

УДК 539.3

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДЛИННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

© 2021 г. Е. М. Зверяев^{a,b,*}

^a Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

^b Московский авиационный институт, Москва, Россия

*e-mail: zveriaev@mail.ru

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.

После доработки 27.09.2020 г.

Принята к публикации 15.10.2020 г.

Описано применение итерационного метода Сен-Венана—Пикара—Банаха на примере построения решения системы дифференциальных уравнений движения теории упругости с малым параметром для длинной полосы при частотах возмущения соизмеримых с частотами поперечных колебаний балки. Система преобразуется таким образом, чтобы уравнения интегрировались последовательно и без повышения порядка. Вычисление неизвестных происходит с помощью операторов Пикара первого порядка так, что ранее вычисленные неизвестные являются входящими для следующего уравнения и т.д. Найдены интегралы всех неизвестных задачи, позволяющие выполнить все граничные условия на длинных и коротких сторонах. Сходимость решения обеспечивается с помощью малого параметра тонкостенности в соответствии с принципом сжатых отображений Банаха. Удовлетворение граничных условий на длинных краях приводит к двум уравнениям для медленно и двум сингулярным для быстро меняющихся компонент решения, зависящих только от продольной координаты. Показано, что при сведении этих уравнений к одному с потерей быстроменяющейся компоненты в одном из них, получается уравнение Тимошенко. Изложение иллюстрируется двумя примерами нагружения полосы поперечной распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой. Описана методика установления порядков величин по малому параметру относительно нагрузки.

Ключевые слова: полуобратный метод, итерации, принцип сжатых отображений, уравнение Тимошенко, напряжения в углах

DOI: 10.31857/S057232992105010X

1. Введение. Динамическая задача теории упругости для длинной упругой полосы традиционно интуитивно разделяется на две независимые задачи: задачу поперечных колебаний балки и задачу продольных колебаний стержня. При этом вторая задача может быть сформулирована как волновая. В силу этого низкочастотные (преимущественно изгибные) и высокочастотные колебания (преимущественно растяжения—сжатия) рассматриваются отдельно. Общим в этих задачах является то, что они формулируются, как это принято в сопротивлении материалов, в усилиях и моментах и описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Следствием такого подхода является невыполнение всех граничных условий соответствующей задачи теории упругости для полосы. Поэтому решения дифференциальных уравнений в усилиях и моментах обладают решениями, в которых могут наблюдаться разрывы в напряжениях, быстрые переходы, неоднородности, невыполненные граничные условия и т.п. Понижение порядка размерности дифференциальных уравнений в усилиях

и моментах в сочетании с потерей некоторых граничных условий является основной чертой таких теорий и сопровождается возникновением асимптотических явлений [1]. Цель уточненного анализа заключается в дополнительном описании асимптотики решения граничной задачи внутри переходных слоев в областях разрывов. Потребность в таких уточненных теориях связана с необходимостью более полного понимания классической теории после того, как становятся видны ее обобщения и они позволяют лучше охарактеризовать погрешность классических теорий [2]. Однако построение теорий последовательных, в смысле учёта всех малых одного порядка крайне трудно осуществить, не располагая регулярными методами [3].

С.П. Тимошенко [4, 5] вывел уравнение влияния эффектов более высокого порядка по сравнению с классической теорией балок и оно в настоящее время представляет большой интерес. Уточненные теории типа Тимошенко получили большое развитие и отражены во многих работах, например [6–14]. В этих и других работах традиционно используются уравнения в усилиях и моментах, граничные условия на длинных сторонах балки или на лицевых сторонах пластины (оболочки) не выполняются, на концах ставятся условия типа балочных. В связи с этим в настоящей работе ставится задача решения динамических уравнений теории упругой полосы в перемещениях и напряжениях для низкочастотных колебаний без каких-либо априорных гипотез с помощью регулярного метода Сен-Венана–Пикара–Банаха (SVPB) [15, 16].

Для решения трехмерной задачи кручения тонкого длинного стержня Сен-Венан предложил в исходных уравнениях задать часть неизвестных и вычислить с помощью преобразованных таким образом уравнений остальные неизвестные [2]. Продолжим этот метод так, чтобы по вычисленным остальным неизвестным можно было найти заданные величины начального приближения в первом приближении и затем остальные неизвестные, представив полуобратный метод как итерационный [15, 16]. Делается это так. В соответствии с идеей Сен-Венана задаются величины начального (нулевого) приближения. Затем по ним вычисляются остальные неизвестные. Для этого система уравнений теории упругости переписывается так, чтобы неизвестные вычислялись (в нулевом приближении) последовательно путем прямого интегрирования через уравнения первого порядка и величины начального приближения в первом. Если поправка к заданным величинам и вычисленным по ним остальным, полученная в следующем приближении, будет малой, то в силу принципа сжатых отображений Банаха полученные в итерационном процессе последовательности Коши для неизвестных будут асимптотически сходящимися. При этом выполняются все граничные условия.

Будем считать, что вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений теории упругости формулируются так же как в функциональном анализе в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений [17–21]. Отображение $y = Ay$ метрического пространства M в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\varepsilon < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \leq \varepsilon \rho(x, y)$, где ρ – метрика пространства M . Точка y называется неподвижной точкой отображения, если $y = Ay$. Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения $y = Ay$. Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения $y_{(0)} = y_0$. Если оператор A является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению y независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)} \dots$ находятся с помощью формулы $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$ [17].

Хотя полубратный метод применялся к линейным и нелинейным задачам для сред с усложненными характеристиками [22–26], его рассмотрение, как итерационного и связанного с оператором Пикара и принципом сжатых отображений Банаха, за исключением работ [15, 16, 27–30] в литературе отсутствует. Также отсутствуют работы по исследованию уточненных граничных условий в сравнении с классическими балочными.

В работе метод простых итераций, с помощью которого решен ряд задач теории упругости тонкостенных тел [15, 16, 27–30], описывается как общий метод SVPB на примере наиболее простой задачи для прямоугольника — вынужденных колебаний с частотами, соизмеримыми с частотами поперечных колебаний балки, длинной тонкой упругой полосы, уравнения которой содержат малый параметр, обеспечивающий асимптотическую сходимость разложений неизвестных в ряды по малому параметру в соответствии с принципом сжатых отображений. Колебания с высокими частотами, соизмеримыми с частотами продольных колебаний балки, в настоящей статье не рассматриваются.

Еще один важный вопрос, разрешаемый уточненной теорией, связан с тем, что в практических расчетах возникают проблемы, связанные с плохой сходимостью рядов полученных путем разложения решений о вынужденных колебаниях балки в ряды по собственным функциям. Отмечается, что выделение частного решения как статического существенно улучшает сходимость [31, 32]. Это положение подтверждается в настоящем исследовании тем, что при нахождении частного решения инерционные члены пренебрежимо малы по сравнению с главными и оно действительно может быть найдено из статических уравнений. Кроме того, инерционные члены могут быть отброшены и в уточненных граничных условиях.

2. Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса. Длинная прямоугольная полоса помещается в декартовой системе координат x^*, z^* так, что $0 \leq x^* \leq l$, $-h \leq z^* \leq h$. Уравнения движения запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} &= \rho \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}, \quad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = \rho \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \\ \sigma_x^* &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu \epsilon_z), \quad \tau^* = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma, \quad \sigma_z^* = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_z + \nu \epsilon_x) \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \end{aligned}$$

Здесь приняты традиционные обозначения величин теории упругости. Звездочкой отмечены размерные искомые величины и координаты. В уравнениях E , ν , ρ — модуль упругости, коэффициент Пуассона, удельная плотность материала, t^* — время.

Уравнения, описывающие состояние такой полосы в безразмерных координатах $x = x^*/l$, $z = z^*/h$, перемещениях $u = u^*/h$, $w = w^*/h$ вдоль осей x^*, z^* , соответственно, нормальных $\sigma_x = \sigma_x^*/E$, $\sigma_z = \sigma_z^*/E$ и касательных $\tau = \tau^*/E$ напряжениях принимают вид

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} &= \epsilon^2 a_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_l^2}, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} = \epsilon^4 a_c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_c^2} \\ \sigma_x &= \frac{1}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu \epsilon_z), \quad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma, \quad \sigma_z = \frac{1}{1-\nu^2}(\epsilon_z + \nu \epsilon_x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}$$

Введены обозначения: $\varepsilon = h/l$ — малый параметр, $\varepsilon^2 a_l^2 = \rho h^2 \omega_l^2 / E$, $\varepsilon^4 a_c^2 = \rho h^2 \omega_c^2 / E$. В качестве времени, по которому осуществляется дифференцирование в первом уравнении, выбрано безразмерное время $t_l = \omega_l t^*$ и во втором уравнении $t_c = \omega_c t^*$. Под величинами ω_l и ω_c подразумеваются первые собственные частоты продольных и поперечных колебаний полосы как стержня, соответственно. Между безразмерными временами имеют место соотношения

$$\frac{t_l}{t_c} = \varepsilon, \quad \frac{\partial^2}{\partial t_c^2} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_l^2} \quad (2.2)$$

Коэффициенты $\varepsilon^2 a_l^2$ и $\varepsilon^4 a_c^2$ выбраны так, чтобы на основании известных, записанных в безразмерных координатах, уравнений продольных и поперечных колебаний стержня

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 a_l^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t_l^2} = 0, \quad \frac{2}{3} \varepsilon^4 \frac{\partial^4 y}{\partial t_c^4} + 2\varepsilon^4 a_c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t_c^2} = 0$$

имели место оценки $a_l^2, a_c^2 \sim \varepsilon^0$. Здесь v и y продольные и поперечные перемещения точек поперечного сечения стержня соответственно.

Длинные стороны полосы $z^* = \pm h$ несут некоторую произвольную динамическую нагрузку, изменение которой по времени задается в зависимости от времени t_c , короткие стороны полосы могут быть закреплены или нагружены.

Расположим уравнения первого порядка относительно координаты z системы (2.1) в такой последовательности, чтобы неизвестные в правой части рассматриваемого уравнения вычислялись через известные величины в правой части путем интегрирования по z и умножения на малый параметр ε . Задав в соответствии с идеей полуобратного метода Сен-Венана в качестве известных величин некоторые начальные значения $w = w_0(x, z, t)$ и $\tau = \tau_0(x, z, t)$, сведем интегрирование системы уравнений к методу последовательных приближений по следующей схеме вычислений

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = -\varepsilon w'_0 + 2(1 + \nu)\tau_0, \quad \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau'_0 + \varepsilon^4 a_c^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t_c^2}$$

$$\varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u'_{(0)}, \quad \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = (1 - \nu^2) \sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)}$$

$$\frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(0)}, \quad \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial x} = \varepsilon^2 a_l^2 \frac{\partial^2 u_{(0)}}{\partial t_l^2} - \varepsilon \sigma'_{x(0)}$$

$$\frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon w'_{(1)} + 2(1 + \nu)\tau_{(1)}, \quad \frac{\partial \sigma_{z(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau'_{(1)} + \varepsilon^4 a_c^2 \frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial t_c^2} \dots$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения.

Легко видеть, что при заданных функциях $w = w_0(x, z, t)$ и $\tau = \tau_0(x, z, t)$ остальные величины вычисляются последовательно путем прямого интегрирования по z

$$u_{(0)} = -\varepsilon \int w'_0 dz + 2(1 + \nu) \int \tau_0 dz + u_0(x, t)$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon \int \tau'_0 dz + \varepsilon^4 a_c^2 \int \ddot{w}_{0,c} dz + \sigma_{z0}(x, t)$$

$$\varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u'_0, \quad \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + v \sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = (1 - v^2) \sigma_{z(0)} - v \varepsilon_{x(0)}$$

$$w_{(1)} = \int \varepsilon_{z(0)} dz + w_0(x, t), \quad \tau_{(1)} = \varepsilon^2 a_l^2 \int \ddot{u}_{(0),l} dz - \varepsilon \int \sigma'_{x(0)} dz + \tau_0$$

$$u_{(1)} = -\varepsilon \int w'_{(1)} dz + 2(1 + v) \int \tau_{(1)} dz + u_0, \quad \sigma_{z(1)} = -\varepsilon \int \tau'_{(1)} dz + a_c^4 \varepsilon^2 \int \ddot{w}_{(1),c} dz + \sigma_{z0} \dots$$

Индексом в скобках обозначен номер приближения, индексом 0 обозначены не зависящие от z произвольные интегрирования.

Будем рассматривать уравнения нулевого и первого приближений при выборе величин начального приближения $w_{(0)} = w_0(x, t)$ и $\tau_{(0)} = \tau_0(x, t)$. В силу независимости величин начального приближения от z , все интегралы вычисляются в явном виде

$$\begin{aligned} u_{(0)} &= u_0 + [2(1 + v)\tau_0 - \varepsilon w'_0]z \\ \sigma_{z(0)} &= \sigma_{z0} + [\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} - \varepsilon \tau'_0]z \\ \varepsilon_{x(0)} &= \varepsilon u'_0 + [2(1 + v)\varepsilon \tau'_0 - \varepsilon^2 w''_0]z \\ \sigma_{x(0)} &= \varepsilon u'_0 + v \sigma_{z0} + [-\varepsilon^2 w''_0 + v \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} + (2 + v)\varepsilon \tau'_0]z \\ \varepsilon_{z(0)} &= (1 - v^2)\sigma_{z0} - v \varepsilon u'_0 + [(1 - v^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} + v \varepsilon^2 w''_0 - (1 + v)^2 \varepsilon \tau'_0]z \\ w_{(1)} &= w_0 + [(1 - v^2)\sigma_{z0} - v \varepsilon u'_0]z + [(1 - v^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} + v \varepsilon^2 w''_0 - (1 + v)^2 \varepsilon \tau'_0] \frac{z^2}{2} \\ \tau_{(1)} &= \tau_0 + (-\varepsilon^2 u''_0 - v \varepsilon \sigma'_{z0} + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0)z + \\ &+ [\varepsilon^3 w'''_0 - (1 + v)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} - (2 + v)\varepsilon^2 \tau''_0 + 2(1 + v)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0] \frac{z^2}{2} \\ \sigma_{z(1)} &= \sigma_{z0} + (\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} - \varepsilon \tau'_0)z - (-\varepsilon^3 u'''_0 - v \varepsilon^2 \sigma''_{z0} + \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_{0,c}) \frac{z^2}{2} - \\ &- [\varepsilon^4 w''''_0 - (1 + v)\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} - (2 + v)\varepsilon^3 \tau'''_0 + 2(1 + v)\varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_{0,l}] \frac{z^3}{6} \\ u_{(1)} &= u_0 - [\varepsilon w'_0 - 2(1 + v)\tau_0]z + [-(1 - v^2)\varepsilon \sigma'_{z0} - (2 + v)\varepsilon^2 u''_0 + \\ &+ 2(1 + v)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_{0,l}] \frac{z^2}{2} + [-(3 + 4v + v^2)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} + \\ &+ (2 + v)\varepsilon^3 w'''_0 - (3 + 4v + v^2)\varepsilon^2 \tau''_0 + 4(1 + v)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_{0,l}] \frac{z^3}{6} \end{aligned} \quad (2.3)$$

в виде полиномов по степеням z . Заданные величины начального приближения $w_0(x, t)$ и $\tau_0(x, t)$ вычислены также в первом приближении $w_{(1)}(x, z, t)$ и $\tau_{(1)}(x, z, t)$ для того, чтобы определить величину поправки с учетом координаты z . Величины τ , σ_z , w , u записаны в первом приближении: с их помощью будут выполняться граничные условия, остальные — в нулевом. При этом все неизвестные выражены в зависимости от произвольных функций интегрирования $\tau_0(x, t)$, $\sigma_{z0}(x, t)$, $w_0(x, t)$, $u_0(x, t)$, относительные порядки которых между собой по ε будут определены из граничных условий на длинных и коротких сторонах полосы.

Видно, что формулы (2.3) могут быть записаны в виде последовательности Коши по степеням ε с коэффициентами, зависящими от v и z .

Можно заметить, что $\ddot{w}_{0,c}$ всегда имеет индекс c после запятой, а индекс l находится при величинах $\ddot{\tau}_{0,l}$ и $\ddot{u}_{0,l}$. Поэтому в дальнейшем эти индексы отбросим, считая их приписанными к указанным величинам с двумя точками соответствующим образом “по умолчанию”.

3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы. Уравнение Тимошенко. На лицевых поверхностях полосы $z^* = \pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются так

$$\begin{aligned}\sigma_z &= Z_+(x, t), \quad \tau = X_+(x, t) \quad \text{при} \quad z = 1 \\ \sigma_z &= Z_-(x, t), \quad \tau = X_-(x, t) \quad \text{при} \quad z = -1\end{aligned}\quad (3.1)$$

Безразмерные нагрузки Z_+ , X_+ , Z_- , X_- получены путем деления размерных на жесткость E .

Условия (3.1) будем удовлетворять величинами первого приближения из соотношений (2.3) в предположении, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины. Получим четыре уравнения для определения неизвестных τ_0 , σ_{z0} , w_0 , u_0

$$\begin{aligned}& [\varepsilon^3 w_0''' - (1 + \nu) \varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0' + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0] \frac{1}{2} + \\& \quad + (-\varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z0}' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0) + \tau_0 = X_+ \\& [\varepsilon^3 w_0''' - (1 + \nu) \varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0' + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0] \frac{1}{2} - \\& \quad - (-\varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z0}' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0) + \tau_0 = X_- \\& -[\varepsilon^4 w_0'''' - (1 + \nu) \varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0'' - (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0'' + 2(1 + \nu) \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0] \frac{1}{6} - \\& \quad - (-\varepsilon^3 u_0''' - \nu \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' + \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_0') \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + \sigma_{z0} = Z_+ \\& [\varepsilon^4 w_0'''' - (1 + \nu) \varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0'' - (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0'' + 2(1 + \nu) \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0] \frac{1}{6} - \\& \quad - (-\varepsilon^3 u_0''' - \nu \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' + \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_0') \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' - \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + \sigma_{z0} = Z_-\end{aligned}$$

Складывая и вычитая попарно первые два уравнения и последние два, получим четыре уравнения относительно неизвестных w_0 , τ_0 , определяющих задачу изгиба,

$$\begin{aligned}& \varepsilon^3 w_0''' - (1 + \nu) \varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0' + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 = X_+ + X_- \\& -\varepsilon^4 w_0'''' + (1 + \nu) \varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0'' + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0'' - \\& \quad - 2(1 + \nu) \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0 - 6\varepsilon \tau_0' = 3(Z_+ - Z_-)\end{aligned}\quad (3.2)$$

и относительно u_0 , σ_{z0} , определяющих задачу растяжения—сжатия,

$$\begin{aligned}& -\varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z0}' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 = \frac{1}{2}(X_+ - X_-) \\& \varepsilon^3 u_0''' + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' - \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_0' + 2\sigma_{z0}' = Z_+ + Z_-\end{aligned}\quad (3.3)$$

Формулы для поперечных напряжений σ_z и τ из (2.3) с учетом соотношений (3.2), (3.3) приводятся к простому виду

$$\begin{aligned}\tau_{(1)} &= \tau_0(1 - z^2) + \frac{1}{2}(X_+ - X_-)z + \frac{1}{2}(X_+ + X_-)z^2 \\ \sigma_{z(1)} &= \sigma_{z0}(1 - z^2) - \varepsilon\tau'_0(z + z^3) + \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0(z - z^3) + \frac{1}{2}(Z_+ + Z_-)z^2 + \frac{1}{2}(Z_+ - Z_-)z^3\end{aligned}\quad (3.4)$$

Замечание 1. Продифференцируем первое однородное уравнение из (3.2) по x , умножим на ε и сложим с однородным вторым. Получим выражение неизвестной τ'_0 через w_0

$$\varepsilon \frac{\partial \tau_0}{\partial x} = \frac{3}{2} \varepsilon^4 a_c^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t_c^2} \quad (3.5)$$

Исключив неизвестную $\varepsilon\tau'_0$ и ее производные из второго уравнения в (3.2) и пренебрегая различием в дифференцировании по t_l и t_c , получим уравнение

$$-\frac{2}{3}\varepsilon^4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{8+5\nu}{3}\varepsilon^6 a_c^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t_c^2} - 2(1+\nu)\varepsilon^6 a_c^2 a_l^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial t_c^2 \partial t_l^2} - 2\varepsilon^4 a_c^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t_c^2} = 0 \quad (3.6)$$

Уравнение Тимошенко имеет вид [4]

$$EI \frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 y^*}{\partial t^{*4}} + \rho F \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = 0 \quad (3.7)$$

Здесь k' — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения, F — площадь поперечного сечения, y^* — прогиб, x^* — координата оси балки, I — момент инерции поперечного сечения.

Приведенное к безразмерному виду это уравнение в случае прямоугольного сечения балки высотой $2h$ ($I = 2bh^3/3$, $F = 2bh$) при $k' = 2/3$ и $b = 1$ (b — ширина сечения) записывается так

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{8+6\nu}{3}\varepsilon^6 a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t_c^2} + 2(1+\nu)\varepsilon^6 a^4 \frac{\partial^4 y}{\partial t_c^4} + 2\varepsilon^4 a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t_c^2} = 0 \quad (3.8)$$

Здесь $y = y^*/h$ — безразмерный прогиб и считается, что $a_c = a_l = a$.

Видно, что выведенные разными методами уравнения (3.8) и уравнение (3.6) практически совпадают. Уравнение (3.6), полученное с помощью соотношения (3.5), нельзя считать правильным, поскольку при получении последнего из уравнений (3.2) при вычитании произошло уничтожение главных частей уравнений: исчезли высшие производные и, соответственно, быстро меняющиеся решения. Затем только медленно меняющаяся величина $\varepsilon\tau'_0$ подставляется во второе уравнение системы (3.2), содержащее и быстро меняющиеся, и медленно меняющиеся величины $\varepsilon\tau'_0$, вместо быстро меняющихся и медленно меняющихся величин¹. В силу этого уравнение (3.6) и совпадающее с ним уравнение Тимошенко (3.8), приходится признать некорректными.

4. Уравнения низкочастотных колебаний. Рассмотрим поведение решений уравнений (3.2) и (3.3) при действии только поперечной нагрузки, медленно меняющейся вдоль длинных сторон полосы и изменяющейся во времени по гармоническому зако-

¹ Под медленно меняющейся функцией понимается такая, которая при дифференцировании по аргументу x не меняет своего асимптотического порядка по ε , тогда как быстро меняющаяся при дифференцировании по x увеличивается в ε^{-1} раз.

ну $\sin \omega t_c$. Этот случай отвечает приложению нагрузки с частотами, соизмеримыми с низшими частотами поперечных колебаний полосы, рассматриваемой как балка.

Положим для определенности, что на границу полосы $z = 1$ действует только распределенная нагрузка $Z_+ = p(x) \sin \omega t_c$, $p(x)$ – функция малой изменяемости, $\omega \sim \varepsilon^0$. Остальные нагрузки отсутствуют. Частные решения для $w_0^{(p)}$ и $\tau_0^{(p)}$ находятся из уравнений (3.2) после отбрасывания членов с высшими производными от τ_0 по x и t_l вследствие малой изменяемости и членов $(1 + \nu) \varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0'$ в первом уравнении и $(1 + \nu) \varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0''$ во втором уравнении, имеющих порядок ε^2 по сравнению с находящимися в этом же уравнении одноименными величинами

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0'''' + 2\tau_0 &= 0 \\ -\varepsilon^4 w_0'''' - 6\varepsilon\tau_0' + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 &= 3p \sin \omega t_c \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эти два уравнения сводятся к одному классического вида относительно w_0

$$\frac{2}{3} \varepsilon^4 w_0'''' + 2\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 = p \sin \omega t_c \quad (4.2)$$

Его решение является медленно меняющейся функцией и из первого уравнения системы (4.1) следует оценка для частного решения $w_0^{(p)}$ относительно нагрузки

$$w_0^{(p)} \sim \varepsilon^{-4} p \quad (4.3)$$

и для частного $\tau_0^{(p)}$ и общего $\tau_0^{(g)}$

$$\tau_0^{(p)} \sim \varepsilon^3 w_0^{(p)}, \quad \tau_0^{s(p)} \sim \varepsilon^{-1} p, \quad \tau_0^{(g)} \sim \varepsilon^3 w_0^{(g)} \quad (4.4)$$

Частные решения для u_0 и σ_{z0} находятся из уравнений (3.3) при $Z_+ = p \sin \omega t_c$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z0}' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 &= 0 \\ \varepsilon^3 u_0'''' + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' - \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_0 + 2\sigma_{z0} &= p \sin \omega t_c \end{aligned} \quad (4.5)$$

Продифференцируем первое уравнение по x , умножим на ε и сложим со вторым. Получим

$$2\sigma_{z0}^{(p)} = p \sin \omega t_c \quad (4.6)$$

Подставив теперь известную величину $\sigma_{z0}^{(p)}$ в первое уравнение системы (4.5) получим уравнение для определения решения u_0

$$-\varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 = \nu \varepsilon p' \sin \omega t_c \quad (4.7)$$

из которого, учитывая малую изменяемость функций u_0 и p , получаем оценку

$$u_0^{(p)} \sim \varepsilon^{-1} p \quad (4.8)$$

Будем считать, что частные решения $w_0^{(p)}$, $\tau_0^{(p)}$, $u_0^{(p)}$, $\sigma_{z0}^{(p)}$ найдены. Общие решения для величин $w_0^{(g)}$ и $\tau_0^{(g)}$ будем искать из однородных уравнений (3.2)

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0'''' - (1 + \nu) \varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 &= 0 \\ -\varepsilon^4 w_0'''' + (1 + \nu) \varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0 + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' - 2(1 + \nu) \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0 - 6\varepsilon \tau_0' &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Общие решения для величин $u_0^{(g)}$, $\sigma_{z0}^{(g)}$ следуют из уравнений (4.6) и (4.7) при $p = 0$.

Представим решения w_0, τ_0 в виде сумм

$$w_0 = w_0^s(x) + w_0^q(x/\varepsilon), \quad \tau_0 = \tau_0^s(x) + \tau_0^q(x/\varepsilon) \quad (4.10)$$

обозначив верхним индексом s медленно меняющуюся часть решения, а индексом q быстро меняющуюся, что может быть записано так

$$w_0^{s'} \sim \varepsilon^0 w_0^s(x), \quad \tau_0^{s'} \sim \varepsilon^0 \tau_0^s(x), \quad \varepsilon \tau_0^{q'} \sim \tau_0^q(x/\varepsilon), \quad (4.11)$$

В первом уравнении системы (4.9) член $(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{s''}$ имеет порядок ε^2 по сравнению с последним и может быть отброшен. Аналогичное отбрасывание можно сделать и во втором уравнении. Соответственно, однородные уравнения системы (4.9) в медленно меняющихся зависящих от координат x и t неизвестных записываются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0^{s''''} - (1 + \nu) \varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0^{s'} + 2 \tau_0^s &= 0 \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} + (1 + \nu) \varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0^{s''} + 6 \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0^s - 6 \varepsilon \tau_0^{s'} &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Исключив $\tau_0^{s'}$ из второго уравнения с помощью первого, получим (однородное) уравнение собственных колебаний балки с учетом инерции вращения

$$\frac{2}{3} \varepsilon^4 w_0^{s''''} - \frac{2(1 + \nu)}{3} \varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0^{s''} + 2 \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0^s = 0$$

Второй член в уравнении в силу малой изменяемости по x и времени t_c имеет порядок ε^2 по сравнению с последним и может быть также отброшен. Решение w_0^s имеет малую изменяемость и только малую, при которой асимптотический порядок дифференцируемых функций меняется в ε^0 раз. В соответствии с этим верхний индекс s у w_0^s и член w_0^q в (4.11) можно отбросить. Уравнение принимает классический вид

$$w_0^{s''''} + k_c^4 \ddot{w}_0 = 0, \quad k_c^4 = 3a_c^2 \quad (4.13)$$

Вычитая из уравнений (4.9) попарно уравнения (4.12) и учитывая предположения (4.11), получим уравнения

$$-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \tau_0^q + 2 \tau_0^q = 0 \quad (4.14)$$

$$(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''''} - 2(1 + \nu) \varepsilon^3 a_l^2 \tau_0^{q'} - 6 \varepsilon \tau_0^{q'} = 0 \quad (4.15)$$

решения которых зависят от аргументов x/ε и $t/\varepsilon a_l$.

Замечание 2. Продифференцируем уравнение (4.14) по x , умножим на ε и сложим с уравнением (4.15). Получим соотношение $4\varepsilon \tau_0^{q'} = 0$, которое показывает, что уравнения (4.14) и (4.15) различаются на постоянную величину $4\varepsilon \tau_0^q = C_0$, и, поскольку все медленно меняющиеся решения учтены в решении для w_0 , постоянная C_0 может быть отброшена. Вычитая уравнение $4\varepsilon \tau_0^{q'} = 0$ из (4.15) и интегрируя по x , получим два совпадающих уравнения

$$-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \tau_0^q + 2 \tau_0^q = 0 \quad (4.16)$$

Его решение можно использовать для удовлетворения потеранных граничных условий и сглаживания разрывов в медленно меняющихся классических решениях [2].

Примем $\tau_0^q = X(x)T(t)$. Подставим это выражение в уравнение (4.16). Получим соотношение

$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \frac{X''}{X} + 2\varepsilon^2 a_l^2 (1+\nu) \frac{\ddot{T}}{T} + 2 = 0$$

Поскольку первый член в левой части уравнения зависит только от x , а второй только от t , оба отношения не зависят ни от x , ни от t и равны некоторым константам $\lambda^2 - 2$ и $-\lambda^2$ соответственно, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций X и T

$$(2+\nu) \frac{\varepsilon^2 X''}{X} = 2 - \lambda^2, \quad 2(1+\nu) \frac{\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{T}}{T} = -\lambda^2$$

решения которых запишем так

$$X = B_1 \exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}x\right) + B_2 \exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}(1-x)\right), \quad T = A_1 \sin\left(\frac{c}{\varepsilon a_l}t_l\right) + A_2 \cos\left(-\frac{c}{\varepsilon a_l}t_l\right) \quad (4.17)$$

Здесь введены обозначения

$$k^2 = \frac{2 - \lambda^2}{2 + \nu}, \quad c^2 = \frac{\lambda^2}{2(1 + \nu)} \quad (4.18)$$

Первый член в выражении для X при $\lambda^2 < 2$ описывает решение, затухающее от конца $x = 0$, второй от конца $x = 1$.

Замечание 3. В случае вынужденных колебаний функция $T(t)$ может быть задана, изменяющейся, например, по закону $\sin \omega t_c$. В этом случае из последней формулы (4.17) вытекает равенство $\frac{c}{\varepsilon a_l} t_l = \omega t_c$ и тогда из последней формулы (4.18) с учетом соотношения (2.2) определяется размерность и характер поведения величины λ^2

$$\lambda^2 \sim 2(1+\nu)a_l^2\omega^2$$

По мере возрастания частоты вынужденных колебаний величина λ^2 растет и при $\lambda^2 \geq 2$ величина k^2 в формуле (4.17) становится неположительной: решение X в (4.17) при $\lambda^2 > 2$ меняет свое поведение из затухающего на осциллирующее.

5. Граничные условия на коротких сторонах полосы для низкочастотных колебаний. В инженерной практике существует зависящее от вида конструкции многообразие способов закрепления концов балок. В сопротивлении материалов и строительной механике основные условия определяются как жесткое защемление, свободное опирание, свободный конец. В рассматриваемой здесь уточненной теории необходимо сформулировать условия на коротких сторонах для неизвестных $w_0, u_0, \sigma_{z0}, \tau_0$ в представлениях теории упругости. Рассмотрим два примера выполнения граничных условий на коротких сторонах полосы для условий отсутствия на них перемещений при действии на верхний край полосы (1) распределенной медленно меняющейся нагрузки $p(x) \sin \omega t_c$ и (2) сосредоточенной нагрузки $P\delta(x-c) \sin \omega t_c$.

Пример 1. Пусть на концах полосы $x = 0$ и $x = 1$ выполняются для перемещений равенства $w = u = 0$, что соответствует в классической теории сопротивления материалов случаю жесткого защемления.

Частные и общие решения для нахождения решений, разыскиваемых как медленно меняющиеся по координате x , определены уравнениями классического вида (4.1) и

(4.3), (4.5)–(4.7). Быстро меняющиеся решения определены дополнительным уравнением (4.16), решение которого дается выражениями (4.17).

Граничные условия $w = u = 0$ на коротких сторонах при $x = 0; 1$ будем выполнять величинами первого приближения из выражений (2.3)

$$\begin{aligned} w_0 + [(1 - v^2)\sigma_{z0} - v\epsilon u'_0]z + [(1 - v^2)\epsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + v\epsilon^2 w''_0 - (1 + v)^2 \epsilon \tau'_0] \frac{z^2}{2} = 0 \\ u_0 - [\epsilon w'_0 - 2(1 + v)\tau_0]z - [(1 - v^2)\epsilon \sigma'_{z0} + (2 + v)\epsilon^2 u''_0 - 2(1 + v)\epsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0] \frac{z^2}{2} + \\ - [(3 + 4v + v^2)\epsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0 - (2 + v)\epsilon^3 w'''_0 + (3 + 4v + v^2)\epsilon^2 \tau'_0 - 4(1 + v)\epsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0] \frac{z^3}{6} = 0 \end{aligned}$$

Потребовав в этих уравнениях обращения в ноль коэффициентов при каждой степени z , получим 14 условий на концах $x = 0; 1$

$$w_0 = 0 \quad (5.1)$$

$$(1 - v^2)\sigma_{z0} - v\epsilon u'_0 = 0 \quad (5.2)$$

$$(1 - v^2)\epsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + v\epsilon^2 w''_0 - (1 + v)^2 \epsilon \tau'_0 = 0 \quad (5.3)$$

$$u_0 = 0 \quad (5.4)$$

$$\epsilon w'_0 - 2(1 + v)\tau_0 = 0 \quad (5.5)$$

$$-(1 - v^2)\epsilon \sigma'_{z0} - (2 + v)\epsilon^2 u''_0 + 2(1 + v)\epsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 = 0 \quad (5.6)$$

$$(3 + 4v + v^2)\epsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0 - (2 + v)\epsilon^3 w'''_0 + (3 + 4v + v^2)\epsilon^2 \tau'_0 - 4(1 + v)\epsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0 = 0 \quad (5.7)$$

Условие (5.5) можно переписать так $\epsilon w'_0 - 2(1 + v)(\tau_0^s + \tau_0^q) = 0$. Из оценок (4.4) видно, что $\tau_0^s \sim \epsilon^3 w_0$ и оно может быть отброшено по сравнению с первым членом. Условие $w'_0 = 0$ вместе с условием (5.1) может быть выполнено решением классического уравнения (4.2), и, следовательно, τ_0^q для устранения возможных разрывов в силу их отсутствия следует положить равным нулю. Решение однородных классических уравнений вынужденных колебаний балки при граничных условиях $w_0 = w'_0 = 0$ на концах $x = 0; 1$ известно и здесь не выписывается.

Механический смысл условия (5.2) заключается в равенстве нулю суммы поперечной деформации полосы от напряжения σ_{0z} и поперечной деформации из-за эффекта Пуассона от продольной деформации u'_0 . Из оценок (4.6), (4.8) видно, что $(\sigma_{0z}, \epsilon u'_0) \sim p$ и пренебрежение этим условием в уточненной и тем более в классической теории оправданно. То же самое справедливо относительно условия (5.6).

Условие (5.3) отражает тот факт, что при изгибе полосы, например, вниз, верхние слои сжимаются, а нижние растягиваются. Из-за эффекта Пуассона имеют место поперечные перемещения $[(1 - v^2)\epsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + v\epsilon^2 w''_0] \frac{z^2}{2}$, достигающие наибольших значений в угловых точках при $z = \pm 1$. На рис. 1 деформированные положения границ показаны пунктирной линией, недеформированные — сплошными линиями.

В заделке точки вертикальной границы полосы остаются неподвижными. Отсюда заключаем, что быстро меняющееся решение $(1 + v)^2 \epsilon \tau'_0$ в (5.3) устраняет получившийся разрыв решения на границе. Поскольку инерционный член имеет порядок ϵ^2 по сравне-

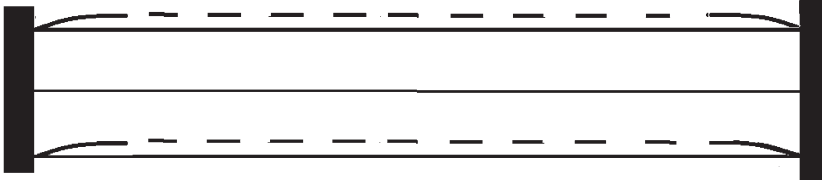


Рис. 1. Длинные границы в недеформированном (сплошные линии) и в деформированном (пунктирные линии) состояниях полосы

нию с упругим членом, его можно отбросить и получить условие $(1 + \nu)^2 \epsilon \tau'_0 = \nu \epsilon^2 w''_0$ для вычисления τ' при $x = 0$; 1. Это дает перемещения w и напряжения σ_x с учетом краевого эффекта

$$w = \left\{ w_0 - \frac{\nu}{(1 + \nu)^2} \epsilon^{-2} \left[w''_0(0) \exp\left(-\frac{k}{\epsilon} x\right) + w''_0(1) \exp\left(-\frac{k}{\epsilon} (1 - x)\right) \right] \frac{z^2}{2} \right\} \sin \omega t$$

$$\sigma_x = -\epsilon^{-2} w''_0 z + \epsilon^{-2} \frac{\nu(2 + \nu)}{(1 + \nu)^2 k} \left[w''_0(0) \exp\left(-\frac{kx}{\epsilon}\right) + w''_0(1) \exp\left(-\frac{k(1 - x)}{\epsilon}\right) \right] z \sin \omega t$$

В первой формуле второй член $O(\epsilon^{-2})$ и может быть отброшен по сравнению с первым. Вычисленный по классической теории прогиб w_0 является достаточно точным и не нуждается в уточнении на коротких сторонах. В формуле для напряжения σ_x из (2.3) второй член в квадратной скобке $O(\epsilon^4)$ и может быть отброшен. Также на основании ранее приведенных оценок (4.6), (4.8) могут быть отброшены первые два члена. Член в квадратных скобках описывает концентрацию напряжений в углах полосы, которые соизмеримы с напряжениями, определяемыми первым членом по классической теории в середине балки.

В условии (5.7) первый член имеет множитель ϵ^5 и может быть отброшен по сравнению со вторым с множителем ϵ^3 . Последний член имеет множитель ϵ^4 в силу соотношения (2.2), т.к. $\tau'_{0,y} = \epsilon^2 \tau'_{0,c}$, в то время как в силу условия (4.10) $\epsilon^2 \tau''_0 = \epsilon^2 \tau''_0^s + \epsilon^2 \tau''_0^q$: в последнем выражении первый член при дифференцировании сохраняет свой порядок ϵ^2 , тогда как второй, быстро меняющийся имеет порядок ϵ^0 . Оставшиеся члены образуют условие

$$(2 + \nu) \epsilon^3 w'''_0 - (3 + 4\nu + \nu^2) \epsilon^2 \tau''_0^q = 0$$

выражающие требование, чтобы искривляющаяся нормаль в пролете на величину $(2 + \nu) \epsilon^3 w'''_0$ в заделке была подправлена до прямой с помощью быстро меняющегося решения (4.16). Здесь $\tau''_0^q \sim \epsilon^3 w'''_0$, т.е. на порядок меньше, чем в условии (5.3). Поэтому вклад этой поправки в напряжение σ_x имеет порядок ϵ по сравнению с главной частью медленно меняющейся компоненты напряжения $\epsilon^2 w''_0 z$.

Условие (5.4) позволяет решить граничную задачу для уравнения (4.7). Учитывая оценку (4.8) инерционные члены в этом уравнении можно отбросить.

Пример 2. Рассмотрим низкочастотные колебания полосы, возникающие под действием приложенной в точке $x = c$ сосредоточенной силы. Поперечные колебания опишем уравнениями (3.2) при нагрузке $X_+ = X_- = 0$, $Z_- = 0$ и $Z_+ = P \delta(x - c) \sin \omega t_c$,

моделирующей приложение сосредоточенной силы в точке $x = c$, $z = 1$ интенсивно-
стью P , $\omega \sim \varepsilon^0$. Перепишем уравнения (3.2) с заданной правой частью

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0'''' - (1 + \nu) \varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0 - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 = 0 \\ - \varepsilon^4 w_0'''' + (1 + \nu) \varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0 + 6\varepsilon^4 a_c^2 \dot{w}_0 + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' - \\ - 2(1 + \nu) \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0 - 6\varepsilon \tau_0' = 3P\delta(x - c) \sin \omega t \end{aligned} \quad (5.8)$$

Заменяем δ – функцию Дирака ее асимптотическим представлением δ_ε [15]

$$\delta_\varepsilon[\kappa(x - c)] = \frac{\kappa}{2\varepsilon} \begin{cases} \exp\left(-\kappa \frac{(c - x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq c \\ \exp\left(-\kappa \frac{(x - c)}{\varepsilon}\right) & \text{при } c \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

где $\kappa \sim \varepsilon^0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon[\kappa(x - c)] = \delta(x - c)$.

Частное решение системы уравнений (5.8) будем разыскивать в следующем виде

$$w_0^{(p)} = W_0 \delta_\varepsilon[\kappa(x - c)] \sin \omega t_c, \quad \tau_0^{(p)} = T_0(t) \delta_\varepsilon[\kappa(x - c)] \sin \omega t_c \quad (5.10)$$

Эти функции при каждом дифференцировании увеличиваются в асимптотическом смысле в ε^{-1} раз. Подставив их в уравнения (5.8), получим уравнения для определения W_0 и T_0 :

при $0 \leq x \leq c$

$$\begin{aligned} -\kappa^3 W_0 + (1 + \nu) \varepsilon^4 \kappa a_c^2 \ddot{W}_0 - (2 + \nu) \kappa^2 T_0 + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{T}_0 + 2T_0 = 0 \\ -\kappa^4 W_0 + (1 + \nu) \varepsilon^4 \kappa^2 a_c^2 \dot{W}_0 + 6\varepsilon^4 a_c^2 \dot{W}_0 - (2 + \nu) \kappa^3 T_0 + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 \kappa a_l^2 \dot{T}_0 + 6\kappa T_0 = 6P \end{aligned}$$

при $c \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} \kappa^3 W_0 - (1 + \nu) \varepsilon^4 \kappa a_c^2 \dot{W}_0 - (2 + \nu) \kappa^2 T_0 + 2(1 + \nu) \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{T}_0 + 2T_0 = 0 \\ -\kappa^4 W_0 + (1 + \nu) \varepsilon^4 \kappa^2 a_c^2 \ddot{W}_0 + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{W}_0 + (2 + \nu) \kappa^3 T_0 - 2(1 + \nu) \varepsilon^2 \kappa a_l^2 \dot{T}_0 - 6\kappa T_0 = 6P \end{aligned}$$

После отбрасывания малых членов с множителями ε^4 и ε^2 по сравнению с одноименными уравнения сводятся к виду

при $0 \leq x \leq c$

$$\begin{aligned} \kappa^3 W_0 + [-(2 + \nu) \kappa^2 + 2] T_0 = 0 \\ -\kappa^3 W_0 + [(2 + \nu) \kappa^2 - 6] T_0 = \frac{6P}{\kappa} \end{aligned}$$

при $c \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} -\kappa^3 W_0 + [-(2 + \nu) \kappa^2 + 2] T_0 = 0 \\ -\kappa^3 W_0 + [-(2 + \nu) \kappa^2 + 6] T_0 = \frac{6P}{\kappa} \end{aligned}$$

Откуда получаем для коэффициентов в формуле (5.10) выражения:

$$\begin{aligned} T_0 = -\frac{3P}{2\kappa}, \quad W_0 = -\frac{3P[(2 + \nu) \kappa^2 - 2]}{2\kappa^4}, \quad \text{при } 0 \leq x \leq c \\ T_0 = \frac{3P}{2\kappa}, \quad W_0 = -\frac{3P[(2 + \nu) \kappa^2 - 2]}{2\kappa^4}, \quad \text{при } c \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

В соответствии с этим запишем решение для w_0 и τ_0 при $0 \leq x \leq c$

$$w_{0-} = \left\{ -\frac{3P[(2+\nu)\kappa^2 - 2]}{2\kappa^4} \delta_{\varepsilon-} + A_1 \sin k_c x + A_2 \cos k_c x + A_3 \operatorname{sh} k_c x + A_4 \operatorname{ch} k_c x \right\} \sin \omega t$$

при $c \leq x \leq 1$

$$w_{0+} = \left\{ -\frac{3P[(2+\nu)\kappa^2 - 2]}{2\kappa^4} \delta_{\varepsilon+} + B_1 \sin k_c y + B_2 \cos k_c y + B_3 \operatorname{sh} k_c y + B_4 \operatorname{ch} k_c y \right\} \sin \omega t$$

$$y = 1 - x, \quad \delta_{\varepsilon-} = \frac{\kappa}{2\varepsilon} \exp\left(-\kappa \frac{(c-x)}{\varepsilon}\right), \quad \delta_{\varepsilon+} = \frac{\kappa}{2\varepsilon} \exp\left(-\kappa \frac{(x-c)}{\varepsilon}\right) \quad (5.11)$$

$$\tau_0^{(p)} = -\frac{3P}{2\kappa} \delta_{\varepsilon}' [\kappa(x-c)] \sin \omega t_c$$

Коэффициент k_c определен формулой в выражении (4.13), A_i и B_i при $i = 1 \div 4$ — постоянные интегрирования уравнения (4.13).

Для упрощения дальнейших вычислений и сокращения записи при выполнении четырех граничных условий и четырех условий непрерывности примем, что $\kappa^2 = 2/(2+\nu)$. Это дает $W_0 = 0$. Дополнительно положим $c = 1/2$, считая силу приложенной в середине пролета полосы.

Теперь надо потребовать выполнения условий непрерывности в точке c для продольного перемещения u , продольного напряжения σ_x , поперечного перемещения w и касательного напряжения τ . Формулы (2.3) и (3.4) позволят их записать так

$$\{u_0 + [2(1+\nu)\tau_0 - \varepsilon w_0']z\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{\varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} + [-\varepsilon^2 w_0'' + \nu \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} + (2+\nu)\varepsilon \tau_0']z\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\left\{ w_0 + [(1-\nu^2)\sigma_{z0} - \nu \varepsilon_0']z + [(1-\nu^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} + \nu \varepsilon^2 w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0'] \frac{z^2}{2} \right\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{\tau_0(1-z^2)\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

Здесь надо подставить верхнее значение $x = c - 0$ в выражение в фигурных скобках и вычесть из него это же выражение при $x = c + 0$.

Условия распадаются на восемь соотношений непрерывности. Шесть из них с отброшенными инерционными членами как пренебрежимо малыми записываются относительно неизвестных w_0 и $\tau_0 = \tau_0^{(p)} + \tau_0^s + \tau_0^q$

$$\{w_0\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\varepsilon w_0' - 2(1+\nu)(\tau_0^{(p)} + \tau_0^s + \tau_0^q)\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)\varepsilon(\tau_0^{(p)'} + \tau_0^{s'} + \tau_0^{q'})\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{\nu \varepsilon^2 w_0'' - (1 + \nu)^2 (\varepsilon \tau_0^{(p)'} + \varepsilon \tau_0^{s'} + \varepsilon \tau_0^{q'})\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\tau_0^{(p)} + \tau_0^s + \tau_0^q\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

Поскольку из первого уравнения (4.1) для решения однородного уравнения имеем

$$\tau_0^s = -\frac{1}{2} \varepsilon^3 w_0''' \quad (5.12)$$

оно везде кроме последнего уравнения может быть отброшено как величина $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с одноименной и условия принимают вид

$$\begin{aligned} \{w_0\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\varepsilon w_0' - 2(1 + \nu)(\tau_0^{(p)} + \tau_0^q)\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{-\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu)(\tau_0^{(p)'} + \tau_0^{q'})\}_{c+0}^{c-0} = 0 \\ \{\nu \varepsilon^2 w_0'' - (1 + \nu)^2 (\tau_0^{(p)'} + \tau_0^{q'})\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \left\{-\frac{1}{2} \varepsilon^3 w_0''' + \tau_0^{(p)} + \tau_0^q\right\}_{c+0}^{c-0} = 0 \end{aligned}$$

В них везде входит сумма $\tau_0^{(p)} + \tau_0^q$ и поскольку из последнего уравнения следует, что

$$(\tau_0^{(p)} + \tau_0^q) \sim \varepsilon^3 w_0 \quad (5.13)$$

она также может быть отброшена во втором уравнении как величина $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с $\varepsilon w_0'$, а в третьем и четвертом уравнениях как величина $O(\varepsilon)$ по сравнению с $\varepsilon^2 w_0''$. После этого третье и четвертое условия совпадут и в результате останутся четыре условия непрерывности, аналогичные классическим для балки

$$\{w_0\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\varepsilon w_0'\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\varepsilon^2 w_0''\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \left\{-\frac{1}{2} \varepsilon^3 w_0''' + \tau_0^{(p)} + \tau_0^q\right\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

за исключением члена τ_0^q в последнем уравнении, который следует отбросить, поскольку все четыре условия непрерывности и четыре граничных условия на концах могут быть удовлетворены за счет восьми постоянных интегрирования классического решения A_i и B_i при $i = 1 \div 4$.

После подстановки решений (5.11) получим алгебраические уравнения для определения постоянных интегрирования A_i и B_i при $i = 1 \div 4$

$$\begin{aligned} (A_3 - B_3)(\operatorname{sh} k_c c - \sin k_c c) + (A_4 - B_4)(\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c) &= 0 \\ (A_3 - B_3)(\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c) + (A_4 - B_4)(\operatorname{ch} k_c c + \cos k_c c) &= 0 \\ (A_3 + B_3)(\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c) + (A_4 + B_4)(\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c) &= 0 \\ (A_3 + B_3)(\operatorname{ch} k_c c + \cos k_c c) + (A_4 + B_4)(\operatorname{sh} k_c c - \sin k_c c) &= \varepsilon^{-3} \frac{3P}{16k} \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений получаем

$$A_3 = B_3 = -A_4 \frac{\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c}{\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c} = -B_4 \frac{\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c}{\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c}$$

и затем из последних двух

$$A_4 = B_4 = \varepsilon^{-3} \frac{3P(\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c)}{32\Delta k}, \quad \Delta = 2(\operatorname{sh} k_c c \cos k_c c + \operatorname{ch} k_c c \sin k_c c)$$

Отсюда имеем

$$w_{0-} = \varepsilon^{-3} \frac{3P}{64(\operatorname{sh} k_c c \cos k_c c + \operatorname{ch} k_c c \sin k_c c)k} \times$$

$$\times [(\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c)(\operatorname{ch} k_c x - \cos k_c x) - (\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c)(\operatorname{sh} k_c x - \sin k_c x)] \sin \omega t$$

$$w_{0+} = \varepsilon^{-3} \frac{3P}{64 (\operatorname{sh} k_c c \cos k_c c + \operatorname{ch} k_c c \sin k_c c) k} \times \quad (5.14)$$

$$\times [(\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c)(\operatorname{ch} k_c y - \cos k_c y) - (\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c)(\operatorname{sh} k_c y - \sin k_c y)] \sin \omega t$$

Заметим, что если нагрузка приложена не посередине верхнего края полосы, процедура решения остается такой же, но окончательные формулы записываются длиннее.

Поскольку величины σ_{z0} , $u_0^{(g)}$, $u_0^{(p)}$, $w_0^{(p)}$, $w_0^{(g)}$, $\tau_0^{(p)}$, $\tau_0^{(g)}$, τ_0^q имеют различные асимптотические порядки их вклад в каждой формуле (2.3) в искомые неизвестные будет различным. Поэтому в общих выражениях для неизвестных (2.3) надо оставить только главные члены. Во-первых, во все выражения входят величины σ_{z0} , $u_0^{(g)}$, $u_0^{(p)}$, для которых необходимо произвести асимптотические оценки. Выражение (4.6), переписанное для сосредоточенной нагрузки имеет вид

$$2\sigma_{z0}^{(p)} = P\delta_\varepsilon \sin \omega t_c$$

и имеет соответствующую асимптотическую оценку

$$\sigma_{z0}^{(p)} \sim \varepsilon^{-1} P \quad (5.15)$$

В уравнении продольных колебаний (4.7) с сосредоточенной нагрузкой

$$-\varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 = v \varepsilon P \delta_\varepsilon \sin \omega t_c$$

при поиске частного решения $u_0^{(p)}$ можно отбросить инерционный член как малый $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с первым, т.к. первый при дифференцировании увеличивается в ε^{-2} раз

$$-\varepsilon^2 u_0'' = v \varepsilon P \delta_\varepsilon \sin \omega t_c$$

После интегрирования получим

$$u_0 = \varepsilon \frac{vP}{2\kappa^2} \begin{cases} -\exp\left(-k \frac{(c-x)}{\varepsilon}\right) \sin \omega t_c + (a_0 + a_1 x) & \text{при } 0 \leq x \leq c \\ \exp\left(-k \frac{(x-c)}{\varepsilon}\right) \sin \omega t_c + (b_0 + b_1 x) & \text{при } c \leq x \leq 1 \end{cases}$$

с оценкой

$$u_0^{(p)}, u_0^{(g)} \sim \varepsilon P \quad (5.16)$$

Формулы (2.3) с учетом записи (3.4) для неизвестных теперь можно переписать с учетом структуры полученных решений

$$u_{(0)} = u_0^{(p)} + u_0^{(g)} + [2(1+v)\tau_0^{(p)} - \varepsilon w_0^{(g)'}]z$$

$$\sigma_{z(0)} = \sigma_{z0}^{(p)} + [\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0^{(g)} - \varepsilon \tau_0^{(p)'}]z$$

$$\varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_0^{(p)'} + \varepsilon u_0^{(g)'} + [2(1+v)\varepsilon \tau_0^{(p)'} - \varepsilon^2 w_0^{(g)''}]z$$

$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon u_0^{(p)} + \varepsilon u_0^{(g)} + v \sigma_{z0}^{(p)} - [\varepsilon^2 w_0^{(g)*} - v \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0^{(g)} - (2+v)\varepsilon \tau_0^{(p)'}]z$$

$$\varepsilon_{z(0)} = (1-v^2)\sigma_{z0}^{(p)} - v \varepsilon u_0^{(p)'} - v \varepsilon u_0^{(g)'} + [(1-v^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0^{(g)} + v \varepsilon^2 w_0^{(g)''} - (1+v)^2 \varepsilon \tau_0^{(p)'}]z$$

$$\begin{aligned}
w_{(1)} &= w_0^{(g)} + [(1 - \nu^2)\sigma_{z0}^{(p)} - \nu \varepsilon u_0^{(p)}, - \nu \varepsilon u_0^{(g)}]z + \\
&+ [(1 - \nu^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0^{(g)} + \nu \varepsilon^2 w_0^{(g)'''} - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0^{(p)}] \frac{z^2}{2} \\
\tau_{(1)} &= \tau_0^{(p)}(1 - z^2) \\
\sigma_{z(1)} &= \sigma_{z0}^{(p)}(1 - z^2) - \varepsilon \tau_0^{(p)}(z + z^3) + \frac{1}{2} P \delta(x - c) \sin \omega t_c (z^2 + z^3)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношениями (5.13)–(5.16), оставим в каждом выражении только главные члены

$$\begin{aligned}
u_{(0)} &= -\varepsilon w_0^{(g)} z + O(\varepsilon^2), \quad \sigma_{z(0)} = \sigma_{z0}^{(p)} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0^{(g)''} z + O(\varepsilon^2), \\
\sigma_{x(0)} &= \nu \sigma_{z0}^{(p)} + \varepsilon^2 w_0^{(g)''} z + O(\varepsilon), \quad \varepsilon_{z(0)} = \nu \varepsilon^2 w_0^{(g)''} z + O(\varepsilon), \quad w_{(1)} = w_0^{(g)} + O(\varepsilon^2) \\
\tau_{(1)} &= \left(\tau_0^{(p)} - \frac{1}{2} \varepsilon^3 w_0^{(g)'''} \right) (1 - z^2) + O(\varepsilon), \quad \sigma_{z(1)} = \sigma_{z0}^{(p)}(1 - z^2) + \frac{1}{2} P \delta(x - c) \sin \omega t_c (z^2 + z^3)
\end{aligned}$$

Здесь справа в каждой формуле указаны относительные порядки отброшенных величин по сравнению с главными. Видно, что перемещения определяются с меньшей погрешностью, чем напряжения.

7. Обсуждение результатов. Предложенный Сен-Венаном полуобратный метод решения уравнений теории упругости расширен до итерационного, совпадающего с методом простых итераций. Для этого оператор исходных уравнений преобразован так, чтобы он позволял вычислять неизвестные величины последовательно: вычисленные в одном уравнении величины входят в следующее уравнение как известные, умноженные на малый параметр. Решение получается в виде асимптотического ряда по малому параметру, обеспечивающему асимптотическую сходимость удовлетворяющую теореме Банаха о неподвижной точке (принципу сжатых отображений). Такая последовательность обеспечивается операторами Пикара и выбором величин начального приближения независимыми от поперечной координаты, совпадающими по смыслу к гипотезам Кирхгофа недеформируемой нормали. В течение одной итерации вычисляются путем прямого интегрирования все неизвестные задачи, содержащие четыре произвольные функции интегрирования, зависящие от продольной координаты и играющие роль коэффициентов в полиномах по степеням поперечной координаты. Построение интеграла исходных уравнений теории упругости в виде последовательности Коши сводится к последовательному применению операторов Пикара для решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной и часто встречающегося в учебной литературе.

Предположим, что любое приближенное решение может быть рассмотрено как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Поэтому, если строить такой процесс, необходимо, чтобы он был сходящимся. Показано, что необходимым условием сходимости является построение такой последовательности вычислений неизвестных, когда вычисляемая через предыдущую величина, не должна быть умножаемой на малый параметр в отрицательной степени. Метод SVPB позволяет написать аналитические выражения с заданной точностью для всех неизвестных задачи и соответственно выполнить любые граничные условия и условия непрерывности напряжений и перемещений, возникающие в классических решениях. Наличие полного решения позволяет формулировать задачи сопряжения элементов.

В процессе последовательного вычисления неизвестных в течение нулевой итерации имеет место четырехкратное интегрирование по поперечной координате и четырехкратное дифференцирование по продольной. Однако это дифференцирование

имеет символический характер, т.к. при выполнении граничных условий на длинных сторонах производные приравняются к нагрузке, которую можно принять за единицу измерения искомых величин, и соответствующие уравнения интегрируются, обеспечивая вместе с однородными сингулярно возмущенными уравнениями непрерывность и ограниченность решения в любом случае. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление сложного оператора на четыре последовательных оператора Пикара относительно поперечной координаты и четыре – относительно продольной. Близость полученного решения к точному решению оценивается порядком первого отброшенного члена по ϵ для медленно меняющихся величин и оценкой, данной в [4], для быстроменяющихся.

Показана ошибка, совершаемая при выводе уравнения Тимошенко, порожденная уничтожением главных членов при вычитании.

Обнаруженное уменьшение скорости затухания быстро меняющихся компонент решения по мере увеличения частоты колебаний позволяет сделать заключение об отсутствии затухания разрывов на концах полосы при частотах возбуждения, соизмеримых с собственными частотами продольных колебаний стержня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. 662 p. = Ляв А. Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. Friedrichs R.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. V. 61. № 6. P. 485–504.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Т. 5 // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. 271 с.
4. Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar // Phil. Mag. 1921. Ser. 6 (41). № 245. P. 744–746.
5. Timoshenko S.P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross sections // Phil. Mag. 1922. Series 6 (43). P. 125–131.
6. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. № 3. С. 287–300.
7. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38.
8. Dolph C.L. On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations // Quart. Appl. Math. 1954. V. 12. № 2. P. 175–187.
9. Hutchinson J.R. On Timoshenko beams of rectangular cross-section // J. Appl. Mech. 2004. V. 71. P. 359 – 367.
<https://doi.org/10.1115/1.1751186>
10. Stephen N.G. The second spectrum of Timoshenko beams theory— Further assessment// J. Sound Vib. 2006. V. 292. P. 372–389.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.08.003>
11. Nesterenko V.V. A theory for transverse vibrations of the Timoshenko beam // J. Appl. Math. Mech. 1993. V. 57. P. 669–677.
12. Abramyan A.K., Indeitsev D.A., Postnov V.A. Running and Standing Waves of Timoshenko Beam // Mech. Solids. 2018. V. 53. № 2. P. 203–210.
<https://doi.org/10.3103/S0025654418020115>
13. Wanga X.Q. Timoshenko beam theory: A perspective based on the wave–mechanics approach // Wave Motion. 2015. V. 57. P. 64–87.
14. Демочкин Н.И., Моргачев К.С., Фридман Л.И. Область достоверности модели Тимошенко в динамике стержней и пластин // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 6. С. 137–145.
15. Zveriaev E.M. Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method // Shell Structures: Theory and Application. London: Taylor & Francis Group, 2006. P. 191–198.
16. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // ПММ. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833

17. Колмогоров А.Н., Фомин С. В. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
18. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
19. Lindelöf E. L. Sur l'application des méthodes d'approximation successives a l'étude des intégrales réeles des équations différentielles ordinaires // Journal des mathématiques Pures et Appliquées. 4^e série. 1894. V. 10. P. 117–128.
20. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives // Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, 4e serrie. 1890. V. 6. P. 145–210.
21. Granas A. Fixed point theory. N.-Y.: Springer, 2003. 707 p.
22. De Pascalis R., Destrade M., Saccomandi G. The stress field in a pulled cork and some subtle points in the semi-inverse method of nonlinear elasticity // Proc. R. Soc. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2007. V. 463 (2087). P. 2945–2959.
<https://doi.org/10.1098/rspa.2007.0010>
23. De Pascalis R., Rajagopal K. R., Saccomandi G. Remarks on the use and misuse of the semi-inverse method in the nonlinear theory of elasticity // Q. J. Mech. Appl. Math. 2009. V. 62. № 4. P. 451–464.
24. Bulgariu E. On the Saint–Venant's problem in microstretch elasticity // Libertas Mathematica. 2011. V. XXXI. P. 147–162.
25. Chirișta S. Saint–Venant's problem and semi–inverse solutions in linear viscoelasticity // Acta Mech. 1992. V. 94. P. 221–232.
26. Placidi L., El Dhaba A. R. Semi-inverse method à la Saint-Venant for two-dimensional linear isotropic homogeneous second-gradient elasticity // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22. № 5. P. 919–937.
<https://doi.org/10.1177/1081286515616043>
27. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.
28. Зверяев Е.М. Непротиворечивая теория оболочек // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 590–596.
29. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321.
30. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений. Препринт № 95, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М.: ИПМ, 2014. 30 с.
31. Лиходед А.И., Сидоров В.В. Некоторые особенности сходимости метода разложения по тонам колебаний применительно к континуальным и конечно-элементным моделям // Космонавтика и ракетостроение. 2013. № 2 (71). С. 20–27.
32. Лалин В.В., Ле Ты Куанг Чунг. Расчет строительных конструкций на несколько динамических воздействий со статическим учетом высших форм колебаний // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 3. С. 171–178.