

УДК 621.391,629.78

АНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

© 2021 г. П. А. Кучеренко^{a,*}, С. В. Соколов^b

^aАО «НИИАС» (Ростовский филиал), Ростов-на-Дону, Россия

^bМосковский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

*e-mail: pavelpost83@mail.ru

Поступила в редакцию 14.06.2020 г.

После доработки 29.10.2020 г.

Принята к публикации 28.12.2020 г.

Решена задача аналитического синтеза функций, аппроксимирующих зависимости длины геодезической линии от навигационных параметров ее начальной и конечной точек для сфероида и сферы Земли. Аппроксимирующие длину геодезической линии зависимости определены как для приведенной, так и для геодезической широт. Получены выражения для азимута конечной точки (при известной широте начальной точки), не требующие знания долготы конечной точки и длины геодезической линии. Найденные решения позволяют существенно сократить вычислительные затраты при решении различных классов задач навигации и геодезии.

Ключевые слова: эллипсоид, геодезическая задача, длина геодезической линии, аппроксимация функциональной зависимости

DOI: 10.31857/S0572329921040073

В связи с постоянным развитием высокоточных методов и систем навигации оказывается весьма актуальной проблема высокоточного описания параметров траекторий движения объектов на поверхности сфероидальной Земли. Решение этой проблемы для большинства навигационных приложений сводится к решению частного случая геодезической задачи в следующей формулировке: даны геодезические координаты – широта B и долгота L , начальной (B_0, L_0) и конечной точек (B_1, L_1) движения объекта, начальный (прямой) азимут A_0 движения, требуется найти кратчайшее расстояние S между этими точками (длину геодезической линии), а также конечный (обратный) азимут A_1 геодезической линии в конечной точке. В настоящее время данная задача решается, в основном, использованием итеративных методов при численном решении системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию геодезических линий на сфероиде [1, 2]. Это приводит к значительным временным и вычислительным затратам, что для систем навигации, функционирующих в реальном времени, представляется неприемлемым.

В связи с этим, целью данной статьи является построение аналитической функциональной зависимости, аппроксимирующей с высокой точностью решение указанной геодезической задачи, т.е. связь навигационных параметров B_0, L_0, B_1, L_1, A_0 с длиной геодезической линии S и обратным азимутом A_1 . Синтез данной зависимости будем рассматривать для геодезической долготы и геодезической и приведенной широт, используя следующие обозначения переменных: A – текущий азимут геодезической линии, B – геодезическая широта, u – приведенная широта, L – геодезическая долгота,

E – первый эксцентриситет, e – второй эксцентриситет, a, b – большая и малая полуоси эллипсоида, ds – дифференциал линии на эллипсоиде. Для эллипсоида Красовского:

$$E^2 = 0.0066934216, \quad e^2 = 0.0067385254, \quad c = \frac{a^2}{b} = 6399698.9018 \text{ м,}$$

$$M = \frac{c}{\sqrt{(1 + e^2 \cos^2 B)^3}}, \quad N = \frac{c}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}}$$

Для решения поставленной задачи используем известные уравнения связи навигационных переменных A, B, L , справедливые для любых кривых на сфероиде [1]:

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B} \quad (1)$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M} \quad (2)$$

и только для геодезической линии [1]:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N} \quad (3)$$

Предварительно найдем зависимость текущего азимута геодезической линии A от геодезической широты B , для чего разделим уравнение (3) на уравнение (2):

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{1 + e^2 \cos^2 B}$$

Данное уравнение легко интегрируется методом разделения переменных:

$$\int_{A_0}^A \operatorname{ctg} A dA = \int_{B_0}^B \frac{\operatorname{tg} B}{1 + e^2 \cos^2 B} dB \quad (4)$$

где A и A_0 – текущее и начальное значения азимута, соответственно, B и B_0 – текущее и начальное значение геодезической широты.

Интеграл в левой части (4) – табличный, а в правой – находится методом замены переменных $e \cos B = X$:

$$\int \frac{e \sin B}{e \cos B (1 + e^2 \cos^2 B)} dB = - \int \frac{dX}{X(1 + X^2)} = \ln \sqrt{1 + X^{-2}} = \ln \sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}}$$

Окончательно имеем:

$$\ln \sin A - \ln \sin A_0 = \ln \sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}} - \ln \sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}$$

или

$$\ln \frac{\sin A}{\sin A_0} = \ln \frac{\sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}}}{\sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}}$$

Из последнего выражения можно получить равенство

$$\sin A = \sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}} C_0, \quad C_0 = \frac{\sin A_0}{\sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}}$$

которое определяет зависимость текущего азимута геодезической линии от геодезической широты:

$$A = \arcsin(\sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}} C_0) \quad (5)$$

Остановимся на найденной зависимости подробнее. Помимо ее дальнейшего использования для решения поставленной задачи, зависимость (5) позволяет решить задачу определения азимута A_1 конечной точки с широтой B_1 геодезической линии конечной длины без традиционного знания долготы конечной точки и длины геодезической линии (зная только параметры начальной точки A_0, B_0):

$$A_1 = \arcsin(\sqrt{1 + [e \cos B_1]^{-2}} C_0)$$

Интересно также сравнить полученное выражение с уравнением Клеро [1]:

$$N \cos B \sin A = \frac{c}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}} \cos B \sin A = C$$

Исходя из данного уравнения, выражение $\sin A$ может быть представлено в виде:

$$\sin A = \frac{eC\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}}{e \cos B c} = \sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}} \frac{eC}{c}$$

откуда сравнением с (5) получаем:

$$\frac{eC}{c} = \frac{\sin A_0}{\sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}}$$

и сразу находим различные варианты выражения постоянной Клеро:

$$C = \frac{c \sin A_0}{e\sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}} = \frac{a^2 \sin A_0}{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}} = \frac{\frac{a^2}{b} \sin A_0}{\sqrt{e^2 + [\cos B_0]^{-2}}}$$

существенно расширяющие диапазон ее традиционного представления, приведенный в [1].

Для дальнейшего решения задачи из полученного выражения $\sin A$ найдем $\cos A$:

$$\cos A = \sqrt{1 - (1 + [e \cos B]^{-2})C_0^2} = \sqrt{C_0^{-2} - 1 - [e \cos B]^{-2}} C_0$$

и подставим его в уравнение (2):

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M} = \frac{\sqrt{C_0^{-2} - 1 - (e \cos B)^{-2}} C_0}{\frac{c}{\sqrt{(1 + e^2 \cos^2 B)^3}}} = \frac{C_0 \sqrt{(P[e \cos B]^2 - 1)(1 + e^2 \cos^2 B)^3}}{(e \cos B)c}$$

$$P = C_0^{-2} - 1$$

Полученное уравнение интегрируется методом разделения переменных

$$\int_0^S ds = \int_{B_0}^B \frac{(e \cos B)c}{B_0 C_0 \sqrt{(P[e \cos B]^2 - 1)(1 + e^2 \cos^2 B)^3}} dB \quad (6)$$

но для возможности аналитического вычисления интеграла в левой части необходима его адекватная аппроксимация.

Для получения высокоточной аналитической аппроксимации зависимости $S = f(B)$ проведем предварительно анализ зависимости $S = f(u)$, где u – приведенная широта, связанная с геодезической широтой известным соотношением [1]:

$$\sin u = \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}} \quad (7)$$

Для приведенной широты уравнения (1)–(3) трансформируются следующим образом [1]:

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{a \cos u}$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{a} \cos A \tag{8}$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{v}{a} \operatorname{tg} u \sin A \tag{9}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 u}}$$

Предварительно найдем зависимость текущего азимута геодезической линии A от приведенной широты u . Используя уравнение Клеро для приведенной широты [1]

$$\cos u \cdot \sin A = \Phi$$

где $\Phi = \cos u_*$ или $\Phi = \sin A_*$, u_* – приведенная широта наиболее удаленной от экватора точки геодезической линии, A_* – азимут геодезической линии в точке пересечения ее с экватором, имеем:

$$\sin A = \frac{\Phi}{\cos u} \Rightarrow A = \arcsin \frac{\Phi}{\cos u}$$

откуда также вытекает соответствующее выражение для $\cos A$:

$$\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi}{\cos u}\right)^2} = \frac{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}}{\cos u} \tag{10}$$

Данные соотношения могут быть получены и другим путем – делением уравнения (9) на (8) с последующим интегрированием полученного дифференциального уравнения:

$$\frac{dA}{du} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} u \Rightarrow \int_{A_0}^A \operatorname{ctg} A dA = \int_{u_0}^u \operatorname{tg} u du \Rightarrow \ln \frac{\sin A}{\sin A_0} = \ln \frac{\cos u_0}{\cos u}$$

где u_0 – приведенная широта начальной точки геодезической линии; A_0 – азимут геодезической линии в начальной точке, что приводит к ранее приведенному соотношению:

$$\sin A = \frac{\sin A_0 \cos u_0}{\cos u} = \frac{\Phi}{\cos u}$$

в котором постоянная Клеро уже приобретает новое выражение:

$$\sin A_0 \cos u_0 = \Phi$$

Здесь необходимо отметить, что данное выражение постоянной Клеро (в отличие от приведенных выше традиционных выражений) позволяет решить задачу определения азимута A_1 конечной точки с приведенной широтой u_1 , зная только параметры начальной точки A_0 , u_0 :

$$A_1 = \arcsin \frac{\sin A_0 \cos u_0}{\cos u_1}$$

Для дальнейшего решения поставленной задачи подставим найденное выражение для $\cos A$ в уравнение (8):

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{a\sqrt{1-E^2\cos^2 u}} \frac{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}}{\cos u}, \quad \frac{ds}{du} = \frac{a \cos u \sqrt{1-E^2\cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}}$$

Данное уравнение интегрируется методом разделения переменных

$$\int_0^S ds = a \int_{u_0}^u \frac{\cos u \sqrt{1-E^2\cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du \quad (11)$$

но для возможности аналитического вычисления интеграла в левой части необходима его соответствующая аппроксимация.

Рассмотрим с этой целью возможность упрощения его подынтегрального выражения разложением в ряд функции $\sqrt{1-E^2\cos^2 u}$ по аргументу $E^2\cos^2 u$ (в точке u_l) с точностью до $(E^2\cos^2 u)^3$, что, как показано далее, обеспечивает очень высокую точность аппроксимации (11) (около 10^{-5} метра):

$$\begin{aligned} \sqrt{1-E^2\cos^2 u} &\approx \sqrt{1-E^2\cos^2 u_l} - \frac{E^2}{2\sqrt{1-E^2\cos^2 u_l}} (\cos^2 u - \cos^2 u_l) - \\ &- \frac{E^4}{8\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^3}} (\cos^2 u - \cos^2 u_l)^2 - \frac{E^6}{16\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^5}} (\cos^2 u - \cos^2 u_l)^3 = \quad (12) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos^2 u + \alpha_2 \cos^4 u + \alpha_3 \cos^6 u, \end{aligned}$$

где коэффициенты $\alpha_i, i = 0, \dots, 3$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{1-E^2\cos^2 u_l} + \frac{E^2\cos^2 u_l}{2\sqrt{1-E^2\cos^2 u_l}} - \frac{E^4\cos^4 u_l}{8\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^3}} + \frac{E^6\cos^6 u_l}{16\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^5}} \\ \alpha_1 &= -\frac{E^2}{2\sqrt{1-E^2\cos^2 u_l}} + \frac{E^4\cos^2 u_l}{4\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^3}} - \frac{3E^6\cos^4 u_l}{16\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^5}} \\ \alpha_2 &= -\frac{E^4}{8\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^3}} + \frac{3E^6\cos^2 u_l}{16\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^5}} \\ \alpha_3 &= -\frac{E^6}{16\sqrt{(1-E^2\cos^2 u_l)^5}} \end{aligned}$$

При этом заметим, что для районов низких и высоких широт коэффициенты выражения (12) существенно упрощаются:

– для района высоких широт – $u_0 = \frac{\pi}{2}$ (при выборе точки линеаризации в начале интервала, т.е. при $u_l = u_0$):

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{E^2}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{E^4}{8}, \quad \alpha_3 = -\frac{E^6}{16}$$

– для района низких широт – $u_0 = 0$ (также при $u_l = u_0$):

$$\alpha_0 = \sqrt{1-E^2} + \frac{E^2}{2\sqrt{1-E^2}} - \frac{E^4}{8\sqrt{(1-E^2)^3}} + \frac{E^6}{16\sqrt{(1-E^2)^5}} - \frac{5E^8}{128\sqrt{(1-E^2)^7}}$$

$$\alpha_1 = -\frac{E^2}{2\sqrt{1-E^2}} + \frac{E^4}{4\sqrt{(1-E^2)^3}} - \frac{3E^6}{16\sqrt{(1-E^2)^5}} + \frac{5E^8}{32\sqrt{(1-E^2)^7}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{E^4}{8\sqrt{(1-E^2)^3}} + \frac{3E^6}{16\sqrt{(1-E^2)^5}} - \frac{15E^8}{64\sqrt{(1-E^2)^7}}$$

$$\alpha_3 = -\frac{E^6}{16\sqrt{(1-E^2)^5}} + \frac{5E^8}{32\sqrt{(1-E^2)^7}}$$

Тогда уравнение (11) приобретает вид:

$$\int_{u_0}^u \frac{\sum_{i=0}^3 \alpha_i \cos^{2i+1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du = \frac{S}{a}$$

Первый из интегралов в левой части уравнения при замене переменных является табличным:

$$\int_{u_0}^u \frac{\alpha_0 \cos u}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du = \alpha_0 \int_{u_0}^u \frac{d(\sin u)}{\sqrt{1 - \Phi^2 - \sin^2 u}} = \alpha_0 \left(\arcsin \frac{\sin u}{\sqrt{1 - \Phi^2}} - \arcsin \frac{\sin u_0}{\sqrt{1 - \Phi^2}} \right) =$$

$$= \alpha_0 (\arcsin(k \sin u) - \arcsin(k \sin u_0)), \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 - \Phi^2}}$$

Остальные интегралы

$$\alpha_i \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2i+1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du = \alpha_i k \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2i+1} u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du, \quad i = 1, 2, 3$$

могут быть определены из [3]:

$$k\alpha_1 \int_{u_0}^u \frac{\cos^3 u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du = k\alpha_1 \left\{ \frac{\sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}{2k^2} + \frac{2k^2 - 1}{2k^3} \arcsin(k \sin u) \right\} \Big|_{u_0}^u$$

$$k\alpha_2 \int_{u_0}^u \frac{\cos^5 u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du = k\alpha_2 \left\{ \frac{2k^2 \cos^2 u + 6k^2 - 3}{8k^4} \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \right.$$

$$\left. + \frac{8k^4 - 8k^2 + 3}{8k^5} \arcsin(k \sin u) \right\} \Big|_{u_0}^u$$

$$k\alpha_3 \int_{u_0}^u \frac{\cos^7 u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du =$$

$$= k\alpha_3 \left\{ \frac{8k^4 \sin^4 u - 2k^2(18k^2 - 5)\sin^2 u + 72k^4 - 54k^2 + 15}{48k^6} \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \right.$$

$$\left. + \frac{16k^6 - 24k^4 + 18k^2 - 5}{16k^7} \arcsin(k \sin u) \right\} \Big|_{u_0}^u$$

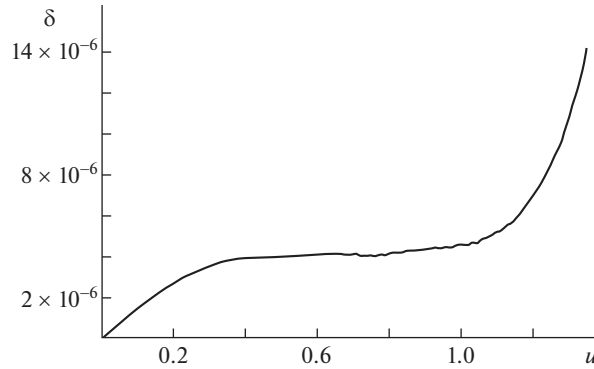


Рис. 1. Зависимость ошибки аппроксимации δ функции $S = f(u)$ при $u_0 = 0$ рад, $A_0 = 0.2$ рад, $u_l = 0.7$ рад

С учетом возможности представления в компактном виде суммы интегралов:

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2i+1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du =$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \beta_3 \arcsin(k \sin u) + \beta_4$$

где коэффициенты $\beta_i, i = 0, \dots, 4$ вычисляются по следующим формулам:

$$\beta_0 = \frac{24\alpha_1 k^4 + 6\alpha_2(8k^2 - 3)k^2 + \alpha_3(72k^4 - 54k^2 + 15)}{48k^5}$$

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_3(18k^2 - 5) + 6k^2\alpha_2}{24k^3}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_3}{6k}$$

$$\beta_3 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1(2k^2 - 1)8k^4 + \alpha_2(8k^4 - 8k^2 + 3)2k^2 + \alpha_3(16k^6 - 24k^4 + 18k^2 - 5)}{16k^6}$$

$$\beta_4 = -(\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u_0 + \beta_2 \sin^4 u_0) \sin u_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0} - \beta_3 \arcsin(k \sin u_0)$$

Окончательно аппроксимация функциональной зависимости длины геодезической линии S от приведенной широты u имеет вид:

$$S = a \cdot ((\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \beta_3 \arcsin(k \sin u) + \beta_4) \quad (13)$$

Для оценки точности найденной аппроксимации (13) был проведен численный сравнительный анализ интеграла (11) с зависимостью (13).

На рис. 1 представлена зависимость ошибки аппроксимации δ (в метрах) функции $S = f(u)$, полученная путем сравнения значений аппроксимирующего выражения (13) и значений высокоточного численного решения уравнения (11), для параметров $u_0 = 0$ рад, $A_0 = 0.2$ рад при выборе точки линеаризации $u_l = 0.7$ рад.

Как показали результаты моделирования, вид представленной на рис. 1 зависимости является характерным для различных начальных значений A_0, u_0 и точки линеаризации u_l и подтверждает высокую точность полученной аналитической аппроксимации функции длины геодезической линии для земного эллипсоида.

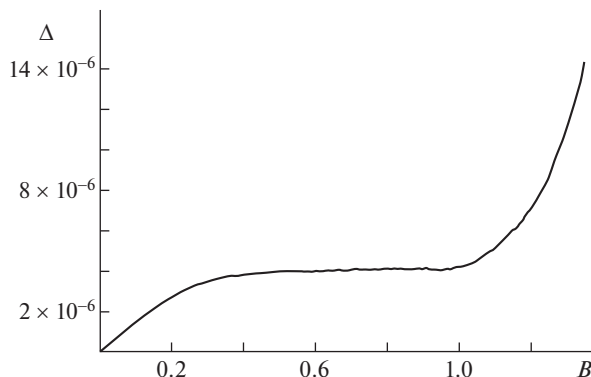


Рис. 2. Зависимость ошибки аппроксимации Δ функции $S = f(B)$ при $B_0 = 0$ рад, $A_0 = 0.2$ рад, $B_l = 0.7$ рад

Соответственно, для геодезической широты с учетом соотношения (7) искомая зависимость приобретает вид:

$$S = a \cdot \left(\left(\beta_0 + \beta_1 \frac{\sin^2 B}{1 + e^2 \cos^2 B} + \beta_2 \frac{\sin^4 B}{(1 + e^2 \cos^2 B)^2} \right) \times \frac{\sin B \sqrt{1 + e^2 - (k^2 + e^2) \sin^2 B}}{1 + e^2 \cos^2 B} + \beta_3 \arcsin \left(k \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}} \right) + \beta_4 \right) \quad (14)$$

где коэффициенты $\alpha_i, i = 0, \dots, 3$, $\beta_i, i = 0, \dots, 4$ пересчитываются также с учетом соотношения (7) и выбранной точки линеаризации для геодезической широты B_l .

Для оценки точности данной аппроксимации геодезической широты был проведен ее сравнительный численный анализ с интегралом (6) для различных начальных значений A_0, B_0 и точек линеаризации B_l , который также показал высокую точность данной аппроксимации. В качестве иллюстрирующего это примера на рис. 2 представлена зависимость ошибки аппроксимации Δ (в метрах) функции $S = f(B)$, полученная путем сравнения значений аппроксимирующего выражения (14) и значений высокоточного численного решения уравнения (6), для аналогичных параметров $B_0 = 0$ рад, $A_0 = 0.2$ рад при выборе точки линеаризации $B_l = 0.7$ рад.

Полученные выше результаты интересно далее интерпретировать для сферы и сравнить их с уже известными [1, 2].

Рассмотрим сначала выражение текущего азимута геодезической линии (ортодромии) на сфере, вытекающее из (5) при $e = 0$ (в данном случае в качестве переменной B выступает уже географическая широта φ):

$$A = \arcsin \left(\sqrt{e^2 + [\cos \varphi]^{-2}} \frac{\sin A_0}{\sqrt{e^2 + [\cos \varphi_0]^{-2}}} \right) = \arcsin \left(\frac{\cos \varphi_0 \sin A_0}{\cos \varphi} \right) \quad (15)$$

или в виде интересного соотношения:

$$\frac{\sin A}{\sin A_0} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

Из выражения (15) легко определяется выражение для азимута конечной точки ортодромии:

$$A_1 = \arcsin \left(\frac{\cos \varphi_0 \sin A_0}{\cos \varphi_1} \right)$$

которое может быть также получено из уравнения Клеро на сфере [1] и принципиально отличается от традиционного выражения азимута конечной точки, зависящего от значений долготы и широты как начальной, так и конечной точек (здесь требуется знание только начальных значений широты φ_0 и азимута A_0).

Аналогично, полагая $e = 0$, из уравнения (11) находим интегральную связь длины ортодромии S с параметрами ее начальной и конечной точек (в данном случае $u = \varphi$, $a = R$, R – радиус Земли):

$$\int_0^S ds = R \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \varphi^2}} d\varphi$$

откуда с учетом ранее проделанных вычислений имеем:

$$S = R(\arcsin(k \sin \varphi) - \arcsin(k \sin \varphi_0)) \quad (16)$$

Как и ранее с выражением для азимута, полученное из дифференциальных уравнений геодезической линии соотношение (16) не совпадает с традиционным выражением зависимости длины ортодромии S от широты φ , выведенной с использованием формул сферической тригонометрии [2]:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos S + \cos \varphi_0 \sin S \cos A_0$$

то есть

$$S = R \left(\arcsin \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi_0 + (\cos \varphi_0 \cos A_0)^2}} - \arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\cos A_0} \right) \quad (17)$$

Т.к. получить аналитический вывод выражения (16) из (17) (и наоборот) представляется весьма затруднительным, то для проверки их совпадения было выполнено численное моделирование выражений (16) и (17) для целого ряда значений параметров начальной точки. Результаты численного эксперимента показали *полное* совпадение зависимостей (16) и (17).

Таким образом, полученные выше выражения представляют собой аналитическое решение поставленной задачи и могут быть эффективно использованы в практических расчетах с минимальными вычислительными затратами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979. 296 с.
2. Серапинас Б.Б. Геодезические основы карт. М.: Изд-во МГУ, 2001. 132 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.