

УДК 531.31, 629.78

**РАСЧЕТ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ЗОНТИЧНОЙ АНТЕННЫ
ПРИ СИЛЬНОМ ИЗГИБЕ РАДИАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ,
СВЯЗАННЫХ ПО ПАРАЛЛЕЛЯМ РАСТЯЖИМЫМИ ТРОСАМИ**

© 2021 г. С. В. Русских^{a,b,*}, Ф. Н. Шклярчук^{b,a,**}

^a *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия*

^b *Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия*

*e-mail: sergey.russkih@rambler.ru

**e-mail: shklyarchuk@list.ru

Поступила в редакцию 20.06.2020 г.

После доработки 28.07.2020 г.

Принята к публикации 31.08.2020 г.

Рассматривается циклически симметричная зонтичная антенна, каркас которой состоит из гибких нерастяжимых радиальных стержней, связанных в узлах по параллелям растяжимыми тросами. В начальном транспортировочном положении многозвенные стержни уложены в упаковки, ориентированные в направлении оси системы. После устранения связей упаковок стержни разворачиваются в радиальных плоскостях под действием упругих пружин, соединяющих звенья, и фиксируются в прямолинейных положениях под заданным углом по отношению к оси, при котором все тросы, связывающие однотипные узлы стержней, принимают форму правильных многоугольников, оставаясь при этом ненапрянутыми. Далее под действием силы демпфирующего гидроцилиндра с предварительно сжатыми пружинами корневые части всех стержней медленно поворачиваются до упоров. В конечном положении радиальные стержни, соединенные в узлах натянутыми тросами, принимают изогнутую форму. Жесткости тросов на растяжение определяются так, чтобы радиальные и осевые координаты узлов изогнутых стержней совпадали с координатами точек заданной поверхности вращения.

Построена модель сильного изгиба гибкого нерастяжимого стержня с учетом действующих на него в узлах неизвестных радиальных реакций натянутых тросов. Звенья стержня рассматриваются как последовательно соединенные между собой в узлах “консольные” элементы в местных системах координат, которые могут совершать большие перемещения и повороты. Изгиб каждого элемента описывается двумя заданными функциями, усадка элемента за счет изгиба учитывается в квадратичном приближении. Полученные нелинейные уравнения деформирования системы с учетом геометрических связей в узлах решаются по методу последовательных приближений относительно неизвестных реакций тросов. По полученным значениям реакций затем при заданных координатах узлов определяются требуемые жесткости тросов на растяжение.

В качестве примера расчета рассмотрена параболическая антенна при различных числах радиальных стержней и составляющих из звеньев. Выполнены оценки точности предложенной расчетной модели формообразования антенны.

Ключевые слова: космические зонтичные антенны, упругие стержни, растяжимые тросы, формообразование, сильный изгиб, нелинейные задачи, метод конечных элементов

DOI: 10.31857/S0572329921050093

1. Введение. Составные космические антенны больших размеров выводятся в космос в сложенном состоянии и развертываются в условиях вакуума и невесомости.

Вопросы проектирования и расчета складных антенн зонтичного типа рассмотрены в книге [1]. Обзор современных трансформируемых конструкций антенн представлен в [2, 3]. Применение метода конечных элементов и коммерческих программных комплексов для численного моделирования статики и динамики крупногабаритных космических антенн рассмотрено в [4–8]. Нелинейные уравнения динамики развертывания плоской системы последовательно соединенных упругими шарнирами с упорами гибких нерастяжимых стержней, сложенных в начальном состоянии в упаковку, получены в [9, 10], где приведены аналитические выражения в виде формул для всех коэффициентов уравнений в обобщенных координатах.

Заданная деформированная форма антенны после развертывания и успокоения колебаний получается при проектировании конструкции как статически неопределимой системы путем определения требуемых для устойчивого равновесия этой формы внутренних усилий силовых элементов. Для этого требуется решить обратную геометрически нелинейную задачу деформирования системы с ограничениями и определить необходимые геометрические и жесткостные параметры ее некоторых регулируемых элементов. В [11] разработан алгоритм численного решения геометрически нелинейной задачи формообразования космической зонтичной антенны в виде пологой параболической поверхности вращения с циклически симметрично расположенными гибкими радиальными стержнями, соединенными по параллелям растяжимыми тросовыми элементами. В настоящей работе этот подход обобщается для антенны с неполойгой поверхностью вращения. В этом случае при решении задачи формообразования за счет деформирования гибких радиальных стержней рассматривается их сильный изгиб с большими перемещениями и углами поворота элементов.

2. Постановка задачи. Схема предлагаемой циклически симметричной космической антенны зонтичного типа с n радиальными стержнями 1, каждый из которых состоит из m звеньев, показана на рис. 1 в сложенном состоянии (а) и в конечном деформированном состоянии (б). Раскрытие и формообразование антенны происходит следующим образом. По сигналу устраняется удерживающая связь между корпусом демпфирующего гидроцилиндра 2 и штоком 3 и начинается медленное движение штока под действием предварительно сжатых пружин 4, за счет чего с помощью тросов 5 и рычагов 6 упаковки стержней 1 поворачиваются в радиальных плоскостях. При некотором отклонении упаковок разрываются связи 7 и многозвенные стержни с упругими шарнирными соединениями развертываются с фиксацией на упорах в прямолинейном положении. Считается, что в некотором заданном отклоненном положении (1', рис. 1, б) выпрямившихся стержней (при угле β_0 между осью X и осью стержня) в силу выбора начальных длин участков тросов 8, соединяющих в плоскостях параллелей соответствующие узлы $k = 1, 2, \dots, m$ стержней, эти участки становятся прямолинейными (без провисаний), но еще ненатянутыми. При этом все тросы $k = 1, 2, \dots, m$ будут иметь форму правильных n -угольников. Следует заметить, что после быстрого (динамического) раскрытия упаковок упруго соединенных звеньев, каждый из n стержней станет прямолинейным в отклоненном на угол $\tilde{\beta}_n > \beta_0$ положении с некоторым разбросом по времени и по углам $\tilde{\beta}_n$. Отклонения стержней при медленном (квазистатическом) ходе штока 3 демпфирующего гидроцилиндра будут выравниваться под действием соединяющих их тросов $k = 1, 2, \dots, m$ поскольку во всех n элементах каждого из этих тросов усилия при циклической симметрии системы должны быть одинаковы.

При повороте рычагов 6 до упора тросы будут растягиваться, а стержни изгибаться в радиальных плоскостях под действием реакций тросов в узлах $k = 1, 2, \dots, m$. Конечная изогнутая форма 1 стержня с растянутыми тросами 8 показана на рис. 1, б. Полотно

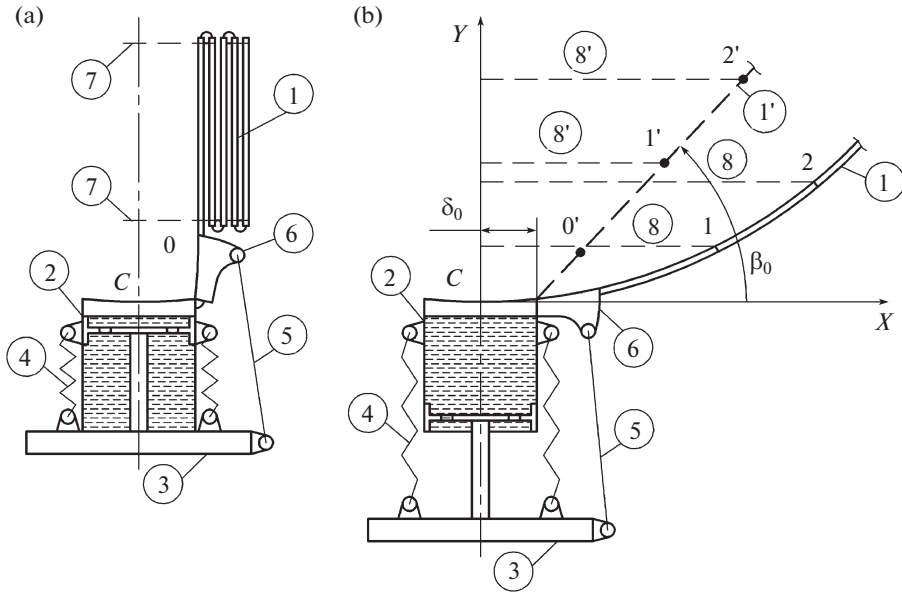


Рис. 1. Схема антенны в сложенном состоянии (а) и в конечном состоянии (б)

антенны соединяется со стержнями в отдельных точках, включая узлы; в сложенном состоянии оно находится в пространстве между упаковками стержней. При раскрытии и формообразовании составной конструкции антенны реакции полотна не учитываются.

Осесимметричная поверхность антенны имеет заданную форму $Y = F(X)$, рис. 1, б. При проектировании и расчете составной циклической симметричной конструкции антенны требуется, чтобы координаты узловых точек $k = 1, 2, \dots, m$ изогнутых радиальных стержней совпадали с соответствующими координатами поверхности антенны $X_k, Y_k = F(X_k), k = 0, 1, \dots, m$. Центральный участок С–0 после поворота рычага б до упора считается абсолютно жестким и профилированным по форме $Y = F(X); X = Y = 0$ в точке С и $X_0 = a_0, Y_0 = F(a_0), \theta_0 = \text{arctg}(F'(a_0))$ в точке 0. Упругая часть стержня состоит из m звеньев примерно одинаковой длины $a_k, k = 1, 2, \dots, m$ (для удобства складывания их в упаковки). При заданных значениях a_k координаты узлов изогнутого нерастяжимого стержня $X_k, k = 1, 2, \dots, m$ вычисляются последовательно из соотношений

$$a_k = \int_{X_{k-1}}^{X_k} \sqrt{1 + F'^2} dX, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

с использованием метода итераций. Изгибная жесткость каждого звена EI_k в пределах его длины a_k считается постоянной.

Для описания сильного изгиба стержня каждое его звено $k = 1, 2, \dots, m$ будем рассматривать как конечный элемент (КЭ) в местной системе координат xu , который в узле $k - 1$ жестко связан с $(k - 1)$ -м КЭ, рис. 2. Координаты и угол наклона оси стерж-

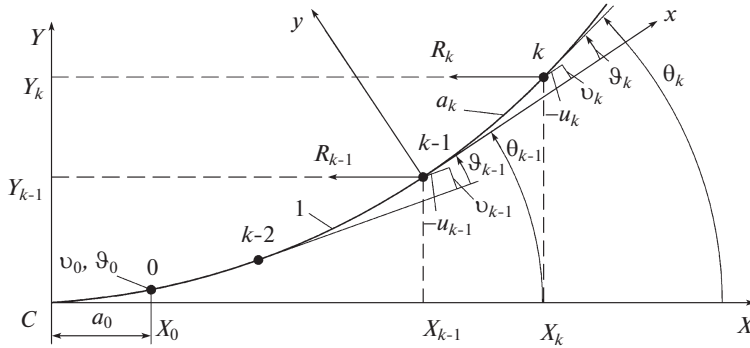


Рис. 2. Конечно-элементная модель сильного изгиба радиального стержня

ня в узле $k-1$ равны X_{k-1} , Y_{k-1} , θ_{k-1} . Относительное поперечное перемещение $v(x)$ и угол поворота $\vartheta(x)$ k -го КЭ как консольного стержня длины a_k записываются в виде [11]

$$\begin{aligned} v(x) &= v_k \varphi_k(x) + \vartheta_k \psi_k(x), & \vartheta(x) &= v'(x) \\ \varphi_k(x) &= 3 \frac{x^2}{a_k^2} - 2 \frac{x^3}{a_k^3}, & \psi_k(x) &= \frac{x^3}{a_k^2} - \frac{x^2}{a_k} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где штрихом обозначена производная по координате x . Продольное перемещение u_k конца КЭ за счет сильного изгиба при условии, что стержень является нерастяжимым ($\varepsilon = u' + 0.5v'^2 = 0$), с учетом (2.1) записывается в виде

$$u_k = -\frac{1}{2} \int_0^{a_k} (v')^2 dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{6}{5a_k} v_k^2 - \frac{1}{10} v_k \vartheta_k + \frac{a_k}{15} \vartheta_k^2 \right) \quad (2.2)$$

Потенциальная энергия изгиба стержня

$$\Pi = \sum_{k=1}^m \Pi_k, \quad \Pi_k = \frac{1}{2} \frac{112EI_k}{a_k^3} \left(v_k^2 - a_k v_k \vartheta_k + \frac{a_k^2}{3} \vartheta_k^2 \right) \quad (2.3)$$

Перемещения и углы поворота в узлах стержня $k = 1, 2, \dots, m$ определяются следующим образом

$$\begin{aligned} X_k &= a_0 + \sum_{i=1}^k [(a_i + u_i) \cos \theta_{i-1} - v_i \sin \theta_{i-1}] \\ Y_k &= v_0 + \sum_{i=1}^k [(a_i + u_i) \sin \theta_{i-1} + v_i \cos \theta_{i-1}] \\ \theta_k &= \vartheta_0 + \sum_{i=1}^k \vartheta_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вариация работы сил R_k на перемещениях δX_k (рис. 2) записывается в виде

$$-\delta A = \sum_{k=1}^m R_k \delta X_k = \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k \left(\xi_i + y_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta \vartheta_j \right) \quad (2.5)$$

где с учетом (2.2) и (2.4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_i &= (p_i c_{i-1} - q_i) \delta v_i + q_i c_{i-1} \delta \vartheta_i, \quad y_i = -(a_i + u_i) s_{i-1} + v_i c_{i-1}] \\ p_i &= -\frac{1}{5} \left(\frac{6}{a_i} v_i - \frac{1}{4} \vartheta_i \right), \quad q_i = -\frac{1}{5} \left(\frac{a_i}{3} \vartheta_i - \frac{1}{4} v_i \right), \quad u_i = \frac{1}{2} (p_i v_i + q_i \vartheta_i) \\ c_i &= \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i \end{aligned}$$

Двойная и тройная суммы в (2.5) преобразуются как

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k \xi_i &= \sum_{k=1}^m \xi_k \sum_{i=k}^m R_i \\ \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k y_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta \vartheta_j &= \sum_{k=1}^{m-1} \delta \vartheta_k \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=1}^m R_j \end{aligned}$$

Тогда получим

$$-\delta A = \sum_{k=1}^m \left[\delta v_k (c_{k-1} p_k - s_{k-1}) \sum_{i=k}^m R_i + \delta \vartheta_k \left(q_k c_{k-1} \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=i}^m R_j \right) \right] \quad (2.6)$$

где δ_{km} – символ Кронекера ($\delta_{km} = 0$ при $k \neq m$, $\delta_{km} = 1$ при $k = m$)

Уравнения равновесия изогнутого стержня в обобщенных координатах v_k и ϑ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, получаются на основании принципа возможных перемещений $\delta \Pi - \delta A = 0$ и с учетом (2.3), (2.6) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{12EI_k}{a_k^3} \left(v_k - \frac{a_k}{2} \vartheta_k \right) + (c_{k-1} p_k - s_{k-1}) \sum_{i=k}^m R_i &= 0 \\ \frac{12EI_k}{a_k^3} \left(-\frac{a_k}{2} v_k + \frac{a_k^2}{3} \vartheta_k \right) + q_k c_{k-1} \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=i}^m R_j &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$k = 1, 2, \dots, m$

Приведем уравнения (2.7) к безразмерному виду. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= \frac{v_k}{a_k}, \quad \bar{u}_k = \frac{u_k}{a_k} = \frac{1}{2} (p_k \bar{v}_k + \bar{q}_k \vartheta_k) \\ p_k &= -\frac{1}{5} \left(6\bar{v}_k - \frac{1}{4} \vartheta_k \right), \quad \bar{q}_k = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \vartheta_k - \frac{1}{4} \bar{v}_k \right) \\ \xi_k^v &= c_{k-1} p_k - s_{k-1}, \quad \xi_k^\vartheta = c_{k-1} \bar{q}_k, \quad \eta_i = \frac{y_i}{a_i} = -(1 + \bar{u}_i) s_{i-1} + \bar{v}_i c_{i-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учетом (2.8) уравнения (2.7) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{12EI_k}{a_k^2} \left(\bar{v}_k - \frac{1}{2} \vartheta_k \right) + \xi_k^v \sum_{i=k}^m R_i &= 0 \\ \frac{12EI_k}{a_k^2} \left(-\frac{1}{2} \bar{v}_k + \frac{1}{3} \vartheta_k \right) + \xi_k^\vartheta \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m \eta_i \sum_{j=i}^m R_j &= 0 \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, m$

Преобразуем двойную сумму во втором уравнении:

$$\sum_{i=k+1}^m \eta_i \sum_{j=i}^m R_j = \sum_{i=k+1}^m R_i \sum_{j=k+1}^i \eta_j = \sum_{i=k+1}^m R_i \zeta_{ki},$$

$$\zeta_{ki} = \sum_{j=k+1}^i \eta_j = \begin{cases} 0, & i < k+1 \\ \eta_{k+1} + \eta_{k+2} + \dots + \eta_i, & i \geq k+1 \end{cases}$$

В результате уравнения (2.7) для обобщенных координат \bar{v}_k и ϑ_k , $k = 1, 2, \dots, m$ будут иметь вид

$$\frac{12EI_k}{a_k^2} \left(\bar{v}_k - \frac{1}{2} \vartheta_k \right) + \xi_k^v \sum_{i=k}^m R_i = 0$$

$$\frac{12EI_k}{a_k^2} \left(-\frac{1}{2} \bar{v}_k + \frac{1}{3} \vartheta_k \right) + \xi_k^\vartheta \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m R_i \zeta_{ki} = 0 \quad (2.9)$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

Уравнения (2.9) для их численного решения запишем в матричном виде в зависимости от векторов перемещений $\mathbf{V} = \{\bar{v}_k\}$, углов поворота $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$ и реакций тросов $\mathbf{R} = \{R_k\}$:

$$12\mathbf{G} \left(\mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \right) + \mathbf{A} \mathbf{R} = 0$$

$$12\mathbf{G} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{V} + \frac{1}{3} \mathbf{\Omega} \right) + \mathbf{B} \mathbf{R} = 0 \quad (2.10)$$

где матрица жесткости \mathbf{G} и нелинейные матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} порядка m имеют вид:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{EI_k}{a_k^2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \xi_1^v & \xi_1^v & \dots & \xi_1^v & \xi_1^v \\ 0 & \xi_2^v & \dots & \xi_2^v & \xi_2^v \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{m-1}^v & \xi_{m-1}^v \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_m^v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi_1^\vartheta & \xi_1^\vartheta & \dots & \xi_1^\vartheta & \xi_1^\vartheta \\ 0 & \xi_2^\vartheta & \dots & \xi_2^\vartheta & \xi_2^\vartheta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{m-1}^\vartheta & \xi_{m-1}^\vartheta \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_m^\vartheta \end{bmatrix} + \quad (2.11)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1,m-1} & \zeta_{1,m} \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_{2,m-1} & \zeta_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \zeta_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Алгоритм решения задачи. Формообразование поверхности вращения (или в данном случае – изогнутого радиального стержня каркаса, на который накладывается с некоторым натяжением мягкая оболочка) согласно уравнению $Y = F(X)$ может осуществляться в пределах рассматриваемых элементов за счет выбора реакций R_k натяну-

тых тросов, расположенных в плоскостях параллелей, или за счет изгибных жесткостей EI_k элементов радиальных стержней, или за счет изменения тех и других одновременно. Решение такой нелинейной задачи является неединственным и в некоторых областях изменения указанных параметров оно может не существовать.

Здесь рассматривается случай, когда уравнение заданной формы $Y = F(X)$ удовлетворяется в точках $k = 1, 2, \dots, m$ за счет регулируемых реакций тросов R_k только по координатам X_k и $Y_k = F(X_k)$, а углы наклона θ_k в этих точках остаются свободными, т.е. не требуется выполнение условия $\theta_k = \arctg(F'(X_k))$. Жесткости EI_k элементов изгибаемого стержня считаются заданными.

Эквивалентное перемещение v_k изогнутого стержня, точно соответствующее заданной форме по координатам $X_k, Y_k = F(X_k)$ определяется из кинематических соотношений:

$$v_k = -(X_k - X_{k-1}) \cos \theta_{k-1} + (Y_k - Y_{k-1}) \sin \theta_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

где $\theta_k = \vartheta_0 + \sum_{i=1}^k \vartheta_i$, $\vartheta_0 = \arctg(F'(X_0))$; углы ϑ_i при $i = 1, 2, \dots, m$ считаются неизвестными наряду с реакциями R_k при $k = 1, 2, \dots, m$.

В результате безразмерные перемещения \bar{u}_k, \bar{v}_k и параметры (2.8), входящие в уравнения (2.9) и, соответственно, в нелинейные матрицы \mathbf{A}, \mathbf{B} (2.11), зависят от неизвестных углов $\vartheta_i, i = 1, 2, \dots, m$. Таким образом, при выполнении кинематических соотношений (3.1) основными неизвестными будут ϑ_k и $R_k, k = 1, 2, \dots, m$, т.е. – векторы $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$ и $\mathbf{R} = \{R_k\}$, для определения которых имеем уравнения (2.10). Для удобства решения систему двух матричных уравнений (2.10) путем исключения вектора \mathbf{R} приведем к одному уравнению, содержащему только неизвестные параметры $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$:

$$\mathbf{G}\mathbf{\Omega} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{B}\right) \left(\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1} \mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{P} \quad (3.2)$$

Это уравнение с учетом системы соотношений (3.1) решается методом последовательных приближений по схеме $\mathbf{G}\mathbf{\Omega}^{(r+1)} = \mathbf{P}^{(r)}$, где $r = 0, 1, \dots$ – номер приближения по набору неизвестных параметров $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$; $\mathbf{P}^{(r)}$ – вектор (правая часть уравнения (3.2)), зависящий от $\vartheta_1^{(r)}, \vartheta_2^{(r)}, \dots, \vartheta_m^{(r)}$. В начальном (нулевом) приближении при $r = 0$ для углов ϑ_k будем использовать точные значения $\vartheta_k^{(0)} = \vartheta_k^0$, соответствующие заданной форме изогнутого стержня $Y = F(X)$ в точках k , которые определяются как $\vartheta_k^0 = \theta_k^0 - \vartheta_0 - \sum_{i=1}^{k-1} \vartheta_i^0$ при $\theta_k^0 = \arctg(F'(X_k)), k = 1, 2, \dots, m$.

После получения сходящегося с заданной точностью решения для вектора $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$ вычисляется вектор реакций тросов \mathbf{R} из уравнения, которое получается из системы (2.10) путем исключения вектора $\mathbf{G}\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{R} = -\left(\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1} \mathbf{G}\mathbf{V} \quad (3.3)$$

В исходном состоянии после раскрытия системы радиальный стержень 1' является прямолинейным и отклоненным по отношению к оси X на некоторый угол β_0 , рис. 1, б. Координаты точки $k' = 1', 2', \dots, m'$ стержня в исходном состоянии равны $X_{k'} = L_k \cdot \cos \beta_0$,

где $L_{k'} = (a_0 - \delta_0) + \sum_{i=1}^k a_i$ – расстояние между шарниром, соединяющим гидроцилиндр 2 с поворотным кронштейном 6 (рис. 1, а), и точкой k' . Длина k -го троса в виде правильного n -угольника, соединяющего по параллели k -е точки всех n радиальных стержней, выбирается так, что в исходном состоянии он является нерастянутым и не имеет провисаний. После поворота кронштейна 6 до упора (угол наклона стержня в корневой точке 0 станет равным ϑ_0) k -й трос натянется с усилием $T_k = F_k \sigma(\epsilon_k)$, где F_k – площадь поперечного сечения, $\sigma(\epsilon_k)$ – растягивающее напряжение в k -м тросе. Относительное удлинение k -го троса в конечном натянутом состоянии будет

$$\epsilon_k = \frac{X_k}{X_{k'}} - 1 \quad (3.4)$$

где X_k – известная координата узла k в конечном деформированном состоянии (т.е. координата заданной формы), а $X_{k'} = L_{k'} \cos \beta_0$ – координата узла k' в исходном недеформированном положении стержня.

Реакция k -го троса в k -м узле стержня определяется из уравнения равновесия узла

$$R_k = 2T_k \sin \frac{\pi}{n} = 2F_k \sigma(\epsilon_k) \sin \frac{\pi}{n} \quad (3.5)$$

При линейно-упругом деформировании тросов $\sigma(\epsilon_k) = E_T \epsilon_k$ при $\epsilon_k > 0$ и $\sigma(\epsilon_k) = 0$ при $\epsilon_k \leq 0$, где E_T – модуль упругости материала троса. По найденным значениям R_k можно определить необходимые площади F_k или жесткости на растяжение $E_T F_k$ тросов для получения формы $Y_k = F(X_k)$ изогнутых радиальных стержней.

4. Сильный изгиб консольного стержня. Для верификации разработанной КЭ-модели сильного изгиба стержня, описываемой уравнениями (2.9), рассмотрим стержень длиной l с постоянной изгибной жесткостью EI , который неподвижно закреплен на конце $s = 0$ и нагружен на конце $s = l$ продольной сжимающей силой R_l , превышающей критическую силу потери устойчивости (эластика Эйлера). Дифференциальные уравнения изгиба нерастяжимого стержня (рис. 3) записываются в виде

$$\frac{dX}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dY}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{R_l}{EI} (Y_l - Y) \quad (4.1)$$

где

$$Y_l = Y(l), \quad R_l > \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

Начальные условия при $s = 0$: $X = 0$, $Y = 0$, $\theta = 0$.

Выполнены сравнения решений дифференциальных уравнений (4.1) с решениями системы алгебраических уравнений (2.9) для КЭ-модели при трех различных значениях параметра $\nu = R_l l^2 / EI$: 2.5, 3.0, 3.5. Использовались следующие значения начальных (нулевых) приближений $\bar{Y}_l = Y_l / l < 1$ для “пристрелки” при численных решениях уравнений (4.1) методом последовательных приближений в комбинации с методом Адамса: $\bar{Y}_l = 0.25$ и $\bar{Y}_l = 0.40$ при $\nu = 2.5$; $\bar{Y}_l = 0.50$ и $\bar{Y}_l = 0.75$ при $\nu = 3.0$; $\bar{Y}_l = 0.65$ и $\bar{Y}_l = 0.90$ при $\nu = 3.5$ (два начальных значения \bar{Y}_l для одного ν приводят к одному и тому же результату). Результаты сходящихся с точностью до 10^{-9} решений для углов поворота $\theta(s/l)$ в точках $s/l = 1/4, 1/2, 3/4, 1.0$ приведены в табл. 1 в строках I.

При использовании КЭ-модели стержень делился на $m = 4$ и $m = 8$ одинаковых “консольных” КЭ ($a_k = l/m$, $EI_k = EI$, $R_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots, m-1$). В качестве нуле-

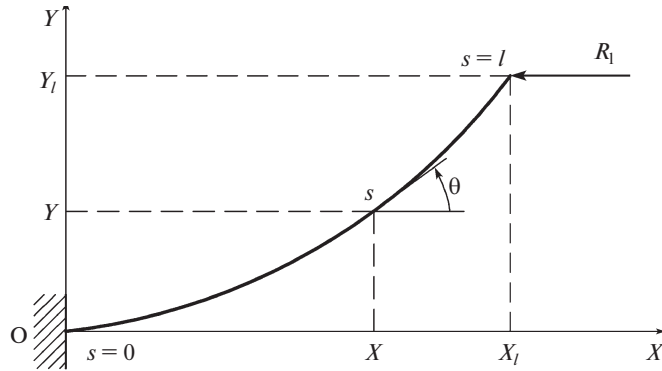


Рис. 3. Продольное сжатие нерастяжимого стержня (эластика Эйлера)

вого приближения при решении уравнений (2.9) методом последовательных приближений в этом случае использовались результаты решения уравнений (4.1) для $\theta(s/l)$. Полученные решения для рассмотренных случаев (ν, m) приведены в табл. 1 (строки II и III для $m = 4$ и $m = 8$, соответственно).

На рис. 4, а, б, с показаны формы изгиба стержня в безразмерных координатах $\bar{X} = X/l, \bar{Y} = Y/l$ для значений $\nu = R_l l^2/EI$, равных 2.5, 3.0, 3.5, соответственно.

Сравнения результатов решения уравнений (4.1) и (2.9) показывают, что КЭ-модель сильного изгиба стержня имеет достаточно высокую точность.

5. Примеры расчета. Рассмотрим параболическую антенну с формой $Y = \lambda X^2$ при трех значениях параметра λ : 1/15, 1/10, 1/5; число радиальных стержней $n = 24$. Углы наклона стержней в начальном прямолинейном положении (рис. 1, б), в котором участки тросов, соединяющих k -е узлы стержней, также являются прямолинейными и ненапрянутыми, приняты равными $\beta_0 = 60^\circ$ при $\lambda = 1/15$ и $\lambda = 1/10$, $\beta_0 = 70^\circ$ при $\lambda = 1/5$. Длина центрального недеформируемого участка равна $a_0 = 0.25$ м ($\delta_0 = 0$). Максимальный диаметр антенны составляет около 20 м.

Выполнены расчеты сильного изгиба радиальных стержней антенны под действием реакций растянутых тросов в конечном деформированном состоянии циклически симметричной системы. Результаты получены путем решения нелинейных алгебраи-

Таблица 1. Верификация полученной КЭ-модели сильного изгиба стержня

ν	Вар.	\bar{Y}_l	$\theta(1/4)$	$\theta(1/2)$	$\theta(3/4)$	$\theta(1)$
2.5	I	0.2037	0.1241	0.2290	0.2990	0.3236
	II	0.1879	0.1141	0.2107	0.2752	0.2978
	III	0.1995	0.1214	0.2241	0.2926	0.3166
3.0	I	0.6636	0.4825	0.8806	1.1368	1.2245
	II	0.6678	0.4839	0.8844	1.1423	1.2304
	III	0.6640	0.4824	0.8806	1.1369	1.2246
3.5	I	0.7704	0.6503	1.1739	1.5002	1.6095
	II	0.7772	0.6532	1.1823	1.5116	1.6213
	III	0.7713	0.6506	1.1747	1.5014	1.6107

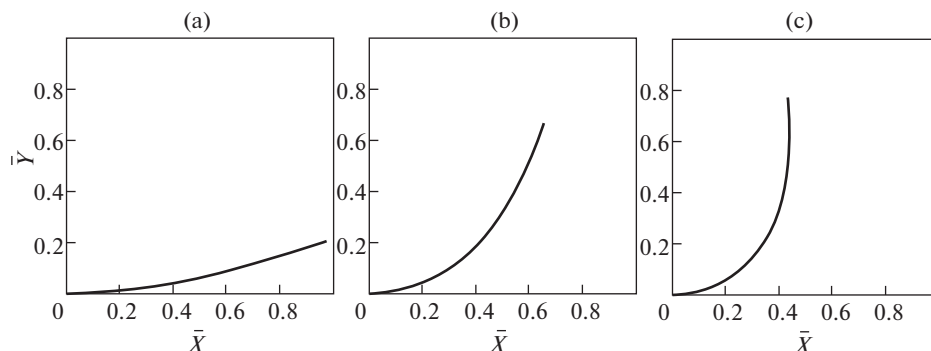


Рис. 4. Формы изгиба стержня для значений ν , равных 2.5 (a), 3.0 (b), 3.5 (c)

ческих уравнений (3.2), (3.3) по методу последовательных приближений с точностью до 10^{-9} относительно неизвестных θ_k , R_k с учетом условий связи (3.1), обеспечивающих точное выполнение заданной формы антенны в узлах по координатам X_k , Y_k , $k = 1, 2, \dots, m$. При этом в качестве начальных приближений для θ_k использовались значения θ_k^0 заданной формы, т.е. $\theta_k^{(0)} = \theta_k^0$.

Рассмотрены два расчетных случая для каждой из 3-х антенн, отличающихся значением λ :

1) Радиальный стержень антенны делится на 4 упругих звена ($m = 4$, $k = 1, 2, 3, 4$) длиной $a_k = 3$ м; заданные изгибные жесткости этих звеньев EI_k , Па \cdot м⁴ и проектные углы наклона в узлах заданной формы $\theta_k^0 = \arctg(2\lambda X_k)$ представлены в табл. 2. Формы радиального стержня в начальном недеформированном состоянии (пунктирная линия) и в требуемом конечном деформируемом состоянии (сплошная линия) для $m = 4$ при $\lambda = 1/15, 1/10, 1/5$ представлены на рис. 5, а, b, с, соответственно, в координатах X, Y , м.

Таблица 2. Исходные данные и результаты расчета параметров антенны при $m = 4$

λ	k	EI_k	θ_k^0	θ_k	R_k	ε_k	$E_T F_k$
$\frac{1}{15}$	1	1978.3237	0.3986	0.3885	47.8979	0.9467	193.8079
	2	1643.2336	0.6526	0.6483	41.6127	0.8361	190.6416
	3	1213.0318	0.8143	0.8099	6.1016	0.7195	32.4871
	4	671.2248	0.9214	0.9019	17.6858	0.6136	110.4073
$\frac{1}{10}$	1	1978.3237	0.5503	0.5342	96.4922	0.8935	413.6997
	2	1643.2336	0.8197	0.8182	54.8316	0.7167	293.0548
	3	1213.0318	0.9651	0.9608	5.4540	0.5634	37.0847
	4	671.2248	1.0545	1.0391	13.6527	0.4397	118.9434
$\frac{1}{5}$	1	1978.3237	0.8352	0.8165	217.5199	1.5098	551.8955
	2	1643.2336	1.0604	1.0634	54.1653	1.1016	188.3499
	3	1213.0318	1.1626	1.1585	1.7656	0.8357	8.0929
	4	671.2248	1.2224	1.2129	8.6875	0.6491	51.2688

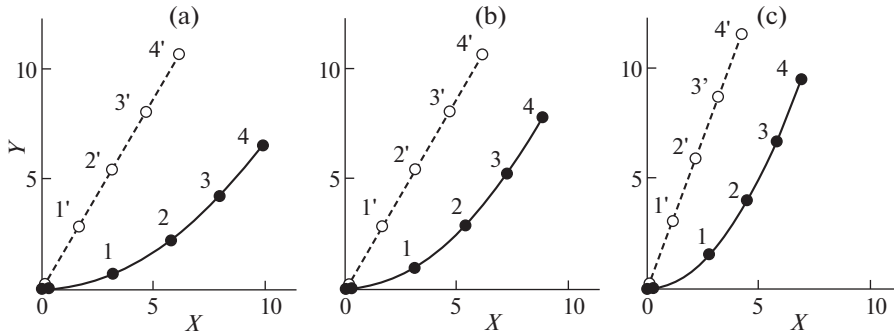


Рис. 5. Формы радиального стержня в начальном и конечном положениях для $n = 24, m = 4$ и $\lambda = 1/15$ (a), $\lambda = 1/10$ (b), $\lambda = 1/5$ (c)

2) Радиальный стержень делится на 6 упругих звеньев ($m = 6, k = 1, 2, \dots, 6$) длиной $a_k = 2$ м; для этого случая значения EI_k , Па · м⁴ и углы θ_k^0 представлены в табл. 3. Формы радиального стержня в начальном и требуемом конечном состояниях при $\lambda = 1/15, 1/10, 1/5$ представлены в координатах X, Y , м на рис. 6, a, b, c, соответственно.

Полученные значения θ_k, R_k, H , а также относительные деформации растяжения тросов ϵ_k и требуемые для получения заданной формы антенны жесткости тросов на растяжение $E_T F_k$ (Па · м²), которые определяются по формуле $R_k = 2E_T F_k \epsilon_k \sin(\pi/n)$, приведены в табл. 2 и табл. 3 соответственно для случаев $m = 4$ и $m = 6, k = 1, 2, \dots, m$.

Таблица 3. Исходные данные и результаты расчета параметров антенны при $m = 6$

λ	k	EI_k	θ_k^0	θ_k	R_k	ϵ_k	$E_T F_k$
$\frac{1}{15}$	1	7656.4383	0.2876	0.2822	260.5498	0.9728	1025.9801
	2	6684.4295	0.4961	0.4961	105.2135	0.9113	442.2760
	3	6013.2047	0.6526	0.6458	151.509	0.8352	694.9330
	4	4204.6526	0.7681	0.7717	10.4413	0.7567	52.8544
	5	4204.6526	0.8547	0.8465	5.4236	0.6820	30.4614
	6	1631.6882	0.9214	0.9109	66.9765	0.6131	418.4988
$\frac{1}{10}$	1	7656.4383	0.4116	0.3987	592.7990	0.9427	2408.7411
	2	6013.2047	0.6609	0.6611	326.3337	0.8311	1504.1060
	3	5193.4296	0.8197	0.8157	105.8771	0.7147	567.4419
	4	4204.6526	0.9250	0.9277	2.8618	0.6095	17.9877
	5	4204.6526	0.9993	0.9927	10.1289	0.5179	74.9241
	6	1631.6882	1.0545	1.0459	50.4612	0.4386	440.6749
$\frac{1}{5}$	1	7656.4383	0.6849	0.6686	1225.6470	1.6655	2819.0376
	2	6684.4295	0.9357	0.9416	428.9441	1.3402	1226.0534
	3	6684.4295	1.0604	1.0561	43.6339	1.0934	152.8741
	4	5193.4296	1.1352	1.1358	36.4977	0.9070	154.1510
	5	4204.6526	1.1856	1.1817	12.6620	0.7617	63.6785
	6	1631.6882	1.2224	1.2165	30.3713	0.6449	180.4132

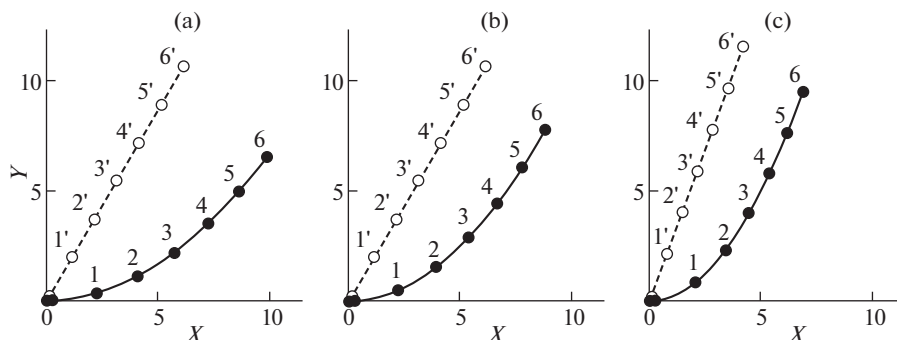


Рис. 6. Формы радиального стержня в начальном и конечном положениях для $n = 24$, $m = 6$ и $\lambda = 1/15$ (а), $\lambda = 1/10$ (б), $\lambda = 1/5$ (с)

В табл. 4 и табл. 5 для случаев $m = 4$ и $m = 6$, соответственно, приведено сравнение точности решения путем сравнения изгибающих моментов M_k , Н·м, $k = 1, 2, \dots, m - 1$, в узлах стержня в конечном деформированном состоянии: I – вычисленные из уравне-

ния равновесия отсеченной части при найденных реакциях R_k : $M_k = \sum_{i=k+1}^m R_k(Y_i - Y_k)$;

II – найденные при решении нелинейной задачи в перемещениях по методу конечных элементов средние значения в узле: $M_k = 1/2(M_k(a_k) + M_{k+1}(0))$, где $M_k(a_k) = 2EI_k/a_k(-3\bar{\nu}_k + 2\vartheta_k)$, $M_{k+1}(0) = 2EI_{k+1}/a_{k+1}(3\bar{\nu}_{k+1} - 2\vartheta_{k+1})$. Результаты сравнения показывают высокую точность, полученную при решении нелинейных алгебраических уравнений КЭ-модели методом последовательных приближений.

6. Заключение. Предложена конструктивная схема и разработана математическая модель для расчета формообразования циклически симметричной космической зонтичной антенны, образованной системой гибких многозвенных радиальных стержней, связанных по параллелям в определенных узловых точках растяжимыми тросами. Изгиб стержней в радиальной плоскости с учетом реакций тросов создается путем поворота корневых частей стержней силой медленно перемещающегося штока демфирующего гидроцилиндра под действием предварительно сжатых пружин. Модель сильного изгиба нерастяжимого стержня антенны построена с использованием “консольных” конечных элементов (звеньев), допускающих большие перемещения и повороты как твердых тел и относительные упругие перемещения с двухчленной аппроксимацией по длине элемента с учетом его усадки за счет изгиба в квадратичном

Таблица 4. Результаты расчета изгибающих моментов в узлах стержня при $m = 4$

λ	Вар.	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\frac{1}{15}$	I	188.3897	88.6112	40.5765
$\frac{1}{15}$	II	193.7100	90.1060	40.9970
$\frac{1}{10}$	I	222.0288	79.5639	34.7384
$\frac{1}{10}$	II	230.6572	80.9606	34.9822
$\frac{1}{5}$	I	211.5091	52.4085	24.2377
$\frac{1}{5}$	II	225.4776	53.1092	24.3086

Таблица 5. Результаты расчета изгибающих моментов в узлах стержня при $m = 6$

λ	Вар.	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$\frac{1}{15}$	I	835.2111	573.4939	317.5385	209.1970	104.0202
$\frac{1}{15}$	II	848.8874	579.8688	319.7085	209.9830	104.5593
$\frac{1}{10}$	I	1026.0813	512.9911	283.3631	185.9495	86.4142
$\frac{1}{10}$	II	1055.8608	520.2044	284.7586	186.4288	86.7087
$\frac{1}{5}$	I	1295.6631	485.1380	277.4441	135.6802	56.7180
$\frac{1}{5}$	II	1351.8396	490.7088	278.1707	135.9047	56.8058

приближении. Полученные нелинейные уравнения решаются методом последовательных приближений относительно неизвестных реакций тросов при заданных значениях изгибных жесткостей элементов стержня и заданных радиальных и осевых координат узлов, точно соответствующих форме моделируемой антенны. По найденным значениям реакций тросов с учетом известных их перемещений в узлах определяются необходимые для обеспечения заданной формы антенны жесткости тросов на растяжение.

Выполнена оценка точности разработанной модели путем сравнения с численным решением задачи сильного изгиба консольного стержня под действием продольной сжимающей силы, превышающей критическую силу потери устойчивости стержня.

В качестве примера выполнены расчеты для параболической антенны с $n = 24$ радиальными стержнями и с $m = 4$ и $m = 8$ составляющих их звеньями (соответственно – тросов).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН (номер госрегистрации темы АААА-А19-119012290118-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.
2. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологии имени Академика М.Ф. Решетнева. 2007. № 2. С. 51–57.
3. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор Конструкций современных трансформируемых космических антенн // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологии имени Академика М.Ф. Решетнева. 2007. № 3. С. 78–81.
4. Пономарев С.В. Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 4. С. 110–119.
5. Бельков А.В., Евдокимов А.С. и др. Компьютерное моделирование перспективных космических рефлекторов // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. 2008. № 2. С. 161–170.
6. Крылов А.В. Исследование процесса раскрытия антенного контура // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 12. С. 45–50.
7. Усюкин В.И., Архипов М.Ю. Моделирование статики и динамики крупногабаритных рефлекторов космических антенн. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 60 с.

8. Бужинский В.А., Клишев О.П., Мытарев А.И. Исследование влияния упругих колебаний крупногабаритных элементов конструкции космического аппарата на искажение геометрических характеристик рефлектора // Космонавтика и ракетостроение. 2007. № 2. С. 102–108.
9. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика плоского движения тела с системой последовательно соединенных упруговязкими шарнирами гибких нерастяжимых стержней при больших углах поворота // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 109–117.
10. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика раскрытия космической зонтичной антенны, состоящей из многозвенных гибких радиальных стержней // Космонавтика и ракетостроение. 2020. № 2. С. 86–98.
11. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Расчет формообразования космической зонтичной антенны, состоящей из гибких радиальных стержней, соединенных по параллелям растяжимыми тросовыми элементами // Космонавтика и ракетостроение. 2019. № 2. С. 95–103.