ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021,
№ 3, с. 143–154

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ АНАЛОГИИ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

© 2021 г. В. В. Васильев[a],*, Л. В. Федоров[b]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

[b] *АО ВПК НПО Машиностроение, Реутов, Россия*

**e-mail: vvvas@dol.ru*

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.
После доработки 21.09.2020 г.
Принята к публикации 07.10.2020 г.

В статье предлагается новая интерпретация основной геометрической концепции общей теории относительности, согласно которой гравитация ассоциируется не с кривизной порождаемого ей риманова пространства, а с деформациями этого пространства. При такой формулировке линеаризованные уравнения общей теории относительности для пустого пространства оказываются аналогичными уравнениям совместности деформаций линейной теории упругости. Существенно, что операторы уравнений, соответствующих этим двум теориям, обладают одним и тем же свойством – их дивергенция тождественно равна нулю. В теории относительности это свойство уравнений порождает одну из основных проблем теории – система уравнений, описывающих гравитационное поле, оказывается неполной, так как обращение в нуль дивергенции операторов этих уравнений снижает число взаимно независимых уравнений поля, которое оказывается меньше числа неизвестных компонентов метрического тензора. Общая форма уравнений, которыми следует дополнить уравнения поля для получения полной системы, в общей теории относительности до настоящего времени неизвестна. Однако в теории упругости такие уравнения известны – это уравнения равновесия, представляющие собой равенство нулю дивергенции тензора напряжений, линейно связанного с тензором деформаций. Предлагается использовать отмеченную аналогию для получения уравнений, дополняющих уравнения поля в общей теории относительности. В качестве приложения рассматривается задача со сферической симметрией. Полученное решение не совпадает с известным решением Шварцшильда. Оно не является сингулярным и определяет критический радиус, составляющий 2/3 гравитационного радиуса.

Ключевые слова: теория упругости, общая теория относительности, сферически симметричная задача

DOI: 10.31857/S0572329921030120

1. Введение – уравнения общей теории относительности. В настоящей работе общая теория относительности (ОТО) рассматривается как феноменологическая теория, основанная на изотропной и однородной модели среды, не учитывающей ее возможную внутреннюю структуру. В рамках этой модели задача общей теории относительности заключается в определении метрического тензора, входящего в метрическую форму

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{1.1}$$

четырехмерного риманова пространства, моделирующего среду, из системы уравнений, связывающей тензор Эйнштейна G_{ij} с тензором энергии-импульса T_{ij}

$$G_{ij} = \chi T_{ij} \tag{1.2}$$

Здесь тензор

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \tag{1.3}$$

выражается через тензор кривизны Риччи R_{ij} ($R = g^{ij} R_{ij}$). В уравнение (1.2) входит гравитационная постоянная ОТО

$$\chi = 8\pi\gamma/c^4 \tag{1.4}$$

выражающаяся через классическую гравитационную постоянную γ и скорость света c. Согласно законам сохранения, дивергенция материального тензора T_{ij} равна нулю. В силу соотношения (1.2) аналогичным свойством обладает и тензор Эйнштейна, то есть

$$\nabla_j G_{ij} = 0 \tag{1.5}$$

Для пустого пространства (вне источника гравитации) $T_{ij} = 0$ и уравнение (1.2) принимает вид

$$G_{ij} = 0 \tag{1.6}$$

Десять уравнений (1.6) включают в качестве неизвестных десять компонентов метрического тензора g_{ij}. Однако в силу того, что операторы G_{ij} связаны четырьмя уравнениями (1.5), из этих десяти уравнений только шесть являются взаимно независимыми. Проблема неполноты системы (1.6) известна и широко обсуждается в литературе по ОТО [1–6]. Систему (1.6) предлагается дополнить так называемыми координатными условиями. В частности, известны гармонические координатные условия [3], накладываемые на метрический тензор

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{d} g^{ij}) = 0 \tag{1.7}$$

где d – определитель метрического тензора. Несмотря на наличие математического обоснования существования решения уравнений ОТО, дополненных условиями (1.7) [7] и полученного решения внешней сферически симметричной задачи [8], широкого признания условия (1.7) в качестве дополнительных уравнений к уравнениям (1.6) не получили. При решении конкретных задач число неизвестных, как правило, приводится к числу уравнений (1.6) приравниванием части компонентов метрического тензора соответствующим компонентам тензора для эвклидова пространства.

В настоящей работе предлагается новая форма дополнительных уравнений, следующая из аналогии между уравнениями теории упругости и линеаризованными уравнениями ОТО. Предварительно вводится новая геометрическая интерпретация гравитации в рамках ОТО. Согласно традиционной интерпретации ОТО, гравитация ассоциируется с кривизной риманова пространства. Однако для пространств с размерностью больше двух кривизна пространства не имеет физического содержания. Вводятся деформации пространства как разности между метрическими коэффициентами, соответствующими риманову пространству, порождаемого гравитацией, и исходного евклидова пространства. Таким образом, считается, что гравитация вызывает деформации пространства, которые представляются более наглядными чем кривизны.

2. Линеаризованные уравнения ОТО. Рассмотрим линеаризованную задачу статики для пустого пространства, отнесенного к декартовым координатам x_i. Вводя деформации по Коши и считая их малыми, запишем компоненты метрического тензора для риманова пространства

$$\begin{gathered} g_{ii} = (1+\varepsilon_{ii})^2 \approx 1 + 2\varepsilon_{ii} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ g_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j;\, i, j = 1, 2, 3), \quad g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Подставляя равенства (2.1) в уравнения (1.6) и осуществляя линеаризацию по деформациям, получим следующие уравнения для гравитационного поля:

$$G_{11} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{44}) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\varepsilon_{33} + \varepsilon_{44}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

$$G_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\varepsilon_{33} + \varepsilon_{44}) + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} G_{44} = 2\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}\right) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь символ $(1, 2, 3)$ обозначает круговую перестановку индексов. В соответствие с уравнениями (1.5), шесть операторов уравнений (2.2) и (2.3) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{2.5}$$

Как и в общем случае, только три уравнения из шести уравнений (2.2) и (2.3) являются взаимно независимыми, что не позволяет найти деформации.

3. Уравнения теории упругости. В теории упругости деформации ε_{ij}^e $(i, j = 1, 2, 3)$ удовлетворяют следующим шести уравнениям совместности деформаций, обеспечивающим непрерывность деформированного пространства:

$$E_{11} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}^e}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}^e}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^e}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{3.1}$$

$$E_{12} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^e}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^e}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}^e}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}^e}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{3.2}$$

Непосредственной проверкой можно установить, что операторы уравнений (3.1) и (3.2) удовлетворяют уравнению аналогичному уравнению (2.5), то есть

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial E_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{3.3}$$

Таким образом, в силу уравнений (3.3) только три из шести уравнений (3.1) и (3.2), включающих шесть упругих деформаций, являются взаимно независимыми. Однако в теории упругости, в отличие от ОТО, уравнения, которыми следует дополнить уравнения (3.1) и (3.2), для получения физически обусловленного решения известны. Этими уравнениями являются уравнения равновесия, которые имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{3.4}$$

Напряжения σ_{ij} связаны с упругими деформациями законом Гука. Рассматривая изотропный материал с модулем сдвига G и равным нулю коэффициентом Пуассона, имеем

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^e \tag{3.5}$$

Подставляя равенства (3.5) в уравнения (3.4), получим

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{21}^e}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{31}^e}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{3.6}$$

Заметим, что это уравнение совпадает с уравнением (3.3), которому удовлетворяют операторы уравнений (3.1) и (3.2). В теории упругости доказываются теоремы существования и единственности решения системы (3.1), (3.2) и (3.6) [9].

Установим аналогию между уравнениями ОТО и теории упругости. Сопоставляя уравнения (2.2), (2.3) и уравнения (3.1), (3.2), можно заключить, что уравнения ОТО формально совпадают с уравнениями теории упругости, если принять в уравнениях (3.1) и (3.2)

$$\varepsilon_{ii}^e = \varepsilon_{ii} + \varepsilon_{44}, \quad \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{3.7}$$

Подставляя равенства (3.7) в уравнения (3.6), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{44}) + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_3} = 0 \tag{3.8}$$

Этими уравнениями и предлагается дополнить уравнения ОТО (2.2)–(2.4). Установленная аналогия используется далее для решения сферически симметричной задачи ОТО, которая допускает точное решение.

4. Сферически симметричная задача. Рассмотрим изотропное твердое сплошное сферическое тело (далее – сфера) с радиусом R и с постоянной плотностью μ, отнесенное к сферическим координатам r, θ, φ. Радиальная и кольцевая деформации сферы связаны с радиальным перемещением известными соотношениями

$$\varepsilon_r^e = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta^e = \frac{u_r}{r} \tag{4.1}$$

Из геометрического вывода этих соотношений следует, что они справедливы при любых величинах перемещения и деформаций. Исключая перемещение из равенств (4.1), получим уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_r^e - (r\varepsilon_\theta^e)' = 0 \tag{4.2}$$

где $(\cdots)' = d(\cdots)/dr$. В теории упругости уравнение (4.2) решается совместно с уравнением равновесия

$$\sigma_r' + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \tag{4.3}$$

в котором σ_r и σ_θ — радиальные и кольцевые напряжения. Для материала с нулевым коэффициентом Пуассона имеем $\sigma_{r,\theta} = E\varepsilon^e_{r,\theta}$, где E — модуль упругости. Таким образом, уравнение (4.3) принимает вид

$$(\varepsilon^e_r)' + \frac{2}{r}(\varepsilon^e_r - \varepsilon^e_\theta) = 0 \tag{4.4}$$

Это уравнение аналогично уравнению (3.6).

Рассмотрим статическую задачу ОТО. В сферических координатах метрическая форма (1.1) имеет вид

$$ds^2 = g^2dr^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - h^2c^2dt^2 \tag{4.5}$$

где t — время, а коэффициенты g, ρ, h зависят только от радиальной координаты. Для пустого пространства, окружающего сферу ($R \le r < \infty$), уравнения гравитационного поля (1.6) записываются следующим образом [2]:

$$E^1_1 = \frac{1}{\rho_e^2} - \frac{\rho'_e}{g_e^2\rho_e}\left(\frac{\rho'_e}{\rho_e} + \frac{2h'_e}{h_e}\right) = 0 \tag{4.6}$$

$$E^2_2 = -\frac{1}{g_e^2}\left[\frac{h''_e}{h_e} + \frac{\rho''_e}{\rho_e} + \frac{\rho'_e}{\rho_e}\left(\frac{h'_e}{h_e} - \frac{g'_e}{g_e}\right) - \frac{g'_e h'_e}{g_e h_e}\right] = 0 \tag{4.7}$$

$$E^4_4 = \frac{1}{\rho_e^2} - \frac{1}{g_e^2}\left[\left(\frac{\rho'_e}{\rho_e}\right)^2 + \frac{2\rho''_e}{\rho_e} - \frac{2g'_e\rho'_e}{g_e\rho_e}\right] = 0 \tag{4.8}$$

Здесь используются смешанные компоненты тензоров так как для сферически симметричной задачи они совпадают с физическими компонентами. Индекс “e” соответствует наружному пространству. Найдем решение уравнений (4.6)–(4.8) [10]. Уравнение (4.8) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{\rho_e(\rho'_e)^2}{g_e^2}\right] = \rho'_e$$

и его общее решение имеет вид

$$g_e^2 = \frac{\rho_e(\rho'_e)^2}{\rho_e + C_1}$$

Подставляя это решение в уравнение (4.6) и интегрируя, получим

$$h_e^2 = C_2\left(1 + \frac{C_1}{\rho_e}\right)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из асимптотических условий, согласно которым при $r \to \infty$ полученное решение должно совпадать с решением, следующим из теории Ньютона [1]. Полагая, что $\rho_e(r \to \infty) \to r$, получим $C_2 = 1$ и $C_1 = r_g$, где

$$r_g = 2m\gamma/c^2 \tag{4.9}$$

— так называемый гравитационный радиус, который зависит от массы шара m и классической гравитационной постоянной γ. Окончательно имеем

$$g_e^2 = \frac{(\rho_e')^2}{1 - r_g/\rho_e}, \quad h_e^2 = 1 - \frac{r_g}{\rho_e} \tag{4.10}$$

Подставив решение (4.10) в уравнение (4.7), можно убедиться в том, что оно тождественно удовлетворяется при любой функции $\rho_e(r)$. Таким образом, для продолжения решения необходимо еще одно уравнение. Для получения этого уравнения воспользуемся аналогией, которая обсуждается в разделе 3. Введем деформации пространства, порождаемые гравитацией, представив метрические коэффициенты в виде

$$g = 1 + \varepsilon_r, \quad \rho = r(1 + \varepsilon_\theta), \quad h = 1 + \varepsilon_t \tag{4.11}$$

где ε_t — деформация времени. Из уравнений (4.10) следует, что

$$g_e h_e = \rho_e' \tag{4.12}$$

Подставляя равенства (4.11), получим

$$\varepsilon_r - (r\varepsilon_\theta)' = -\varepsilon_t(1 + \varepsilon_r) \tag{4.13}$$

Это уравнение совпадает с уравнением совместности деформаций (4.2) если ввести условные деформации

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r + \varepsilon_t(1 + \varepsilon_r), \quad \varepsilon_\theta^e = \varepsilon_\theta \tag{4.14}$$

Как следует из теории упругости, для получения физически обусловленного решения к уравнению (4.12) следует добавить уравнение (4.4), которое с учетом равенств (4.14) принимает вид

$$\varepsilon_r'(1 + \varepsilon_t) + \varepsilon_t'(1 + \varepsilon_r) + \frac{2}{r}[\varepsilon_r - \varepsilon_\theta + (1 + \varepsilon_r)\varepsilon_t] = 0$$

Используя равенства (4.11), исключим из этого уравнения деформации. В результате получим

$$(g_e h_e)' + \frac{2}{r}\left(g_e h_e - \frac{\rho_e}{r}\right) = 0$$

Отсюда с учетом уравнения (4.12) имеем

$$r^2\rho_e'' + 2r\rho_e' - 2\rho_e = 0 \tag{4.15}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\rho_e = C_3 r + \frac{C_4}{r^2}$$

Из асимптотического условия при $r \to \infty$ найдем $C_3 = 1$. Коэффициенты g_e и h_e определяются из равенств (4.10). Вводя безразмерные переменные

$$\bar{r} = r/R, \quad \bar{r}_g = r_g/R, \quad \bar{\rho} = \rho/R \tag{4.16}$$

и новую постоянную C, окончательно получим

$$g_e^2 = \frac{1 - 2C/\bar{r}^3}{1 - \dfrac{\bar{r}_g}{\bar{r}(1 + C/\bar{r}^3)}}, \quad \bar{\rho}_e = \bar{r}\left(1 + \frac{C}{\bar{r}^3}\right), \quad h^2 = 1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}(1 + C/\bar{r}^3)} \tag{4.17}$$

При $C = 0$ это решение совпадает с решением Шварцшильда

$$g_e^2 = \frac{1}{1 - \bar{r}_g/\bar{r}}, \quad \bar{\rho}_e = \bar{r}, \quad h_e = 1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}} \tag{4.18}$$

полученным при координатном условии $\rho = r$ [2]. Особенностью этого решения является наличие радиуса $r = r_g$ при котором g_e обращается в бесконечность и который называется радиусом горизонта событий черной дыры. В отличие от решения (4.17), решение (4.18) не содержит постоянной интегрирования и определяет геометрию внешнего пространства независимо от решения уравнений ОТО для внутренней области шара. Это связано с условием $\rho_e = r$, при котором уравнение (4.8), имеющее второй порядок, вырождается в уравнение первого порядка. Решение этого уравнения содержит только одну произвольную постоянную, которая определяется из асимптотического условия при $r \to \infty$. Деформации пространства, соответствующие решению Шварцшильда, определяются из равенств (4.11) и имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{r}/\bar{r}_g}}{\sqrt{1 - \bar{r}/\bar{r}_g}}, \quad \varepsilon_\theta = 0, \quad \varepsilon_t = \sqrt{1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}}} - 1$$

Отсюда следует, что кольцевая деформация отсутствует, а радиальная деформация при $r = r_g$ оказывается бесконечно большой и пространство теряет непрерывность.

Постоянная C в решении (4.17) определяется из граничного условия на поверхности сферы. С этой целью получим решение для внутреннего пространства сферы ($0 \le r \le R$). Для сплошного твердого сферического тела уравнения поля (1.2), (1.3) имеют вид [10]

$$E_1^1 = \frac{1}{\rho_i^2} - \frac{\rho_i'}{g_i^2\rho_i}\left(\frac{\rho_i'}{\rho_i} + \frac{2h_i'}{h_i}\right) = \chi\sigma_r \tag{4.19}$$

$$E_2^2 = -\frac{1}{g_i^2}\left[\frac{h_i''}{h_i} + \frac{\rho_i''}{\rho_i} + \frac{\rho_i'}{\rho_i}\left(\frac{h_i'}{h_i} - \frac{g_i'}{g_i}\right) - \frac{g_i'h_i'}{g_ih_i}\right] = \chi\sigma_\theta \tag{4.20}$$

$$\frac{1}{\rho_i^2} - \frac{1}{g_i^2}\left[\left(\frac{\rho_i'}{\rho_i}\right)^2 + \frac{2\rho_i''}{\rho_i} - \frac{2g_i'\rho_i'}{g_i\rho_i}\right] = \chi\mu c^2 \tag{4.21}$$

Индекс “i” соответствует внутреннему пространству. Напряжения удовлетворяют уравнению, следующему из уравнений (1.2) и (1.5), то есть

$$\sigma_r' + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{h_r'}{h_i}(\sigma_r - \mu c^2) = 0 \tag{4.22}$$

В силу уравнения (4.22), которому тождественно удовлетворяют операторы, записанные в левых частях уравнений (4.19)–(4.21), только два из этих уравнений являются линейно независимыми. Таким образом, как и для внешнего пространства, для трех метрических коэффициентов имеется только два уравнения, т.е. система является неполной. Более того, для двух напряжений имеется только одно уравнение (4.22). Недостающее уравнение для напряжений получено в работе [11]. Однако для определения метрических коэффициентов напряжений не требуется, поэтому продолжим анализ. Уравнение (4.21) можно привести к виду [10]

$$1-\frac{1}{\rho_i'}\frac{d}{dr}\left[\frac{\rho_i(\rho_i')^2}{g_i^2}\right]=\chi\mu c^2\rho_i^2$$

Для постоянной плотности μ его общее решение можно записать следующим образом:

$$g_i^2=\frac{(\rho_i')^2}{1-u\rho_i^2+B_1/\rho_i},\quad u=\frac{1}{3}\chi\mu c^2$$

Здесь следует принять $B_1=0$, так как в противном случае метрический коэффициент оказывается сингулярным в центре сферы независимо от ее размера и уровня гравитации. В результате имеем

$$g_i^2=\frac{(\rho_i')^2}{1-u\rho_i^2}\tag{4.23}$$

Введем деформации пространства в соответствие с равенствами (4.11).

Тогда из равенства (4.23) получим

$$\varepsilon_r-(r\varepsilon_\theta)'=(1+\varepsilon_r)(1-\sqrt{1-u\rho_i^2})$$

Это уравнение приводится к уравнению совместности деформаций (4.2) если ввести условные деформации

$$\varepsilon_r^e=\varepsilon_r-(1+\varepsilon_r)(1-\sqrt{1-u\rho_i^2}),\quad \varepsilon_\theta^e=\varepsilon_\theta$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.4) и выражая деформации через метрические коэффициенты с помощью равенств (4.11), имеем

$$\left(g_i'+\frac{2g_i}{r}\right)\sqrt{1-u\rho_i^2}-\frac{g_iu\rho_i\rho_i'}{\sqrt{1-u\rho_i^2}}-\frac{2\rho_i}{r^2}=0$$

Исключая из этого уравнения g_i с помощью равенства (4.23), окончательно получим уравнение

$$r^2\rho_i''+2r\rho_i'-2\rho_i=0\tag{4.24}$$

совпадающее с уравнением (4.15) для внешней задачи. Регулярное решение уравнения (4.24) имеет вид $\rho_i=B_2r$. Используя безразмерные переменные (4.16) и вводя новую постоянную, окончательно получим

$$g_i^2=\frac{B}{1-B^2\alpha\bar{r}^2},\quad \bar{\rho}_i=B\bar{r},\quad \alpha=uR^2=\frac{1}{3}\chi\mu R^2c^2\tag{4.25}$$

Преобразуем выражение (4.25) для α. Используя равенства (1.4) и (4.9) для χ и r_g, найдем

$$\alpha=\frac{m_0}{m}\bar{r}_g,\quad m_0=\frac{4}{3}\pi R^3\mu\tag{4.26}$$

Здесь, m_0 — масса сферы с постоянной плотностью, соответствующая евклидову внутреннему пространству, а m — масса сферы, соответствующая риманову пространству с метрическими коэффициентами (4.25), которая имеет вид

$$m = 4\pi\mu R^3 \int_0^1 g_i \bar{\rho}_i^2 d\bar{r} = 4\pi\mu R^3 B^3 \int_0^1 \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - B^2\alpha\bar{r}^2}} =$$

$$= \frac{2\pi\mu R^3}{\alpha\sqrt{\alpha}}[\arcsin(B\sqrt{\alpha}) - B\sqrt{\alpha}\sqrt{1 - B^2\alpha}]$$

Используя равенства (4.26), окончательно получим

$$\frac{1}{B\sqrt{\alpha}}\arcsin(B\sqrt{\alpha}) - \sqrt{1 - B^2\alpha} = \frac{2\bar{r}_g}{3B} \tag{4.27}$$

Это уравнение связывает параметр α и постоянную B с безразмерным гравитационным радиусом $\bar{r}_g$.

Для определения постоянных C и B, входящих в решения (4.17) и (4.25), воспользуемся условиями непрерывности метрических коэффициентов на поверхности шара, то есть

$$\bar{\rho}_e(\bar{r} = 1) = \bar{\rho}_i(\bar{r} = 1), \quad g_e(\bar{r} = 1) = g_i(\bar{r} = 1)$$

Подставляя равенства (4.17) и (4.25), получим

$$B = 1 + C, \quad \frac{1 - 2C}{\sqrt{1 - \dfrac{\bar{r}_g}{1 + C}}} = \frac{B}{\sqrt{1 - B^2\alpha}} \tag{4.28}$$

Исключая из второго уравнения C, окончательно имеем

$$\frac{3 - 2B}{\sqrt{1 - \dfrac{\bar{r}_g}{B}}} = \frac{B}{\sqrt{1 - B^2\alpha}} \tag{4.29}$$

Таким образом, решение сводится к уравнениям (4.27) и (4.29), которые определяют B и α в зависимости от параметра $\bar{r}_g$. Результаты численного решения этих уравнений представлены в табл. 1.

Рассмотрим предельные случаи. При отсутствии гравитации имеем $\bar{r}_g = 0$ и $\alpha = 0$. В этом случае из уравнений (4.27) и (4.29) следует $B = 1$, $C = 0$ и $g = 1$, $\rho = r$, что соответствует евклидову пространству.

При относительно низком уровне гравитации можно считать, что параметры $\bar{r}_g$ и α много меньше единицы. Тогда уравнения (4.27) и (4.29) дают $B = 0$, $C = 1$ и из равенств (4.10), (4.17) и (4.25) следует

$$g_e^2 = 1 + \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}}, \quad \bar{\rho}_e = \bar{r}, \quad h_e^2 = 1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}}, \quad g_i^2 = 1 + \bar{r}_g\bar{r}^2, \quad \bar{\rho}_i = \bar{r}$$

Это известное линеаризованное решение сферически симметричной задачи ОТО, которое согласуется с экспериментальными результатами.

При высоком уровне гравитации уравнения (4.27) и (4.29) имеют действительное решение при $\bar{r}_g < 1.5$. В предельном случае имеем $\bar{r}_g = 1.5$ и $B = \bar{r}_g$. При этом числитель и знаменатель в левой части уравнения (4.29) обращаются в ноль. Получаемая неопределенность раскрывается с помощью правой части уравнения (4.29), которая дает 2.841. Таким образом, предельные параметры сферы оказываются следующими:

$$\bar{r}_g = 1.5, \quad R = 2r_g/3, \quad g_e(R) = g_i(R) = g_R = 2.841, \\ \rho_e(R) = \rho_i(R) = \rho_R = 1.5R, \quad m = 4.68m_o \tag{4.30}$$

Рассмотрим решение Шварцшильда. Как следует из равенства (4.18), для получения соответствующего внешнего решения необходимо принять $C = 0$. Тогда из первого уравнения (4.18) следует $B = 1$ и внутреннее решение (4.25) принимает вид

$$g_i^2 = \frac{1}{1 - \alpha\bar{r}^2}, \quad \bar{\rho}_i = \bar{r}$$

Согласно равенству (4.18), граничное условие на поверхности шара $\bar{\rho}_e(1) = \bar{\rho}_i(1)$ выполняется, если $\alpha = \bar{r}_g$, что не соответствует первому равенству (4.26). Таким образом, граничное условие для радиального метрического коэффициента в решении Шварцшильда не выполняется. При минимально возможном для внешнего решения (4.18) радиусе $\bar{r} = 1$, т.е. на поверхности сферы, внешнее решение является сингулярным и радиальная деформация внешнего пространства оказывается бесконечно большой. Заметим, что в полученном варианте решения Шварцшильда горизонт событий располагается на поверхности сферы.

Таблица 1

$\bar{r}_g$	B	C	α	m/m_0
0.0001	1.000000	0.000000001	0.000100	1.000003
0.001	1.000000	0.000000050	0.001000	1.000300
0.01	1.000005	0.00000505	0.010000	1.003022
0.1	1.000550	0.000555	0.096861	1.032406
0.2	1.002433	0.002433	0.186819	1.070556
0.3	1.006078	0.006078	0.268762	1.116228
0.4	1.012048	0.012048	0.341337	1.171861
0.5	1.021066	0.021066	0.402966	1.240801
0.6	1.034036	0.034036	0.451942	1.327604
0.7	1.052032	0.052032	0.486659	1.438378
0.8	1.076246	0.076246	0.505978	1.581095
0.9	1.107872	0.107872	0.509678	1.765822
1.0	1.147970	0.147970	0.498788	2.004859
1.1	1.197356	0.197356	0.475585	2.312940
1.2	1.256611	0.256611	0.443158	2.707836
1.3	1.326234	0.326234	0.404756	3.211779
1.4	1.406922	0.406922	0.363199	3.854631
1.42	1.424487	0.424487	0.354706	4.003317
1.44	1.442558	0.442558	0.346184	4.159643
1.46	1.461153	0.461153	0.337643	4.324091
1.48	1.480293	0.480293	0.329094	4.497191
1.49	1.490073	0.490073	0.324819	4.587168
1.499999	1.499999	0.499999	0.320545	4.679526

Рассмотрим проблему распространения света от сферы с параметрами (4.30). Траектория света в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ определяется следующими уравнениями [12]:

$$\frac{dr}{dt} = c\frac{h_e}{g_e}\sqrt{1-\left(\frac{qh_e}{\rho_e}\right)^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = cq\left(\frac{h_e}{\rho_e}\right)^2 \tag{4.31}$$

здесь g_e и h_e определяются равенствами (4.10), а через q обозначена постоянная интегрирования, которая определяется из начального условия. Физические компоненты скорости имеют вид

$$v_r = \frac{g_e}{h_e}\frac{dr}{dt} = c\sqrt{1-\left(\frac{qh_e}{\rho_e}\right)^2}, \quad v_\varphi = c\frac{qh_e}{\rho_e} \tag{4.32}$$

и $v_r^2 + v_\varphi^2 = c^2$. Предположим, что свет распространяется от поверхности шара $r = R$ по направлению, составляющему угол β с радиусом. Тогда начальные условия записываются следующим образом: $v_r = c\cos\beta$, $v_\varphi = c\sin\beta$ и из равенств (4.32) следует $q = (\rho_R/h_R)\sin\beta$, где $\rho_R = \rho_e(R)$, $h_R = h_e(R)$. Рассмотрим случай $\beta = 0$, для которого $v_r = c$, $v_\varphi = 0$. Отсюда следует, что в радиальном направлении свет распространяется со скоростью c для любой сферы. Теперь рассмотрим случай $\beta \neq 0$. Используя уравнения (4.10), (4.31) и обозначения (4.16), получим

$$\frac{d\bar{\rho}_e}{d\varphi} = \frac{d\bar{r}}{d\varphi}\frac{d\bar{\rho}_e}{d\bar{r}} = \bar{\rho}_e^2\sqrt{\frac{1}{\bar{\rho}_R^2\sin^2\beta}\left(1-\frac{\bar{r}_g}{\bar{\rho}_R}\right) - \frac{1}{\bar{\rho}_e^2}\left(1-\frac{\bar{r}_g}{\bar{\rho}_e}\right)} \tag{4.33}$$

Для сферы с предельными характеристиками (4.30) имеем $\bar{r}_g = \bar{\rho}_R = 1.5$. В результате первый член в правой части этого уравнения обращается в ноль и оно не имеет действительного решения. Таким образом, при $\beta \neq 0$ свет не распространяется с поверхности сферы с предельными характеристиками. Аналогичным свойством обладает черная дыра, следующая из решения Шварцшильда для которой $\bar{\rho}_R = \bar{r}_g$. Однако в отличие от решения Шварцшильда полученное решение не является сингулярным и предельные характеристики шара определяются равенствами (4.30).

В заключение, с целью дальнейшего анализа решения Шварцшильда рассмотрим сферически симметричную задачу динамики. Предположим, что в метрической форме (4.5) коэффициенты g, ρ, h являются функциями r и t. Тогда статические уравнения (4.6)–(4.8) обобщаются следующим образом:

$$(E_1^1)_D = E_1^1 + \frac{1}{h^2}\left[\frac{2\ddot{\rho}}{\rho} + \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 - \frac{2\dot{\rho}\dot{h}}{\rho h}\right] = 0 \tag{4.34}$$

$$(E_2^2)_D = E_2^2 - \frac{1}{h^2}\left[\frac{\ddot{\rho}}{2\rho} + \frac{\ddot{g}}{2g} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{g}}{g}\right)^2 + \frac{\dot{g}\dot{\rho}}{g\rho} - \frac{\dot{g}\dot{h}}{gh} - \frac{\dot{\rho}\dot{h}}{\rho h}\right] = 0 \tag{4.35}$$

$$(E_4^4)_D = E_4^4 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{g^2}\left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{2\rho''}{\rho} - \frac{2\rho' g'}{\rho g}\right] + \frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 + \frac{2\dot{\rho}\dot{g}}{\rho g}\right] = 0 \tag{4.36}$$

и дополняются еще двумя уравнениями

$$(E_1^4)_D = \frac{2}{g^2}\left(\frac{\dot{g}}{g} - \frac{\dot{g}\rho'}{g\rho} - \frac{\dot{\rho}\rho'}{\rho^2} - \frac{\dot{\rho}h'}{\rho h}\right), \quad (E_4^1)_D = -\left(\frac{g}{h}\right)^2(E_1^4)_D \tag{4.37}$$

Здесь E_i^i $(i = 1, 2, 4)$ определяются равенствами (4.6)–(4.8), штрих обозначает, как и ранее, производную по r, а точка – производную по t. Решение Шварцшильда получено при координатном условии $\rho = r$. Поскольку r является независимой переменной, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ и уравнения (4.34) и (4.35) совпадают со статическими уравнениями (4.6) и (4.8). Решение этих уравнений при $\rho = r$ определяется равенствами (4.18), а уравнения (4.7), (4.35) и (4.37) удовлетворяются тождественно. Таким образом, динамическое решение совпадает со статическим. Этот результат известен как теорема Биркгофа [2], согласно которой внешняя сферически симметричная задача имеет только статическое решение. Как следует из изложенного выше, такая формулировка неполна – теорема справедлива только при координатном условии $\rho = r$. Если $\rho \neq r$, динамическая задача не вырождается в статическую. Координатное условие $\rho(r,t) = r$, используемое в решении Шварцшильда, представляется не вполне обоснованным – функция двух переменных приравнивается одному из аргументов.

5. Заключение. На основе новой интерпретации гравитации в ОТО, ассоциируемой не с кривизной а с деформацией пространства, порождаемой гравитацией, установлена аналогия между линеаризованными статическими уравнениями ОТО и уравнениями теории упругости, позволяющая использовать аппарат теории упругости для получения полной системы уравнений ОТО для метрического тензора. С использованием этой аналогии получено новое решение сферически симметричной статической задачи ОТО, не совпадающее с решением Шварцшильда. Решение предсказывает теоретическую возможность существования сплошного твердого сферического тела с постоянной плотностью, аналогичного черной дыре, но характеризуемого ограниченным уровнем гравитации и обладающего радиусом поверхности, составляющим 2/3 гравитационного радиуса.

В настоящей статье представлен новый подход к общей теории относительности. Редакция полагает, что он должен быть обсужден специалистами в данной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
2. *Синг Д.Л.* Общая теория относительности. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 432 с.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. *Чандрасекар С.* Математическая теория черных дыр. М.: Мир, 1986. Ч. 1. 276 с. Ч. 2. 355 с.
5. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. М.: Мир, 1977. Т. 1. 480 с. Т. 2. 525 с. Т. 3. 510 с.
6. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977. 431 с.
7. *Yvonne Choquet-Bruhat*. Theoreme d'Existence pour Certains Systemes d'Equations aux Derivees Partilles non Lineares. Acta Methamatica. 1952. V. 88. P. 141–225.
8. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Изд. ЛКИ, 2007. 568 с.
9. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
10. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* Напряженное состояние упругого шара в сферически симметричном гравитационном поле // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 15–29.
11. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* Релятивистская теория упругости // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 20–27.
12. *Логунов А.А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006. 253 с.