положительное вещественное число, а при $a < 0$, $b \rightarrow -0$ (верхний берег разреза S_3^+ для числа $-a - ib$) должно, как это было принято выше, получаться отрицательное вещественное число. Введем обозначения

$$g = \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.9)$$

Тогда имеем из (3.8)

$$\sqrt{-a - ib} = g - ih, \quad \sqrt{-a + ib} = -g - ih \quad (3.10)$$

Используя (3.10), получим из (3.7)

$$I(S_2) = -Ai \int_0^{+\infty} \frac{2i(ch - gd)}{(c^2 + d^2)(g^2 + h^2)} dy = 2A \int_0^{+\infty} \frac{(ch - gd)}{(c^2 + d^2)(g^2 + h^2)} dy \quad (3.11)$$

Таким образом, интеграл $I(S_2)$ является вещественным.

Используя обозначения (3.5) и (3.9), из (3.11) получим

$$I(S_2) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{A[(1 - z_0^2 + y^2)(a + \sqrt{a^2 + b^2}) - 4y^4 z_0^2]}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy \quad (3.12)$$

В (3.12) a , b даются формулами

$$a = A^2 + y^2(y^2 + 1 - z_0^2), \quad b = 2z_0 y^3 \quad (3.13)$$

Оценим интеграл (3.12) сверху. Так как для рассматриваемого случая $z_0^2 < 1$, то для всех значений $y \in (0, +\infty)$, согласно (3.13), имеем неравенства $a > 0$, $y^2 + 1 - z_0^2 > 0$, а из первой формулы соотношений (3.13) следует, что $A < \sqrt{a}$. Тогда получим оценку

$$\begin{aligned} I(S_2) &< 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}(1 - z_0^2 + y^2)\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy < \\ &< 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}(1 - z_0^2 + y^2)\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy < \\ &< 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}(1 - z_0^2 + y^2)}{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2}}[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy \end{aligned}$$

А так как справедливо неравенство $\sqrt{a} < \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2}}$, то имеем оценку

$$I(S_2) < 2 \int_0^{+\infty} \frac{(1 - z_0^2 + y^2)dy}{[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} = I_0(z_0) \quad (3.14)$$

Интеграл $I_0(z_0)$ из (3.14) несложно подсчитать. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1 - z_0^2 + y^2}{(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4z_0^2 y^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - |z_0|}{y^2 + (1 - |z_0|)^2} + \frac{1 + |z_0|}{y^2 + (1 + |z_0|)^2} \right]$$

Тогда получим

$$\int_0^y \frac{(1 - z_0^2 + y^2)}{[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy = \frac{1}{2} \left[\arctg \frac{y}{1 - |z_0|} + \arctg \frac{y}{1 + |z_0|} \right]$$

Следовательно, устремляя $y \rightarrow \infty$, получим $I_0(z_0) = \pi$. Это равенство справедливо только при $z_0 \in (-1, 1)$. Если $z_0 = \pm 1$, то непосредственно из (3.14) получим $I_0(\pm 1) = \pi/2$. Отметим, что случай $z_0 = +1$ не реализуется физически, так как в этом случае функция $f(z, 1) = (1 - z^2)(z - 1)^2 = (1 - z)^3(1 + z)$ является монотонно убывающей на отрезке $z \in [0, 1]$, а значит, уравнение $(1 - z^2)(z - 1)^2 - A^2 = 0$ имеет на этом отрезке не более одного корня, что исключает наличие равновесных конфигураций. Случай $z_0 = -1$ является особым, так как здесь построенный выше контур интегрирования проходит через точку $z = -1$, являющейся полюсом. Тогда в правой части равенства (3.3) следует добавить еще половину вычета в точке $z = -1$, умноженную на $2\pi i$.

Подсчитаем полный вычет в точке $z = -1$, умноженный на $2\pi i$, предполагая, что $z_0 \leq -1$. В этом случае, как это было отмечено выше, два оставшихся (помимо z_1, z_2) корня уравнения $(1 - z^2)(z - z_0)^2 - A^2 = 0$ лежат левее полюса $z = -1$, и поэтому значение корня $\sqrt{-(z - z_1)(z - z_2)(z^2 + pz + q)}$ в точке $z = -1$ будет равно $\sqrt{\rho_1 \rho_2 (1 - p + q) \exp(3\pi i)} = -iA$. Тогда получим следующее значение вычета в точке $z = -1$

$$Q_2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{A \rho e^{i\varphi} i d\varphi}{2 \rho e^{i\varphi} (-iA)} = -\pi \quad (3.15)$$

Таким образом, в случае $z_0 = -1$ имеем, вместо (3.3), такое соотношение

$$I(S_1) + I(S_2) + I(S_3) = Q_1 + 0.5Q_2 = -\pi - 0.5\pi = -1.5\pi$$

Отсюда получаем

$$I(A, z_0) = 0.5[1.5\pi + I(S_2)] \quad (3.16)$$

Выше мы доказали, что в случае $z_0 = -1$ справедливо строгое неравенство $I(S_2) < I_0(-1) = 0.5\pi$, где I_0 определено в (3.14). Тогда из (3.16) получим $I(A, z_0) < \pi$. Если же $z_0 \in (-1, +1)$, то мы используем равенство (3.6), где, как было показано выше, должно соблюдаться строгое неравенство $I(S_2) < \pi$. Тогда опять же получаем $I(A, z_0) < \pi$. Таким образом, показано, что в случае $z_0 \in [-1, 1]$ справедливо строгое неравенство $I(A, z_0) < \pi$.

2 случай $z_0 \in (-\infty, -1]$. В этом случае все рассуждения аналогичны предыдущему пункту. Однако подынтегральная функция в интеграле из (3.1) имеет уже два полюса в точках $z = 1$, $z = -1$. Вычеты в этих точках, умноженные на $2\pi i$, как это было показано выше, равны $Q_1 = Q_2 = -\pi$. Тогда вместо (3.3) имеем такое соотношение

$$I(S_1) + I(S_2) + I(S_3) = Q_1 + Q_2 = -2\pi$$

Отсюда, аналогично предыдущему пункту, получим следующее соотношение $I(A, z_0) = 0.5[2\pi + I(S_2)]$, в котором $I(S_2)$ дается формулами (3.12), (3.13). Покажем, что в этом случае имеет место строгое неравенство $I(S_2) < 0$, которое, согласно последнему соотношению, влечет строгое неравенство $I(A, z_0) < \pi$. Действительно, введем обозначение $\varepsilon = z_0^2 - 1$, $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Тогда из (3.12) имеем следующее неравенство

$$I(S_2) < (\sqrt{2}A) \int_0^{+\infty} \frac{(y^2 - \varepsilon)\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}dy}{\sqrt{a^2 + b^2}[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} = (\sqrt{2}A)I_1(\varepsilon) \quad (3.17)$$

Покажем, что стоящий в правой части последнего неравенства (3.17) интеграл $I_1(\varepsilon)$ строго отрицателен для всех $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$F(y) = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}}, \quad a = A^2 + y^2(y^2 - \varepsilon), \quad b = -2y^3\sqrt{1 + \varepsilon} \quad (3.18)$$

Преобразуем интеграл $I_1(\varepsilon)$ из (3.17) следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_0^{+\infty} \frac{(y^2 - \varepsilon)}{[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} F(y) dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(y^2 - \varepsilon)}{[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} F(y) dy + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{(y^2 - \varepsilon)}{[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} F(y) dy \end{aligned}$$

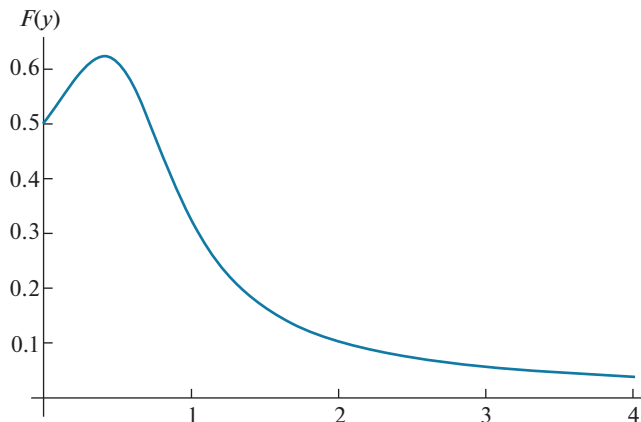
В последнем интеграле делаем замену $z = \varepsilon/y$ и получаем следующую формулу

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(y^2 - \varepsilon)}{[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} [F(y) - F(\varepsilon/y)] dy \quad (3.19)$$

Для функции $F(y)$, даваемой формулой (3.18), справедливо неравенство

$$F(y) - F(\varepsilon/y) \geq 0, \quad y \in [0, \sqrt{\varepsilon}] \quad (3.20)$$

Отметим, что полное и строгое доказательство неравенства (3.20) достаточно громоздко и приводится далее в разделе 4 данной статьи.

Рис. 2. График функции $F(y)$

Из (3.19) и (3.20) следует $I_1(\epsilon) < 0$. А это, согласно (3.17), означает, что $I(S_2) < 0$. Что и требовалось доказать.

4. Доказательство неравенства (3.20) раздела 3. Покажем, что для функции $F(y)$ из (3.18) справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Функция $F(y)$ из (3.18) на интервале $y \in [0, +\infty)$ ведет себя следующим образом.

1. При $y \in [0, \sqrt{\epsilon})$ $F(y)$ имеет в точности один максимум в точке, принадлежащей интервалу $y \in [0, \sqrt{0.5\epsilon})$. При этом выполнены неравенства $F(0) > 0$, $F(\sqrt{\epsilon}) < 0$, $F(0) > F(\sqrt{\epsilon})$.

2. При $y \in [\sqrt{\epsilon}, +\infty)$ $F(y)$ монотонно убывает (вплоть до нуля при $y \rightarrow +\infty$).

Качественно, график функции $F(y)$ представлен на рис. 2. Ясно, что из приведенного утверждения будет следовать, как частный случай, неравенство (3.20). Действительно, в силу пункта 1 утверждения, справедливо неравенство $F(y) > F(\sqrt{\epsilon})$, $y \in [0, \sqrt{\epsilon})$, а в силу пункта 2 утверждения выполнено неравенство $F(\sqrt{\epsilon}) \geq F(\epsilon/y)$, $y \in [0, \sqrt{\epsilon}]$. Объединение этих неравенств приводит к неравенству (3.20).

Доказательство утверждения. Далее, для удобства записи, рассматриваем функцию $G(y) = F^2(y)$, и кроме того, в качестве независимой переменной рассматриваем $u = y^2$. Тогда имеем

$$G(u) = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \quad a = A^2 + u^2 - \epsilon u, \quad b^2 = 4(1 + \epsilon)u^3 \quad (4.1)$$

Ясно, что достаточно доказать все свойства утверждения для функции $G(u)$, даваемой формулами (4.1). Для производной функции $G(u)$ имеем следующее выражение

$$\begin{aligned} G'(u) &= (a^2 + b^2)^{-2} H(u), \\ H(u) &= (b^2 - a^2)a' - 2abb' - (aa' + bb')\sqrt{a^2 + b^2}, \\ a' &= 2u - \epsilon, \quad bb' = 6(1 + \epsilon)u^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее рассмотрим два случая: 1) $A^2 > 0.25\epsilon^2$, 2) $A^2 < 0.25\epsilon^2$.

1) $A^2 > 0.25\epsilon^2$. В этом случае имеем

$$a = A^2 + u^2 - \epsilon u > A^2 - 0.25\epsilon^2 > 0, \quad u \in [0, +\infty)$$

Тогда из (4.2) получим

$$H(0) = 2\epsilon A^4 > 0,$$

$$H(0.5\epsilon) = -3a(1 + \epsilon)\epsilon^2 - 1.5(1 + \epsilon)\epsilon^2\sqrt{a^2 + b^2} < 0$$

Таким образом, корень уравнения $H(u) = 0$, а, следовательно, и уравнения $G'(u) = 0$, наверняка есть на интервале $u \in [0, 0.5\epsilon]$. Покажем, что этот корень только один и на всем интервале $u \in [0, +\infty)$. Для этого достаточно показать, что $H'(u) < 0$ для всех $u \in [0, +\infty)$. Действительно, из (4.2) получим

$$H'(u) = a''(b^2 - a^2) - 2a(a'^2 + b'^2 + bb'') - \\ - \sqrt{a^2 + b^2}(a'^2 + b'^2 + aa'' + bb'') - \frac{(aa' + bb')^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Отбрасывая в правой части последнего равенства заведомо отрицательные слагаемые, получим следующую оценку

$$H'(u) < 2b^2 - \sqrt{a^2 + b^2}[(2u - \epsilon)^2 + 2a + 12u(1 + \epsilon)] \quad (4.3)$$

Используя неравенства $\sqrt{a^2 + b^2} > b$, $a > 0$, получим из (4.3) оценку

$$H'(u) < b[2b - (2u - \epsilon)^2 - 6u(1 + \epsilon)] < 0$$

Справедливость последнего неравенства вытекает из неравенств

$$0 < b < 0.5(2u - \epsilon)^2 + 6u(1 + \epsilon) = 2u^2 + 6u + 4\epsilon u + 0.5\epsilon^2$$

Последнее неравенство следует из очевидного неравенства

$$b^2 = 4(1 + \epsilon)u^3 < (2u^2 + 6u + 4\epsilon u + 0.5\epsilon^2)^2$$

Таким образом, мы показали, что $H(u) < 0$ для всех $u \in [0, +\infty)$. Следовательно, функция $H(u)$ является монотонной на всем интервале $u \in [0, +\infty)$, а значит корень уравнения $H(u) = 0$ (а, следовательно, и уравнения $G'(u) = 0$) является единственным. Из доказанного свойства функции $G(u)$ следует справедливость пп. 1 и 2 утверждения. Неравенства $F(0) > 0$, $F(\sqrt{\epsilon}) < 0$, $F(0) > F(\sqrt{\epsilon})$ устанавливаются непосредственной проверкой.

2) $A^2 < 0.25\epsilon^2$. В этом случае функция $a = A^2 + u^2 - \epsilon u$ обращается в нуль в точках

$$u_1 = 0.5\epsilon - \sqrt{0.25\epsilon^2 - A^2}, \quad u_2 = 0.5\epsilon + \sqrt{0.25\epsilon^2 - A^2} \quad (4.4)$$

Таким образом,

$$a(u) < 0, \quad u \in (u_1, u_2), \quad a(u) \geq 0, \quad u \notin (u_1, u_2).$$

Здесь мы имеем следующие соотношения для функции $H(u)$

$$H(0) = 2\epsilon A^4 > 0, \quad H(u_1) = (2u_1 - \epsilon)b^2 - 6b(1 + \epsilon)u_1^2 < 0 \quad (4.5)$$

Последнее неравенство в (4.5) справедливо, так как, согласно (4.4), имеем $u_1 < 0.5\epsilon$. Из (4.5) следует, что функция $H(u)$, а значит, и производная $G'(u)$, заведомо имеют

нуль на интервале $u \in (0, u_1) \subset (0, 0.5\epsilon)$. Пусть $u_* \in (0, u_1)$ это первый нуль функции $G(u)$. Ясно, что это точка максимума функции $G(u)$ и выполнены условия

$$G(u_*) = H(u_*) = 0, \quad G''(u_*) < 0, \quad H'(u_*) < 0$$

Покажем, что этот нуль единственный. Для этого достаточно только показать, что $G(u) < 0$, $u \in (u_1, u_2)$. Действительно, если мы это установили, то при $u \in (u_1, u_2)$ $G(u)$ не может обратиться в нуль, а при $u \notin (u_1, u_2)$ мы имеем $a(u) > 0$ и можем показать (точно также, как это мы сделали в случае 1), что $H'(u) < 0$. Следовательно, если $G(u)$ обратится в нуль еще раз (после точки $u = u_*$), то это опять будет точка максимума, что явно противоречиво.

Итак, пусть $u \in (u_1, u_2)$. Тогда $a(u) = A^2 + u^2 - \epsilon u < 0$. Обозначим $a_1(u) = -a(u) = \epsilon u - u^2 - A^2 > 0$ и перепишем выражение для $G(u)$ из (4.1) в следующем виде

$$G(u) = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + b^2}}{a_1^2 + b^2} = \frac{b^2}{(a_1^2 + b^2)(a_1 + \sqrt{a_1^2 + b^2})} \quad (4.6)$$

Обозначим

$$k = 2\sqrt{1 + \epsilon}, \quad \lambda = \frac{a_1}{b} = \frac{\epsilon u - A^2 - u^2}{ku^{3/2}} \quad (4.7)$$

Из (4.6), (4.7) имеем

$$G(u) = \frac{1}{E(u)}, \quad E(u) = b(1 + \lambda^2)(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}), \quad (4.8)$$

$$\frac{d\lambda}{du} = (3A^2 - \epsilon u - u^2) \frac{\sqrt{u}}{2ku^3}$$

Из (4.8) следует, что неравенство $G(u) < 0$ эквивалентно неравенству $E(u) > 0$. Используя (4.8), получим

$$E(u) = 0.5k(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})\sqrt{u}P(u), \quad P(u) = 3(1 + \lambda^2) + 2u(2\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})\frac{d\lambda}{du} \quad (4.9)$$

Из последнего соотношения следует, что неравенство $E(u) > 0$ эквивалентно неравенству $P(u) > 0$. Введем еще обозначения

$$x = \epsilon u - u^2 - A^2, \quad y = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) - A^2 \quad (4.10)$$

Тогда, используя (4.8) и (4.9), получим

$$P(u) = \frac{3}{k^2 u^3} Q(u), \quad Q(u) = k^2 u^3 + x^2 - y(2x + \sqrt{k^2 u^3 + x^2}) \quad (4.11)$$

Таким образом, неравенство $P(u) > 0$ эквивалентно неравенству $Q(u) > 0$.

Итак, надо установить справедливость неравенства $Q(u) > 0$, при $u \in (u_1, u_2)$, где $Q(u)$ дается формулами из (4.11), (4.10). Здесь u_1, u_2 — корни уравнения $x = \epsilon u - u^2 - A^2 = 0$, которые даются формулами (4.4), причем $x(u) > 0$, $u \in (u_1, u_2)$. Введем еще в рассмотрение величины u_3, u_4 — корни квадратного уравнения $y = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) - A^2 = 0$, которые даются следующими формулами

$$u_3 = -0.5\epsilon - \sqrt{0.25\epsilon^2 + 3A^2}, \quad u_4 = -0.5\epsilon + \sqrt{0.25\epsilon^2 + 3A^2} \quad (4.12)$$

Отметим, что

$$y = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) - A^2 < 0, \quad u \in (u_3, u_4)$$

Из (4.4), (4.12) и неравенства $A^2 < 0.25\epsilon^2$ следуют неравенства

$$u_3 < 0 < u_1 < u_4 < 0.5\epsilon < u_2 < \epsilon \quad (4.13)$$

Исходя из неравенств (4.13), имеем три возможных случая:

$$1) u \in (u_1, u_4); \quad 2) u \in (u_4, 0.5\epsilon); \quad 3) u \in (0.5\epsilon, u_2).$$

Далее, рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Случай 1. Здесь $u \in (u_1, u_4)$. Тогда имеем

$$y = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) - A^2 < 0, \quad x = \epsilon u - u^2 - A^2 > 0.$$

Для $Q(u)$ из (4.11) получим

$$Q(u) = k^2 u^3 + x^2 + |y|(2x + \sqrt{k^2 u^3 + x^2}) > 0,$$

т.е. неравенство $Q(u) > 0$ выполнено.

Случай 2. Здесь $u \in (u_4, 0.5\epsilon)$. В этом случае имеем неравенства

$$0 < y < y_0 = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) \quad (4.14)$$

Обозначим $\mu = x - y = \frac{2u}{3}(\epsilon - 2u) > 0$. Тогда получим для $Q(u)$ из (4.11)

$$Q(u) = k^2 u^3 + \mu^2 - y^2 - y\sqrt{k^2 u^3 + (y + \mu)^2}$$

Используя неравенства (34), из последнего соотношения получим оценку

$$Q(u) > Q_0 = k^2 u^3 + \mu^2 - y_0^2 - y_0\sqrt{k^2 u^3 + (y_0 + \mu)^2} \quad (4.15)$$

Покажем, что $Q_0 > 0$. Сначала установим справедливость неравенства

$$k^2 u^3 + \mu^2 - y_0^2 > 0$$

Используя обозначения для μ , y_0 , получим, что последнее неравенство эквивалентно следующему

$$36u + 5\epsilon^2 + 63u^2 - 30\epsilon u > 0$$

Последнее неравенство выполнено, так как квадратный трехчлен относительно u не имеет вещественных корней. Далее, для доказательства неравенства $Q_0 > 0$ достаточно показать, согласно (4.15), справедливость неравенства

$$k^2 u^3 + \mu^2 - y_0^2 > y_0\sqrt{k^2 u^3 + (y_0 + \mu)^2}, \quad \mu = \frac{2}{3}(\epsilon u + u^2), \quad y_0 = \frac{1}{3}(\epsilon u - u^2)$$

Возводя в квадрат левую и правую части этого неравенства можно убедиться в его справедливости (мы не приводим подробных выкладок ввиду их громоздкости). Таким образом, в этом случае доказано, что $Q(u) > Q_0 > 0$, т.е. неравенство $Q(u) > 0$ выполнено.

Случай 3. Здесь $u \in (0.5\epsilon, u_2)$. В этом случае мы имеем неравенство

$$\mu = x - y = \frac{2u}{3}(\epsilon - 2u) < 0$$

Тогда, согласно (4.11) имеем следующую оценку

$$Q(u) > Q_1(u) = k^2 u^3 - y^2 - y\sqrt{k^2 u^3 + y^2}$$

Покажем, что $Q_1(u) = k^2 u^3 - y^2 - y\sqrt{k^2 u^3 + y^2} > 0$. Имеем

$$k^2 u^3 - y^2 - y\sqrt{k^2 u^3 + y^2} > 0 \Leftrightarrow k^2 u^3 - y^2 > y\sqrt{k^2 u^3 + y^2} \Leftrightarrow k^2 u^3 > 3y^2$$

Вспоминая формулу для y , запишем последнее неравенство в следующем эквивалентном виде

$$p(u) = (2\sqrt{1+\varepsilon})u^{3/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon u + u^2) + \sqrt{3}A^2 > 0, \quad u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$$

Для доказательства неравенства $p(u) > 0$ при $u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$, вычисляем производные

$$p'(u) = 3\sqrt{1+\varepsilon}\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon + 2u), \quad p''(u) = \frac{3\sqrt{1+\varepsilon}}{2\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Несложно проверить, что $p''(u) > 0$ при $u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда имеем на этом участке и $p'(u) > 0$, так как несложно проверяется, что $p'(0.5\varepsilon) > 0$. Таким образом, для справедливости неравенства $p(u) > 0$ при $u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$ достаточно установить, что $p(0.5\varepsilon) > 0$. Вычисляем

$$p(0.5\varepsilon) = 2\sqrt{1+\varepsilon}\frac{\varepsilon^{3/2}}{2^{3/2}} - \frac{3}{4\sqrt{3}}\varepsilon^2 + \sqrt{3}A^2 > \varepsilon^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\varepsilon} - \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\varepsilon}\right) > 0$$

Таким образом, установлено, что $Q(u) > Q_1(u) > 0$ при $u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$. Таким образом, неравенство $Q(u) > 0$ верно и в этом случае.

Утверждение полностью доказано.

5. Заключение. В статье рассмотрены задачи о поиске равновесных конфигураций тяжелой нерастяжимой нити-цепочки на гладких поверхностях: конусе и сфере. Полное исследование таких задач сводится к аналитическому исследованию эллиптических интегралов 3-го рода как функций некоторого числа параметров. Такие исследования, как показано в настоящей статье, наталкиваются на определенные математические трудности, которые в случае конической или сферической поверхностей могут быть преодолены. Для более сложных типов поверхностей, вероятно, потребуется использование численных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1960. 515 с.
2. *Меркин Д.Р.* Введение в механику гибкой нити. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980. 240 с.
3. *Byrd Paul F., Morris Friedman.* Handbook of Elliptic Integrals. Springer, 1954. 358 p.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матве. (Серия: справочная математическая библиотека). М.: Издательство "НАУКА", 1967. Главная редакция физико-математической литературы. 300 с.
5. Higher Transcendental Functions. V. 3. Based, in part, on notes left by Harry Bateman and compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project Director Arthur Erdelyi. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955. 396 p.
6. *Legendre A.M.* Traite des Fonctions Elliptiques et des Integrales Euleriennes. V. 1. Paris. 1825.vii. 590 p.
7. *Розенблат Г.М.* О равновесии нерастяжимой тяжелой нити на конусе или сфере // Доклады академии наук. 2018. Т. 482. № 5. С. 521–526.

-
8. Зубелевич О.Э. Задача о равновесии цепи на конусе // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2017. Т. 17. № 4. С. 57–63.
 9. Якубовский Ю.В., Живов В.С., Коритынский Я.И., Мигушов И.И. Основы механики нити. М.: Легкая индустрия, 1973. 271 с.
 10. Appell P. Sur la chaînette spherique // Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885). P. 65–71.
 11. Пожарицкий Г.К. Устойчивость равновесий механических систем, включающих гибкую нерастяжимую нить // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4.
 12. Минаков А.П. Основы механики нити. Научно-исследовательские труды Московского текстильного института. 1941. Т. 9. Вып. 1.
 13. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978.
 14. Щедров В.С. Основы механики гибкой нити. М.: Машгиз, 1961.
 15. Алексеев Н.И. Статика и установившееся движение гибкой нити. М.: Легкая индустрия, 1970.
 16. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.
 17. Weinstein A. The Spherical Pendulum and Complex Integration // Amer. Math. Monthly. 1942. V. 49. P. 521–523.