ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 1, с. 41–58

УДК 539.39

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ОДНИМ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ: СЛУЧАЙ ОДИНАКОВЫХ МОДУЛЕЙ СДВИГА

© 2022 г. И. Я. Цуркис[a],*, Ю. О. Кузьмин[a],**

[a] *Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*

**e-mail: tsurkis@ifz.ru*

***e-mail: kuzmin@ifz.ru*

Поступила в редакцию 07.04.2021 г.
После доработки 26.04.2021 г.
Принята к публикации 13.05.2021 г.

Рассмотрена двумерная задача теории упругости для плоскости с несколькими включениями произвольной формы, модули сдвига которых совпадают с модулями сдвига плоскости. Никаких ограничений на модули сжатия нет. В бесконечно удаленной точке плоскости задается однородное напряженное состояние. Использован метод комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили. Получено общее решение в квадратурах и явные формулы для нескольких частных случаев. Исследовано поле напряжений вблизи особых точек границ включений (эти границы предполагаются кусочно-гладкими, состоящими из конечного числа дуг Ляпунова).

Ключевые слова: модуль сдвига, краевая задача теории упругости, интеграл типа Коши, теорема Лиувилля, теорема Племеля

DOI: 10.31857/S0572329921060155

1. Введение. Задачам теории упругости для бесконечной или полубесконечной кусочно-однородной изотропной среды ввиду их практической важности посвящена обширная литература; настолько обширная, что авторы сочли целесообразным при обсуждении текущего состояния вопроса ограничиться, в основном, изотропным двумерным случаем. Правда, пик интереса к данной проблематике, в частности, к двумерной задаче, миновал – он приходится на 50-е–70-е годы прошлого века. Поэтому самая “свежая” работа, на которую мы сошлемся, датирована 2010 г.

Здесь уместно сказать, что под включением (это слово фигурирует в названии статьи) мы будем по умолчанию понимать конечную область с измененными упругими свойствами; скачок вектора смещений при переходе через границу области отсутствует. Наша терминология отличается от общепринятой, согласно которой область с измененными свойствами называется неоднородностью, а включением – область, на границе которой смещение претерпевает разрыв [1]. Впрочем, разделение упругих дефектов на эти два типа является до некоторой степени условным. Так, в геофизике (авторы имеют к ней непосредственное отношение), а точнее – в современной геодинамике, существенную роль играют дефекты земной коры, т.н. разломы. Их деформационную активизацию можно интерпретировать и как скачок смещений (включение в традиционном смысле слова), и как временное изменение неоднородности. Оба подхода дают идентичные результаты [2].

Двумерная постановка не только уменьшает количество уравнений, — она дает возможность применить метод комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили [3, 4], который основан на том, что компоненты двумерного тензора напряжений являются вторыми производными некоторой бигармонической функции, т.н. функции Эри. В свою очередь, бигармоническая функция выражается через две функции комплексного переменного (это и есть потенциалы Колосова), аналитические в той области, где упругие модули постоянны. Задача теории упругости сводится, таким образом, к краевой задаче ТФКП. На бесконечности задается однородное напряженное состояние. Условий на границе два: одно следует из третьего закона Ньютона, второе выражает непрерывность вектора смещений.

Но если не накладывать ограничений на соотношение между упругими модулями матрицы и включений, даже этот мощный аппарат позволяет получить точное решение, только если матрица (т.е. вмещающая среда) — вся плоскость, включение одно, и это — эллипс. Предположим, что в бесконечно удаленной точке задано одноосное напряженное состояние; тогда напряженное состояние внутри эллипса будет однородным [5]. Здесь мы имеем полную аналогию с трехмерной задачей об эллипсоидальном включении [1]. Примечательно, что напряженное состояние внутри эллипсоида или эллипса будет однородным даже при анизотропии упругих свойств и включения, и матрицы [6, 7].

Возникает вопрос: верно ли обратное утверждение? То есть: если на бесконечности действует одноосное напряженное состояние, и поле напряжений во включении однородно, означает ли это, что включение представляет собой эллипс? Положительный ответ дал Г. Сендецкий в работе [8].

Задачу, рассмотренную Г. Сендецким, можно назвать обратной задачей о включении: известен общий вид поля напряжений во включении и на бесконечности, а искомой является геометрия включения. Решение основано на том, что внешность единичного круга можно конформно отобразить на внешность любой односвязной области, а функция $z(w)$, осуществляющая это отображение, представима в виде степенного ряда:

$$z(w) = Aw + A_0 + A_1/w + A_1/w^2 + \dots \tag{1.1}$$

Конформные отображения являются основным инструментом при решении "прямой", классической задачи о плоскости с полостью. Если $z(w)$ — рациональная функция (в частности, если ряд (1.1) конечен), метод Колосова—Мусхелишвили дает точное решение [4]. Но внутри круга у этой функции есть особенность, поэтому в прямой задаче о включении с конечными модулями упругости конформные отображения "не работают", по крайней мере, столь же эффективно.

Метод комплексных потенциалов, тем не менее, полезен: он позволяет свести задачу о включении к системе сингулярных интегральных уравнений (с ядром Коши). Ее можно регуляризовать, превратив в систему интегральных уравнений Фредгольма. Это сделал Д.И. Шерман в работе [9]. В ней вмещающая область предполагается конечной, но предложенный автором подход почти без изменений переносится на случай, когда матрица — вся плоскость, или даже полуплоскость [10]. Однако решать полученные интегральные уравнения приходится численно. По-видимому, наиболее эффективный алгоритм численного решения предложен в [11]: авторы решают не уравнение Фредгольма, а "исходное", сингулярное уравнение, заменяя искомую непрерывную функцию ступенчатой. Работоспособность алгоритма они проверяют на эллиптическом включении, сравнивая приближенное решение с решением Хардимана [5]. Но доказательство корректности своей численной процедуры авторы не приводят. Неизвестно, будет ли их алгоритм работать, если граница включения содержит угловые точки.

Альтернативным является метод возмущений — он позволяет свести задачу о неоднородности к последовательности (бесконечной) "однородных" задач. Этот метод подробно описан в [12]. Доказательство сходимости итераций использует предположение о том, что упругие модули меняются от точки к точке непрерывно, более того – достаточно гладко. Но его, по-видимому, можно модифицировать таким образом, что это предположение станет лишним. Основная трудность в другом: метод возмущений тоже не позволяет получить точные квадратурные формулы; довольствоваться, в конечном итоге, приходится некоторым приближением.

Все вышесказанное относится к ситуации, когда упругие модули включений могут произвольным образом отличаться от упругих модулей вмещающей среды. Если же модули сдвига включений одинаковы и совпадают с модулем сдвига матрицы (плоскости), получить точные формулы для потенциалов Колосова, а значит, и для напряжений и деформаций, не составляет труда. При этом включений может быть несколько, их форма принципиального значения не имеет; на модули сжатия никаких ограничений нет.

Данная статья посвящена разбору именно этого частного случая. По непонятным причинам, он остался вне поля зрения исследователей, занимавшихся данной проблематикой. Правда, В.А. Ломакин рассматривает в [12] задачу теории упругости для неоднородно-упругого тела с постоянным модулем сдвига. При этом модуль сжатия предполагается гладкой функцией координат. В.А. Ломакин сводит эту задачу к уравнению в частных производных четвертого порядка относительно вспомогательной функции, которую тоже можно назвать потенциалом: напряжения и смещения выражаются через производные этой функции.

Но о возможности решения в квадратурах речь не идет: во-первых, задача трехмерная. Во-вторых, между непрерывным и скачкообразным изменением модуля сжатия в данном случае есть принципиальная разница. И, в-третьих, автор не конкретизирует геометрию вмещающего тела. Мы же будем рассматривать случай неограниченной двумерной среды (плоскости), и только его.

Предлагаемое решение основано на элементарных свойствах интегралов типа Коши. “Образцом” послужила работа Д.И. Шермана [13], где решена другая, хотя и близкая задача: включение “сделано” из того же материала, что и матрица, но на границе раздела задан скачок смещений. Эту задачу естественно было бы назвать задачей Шермана, или, используя инженерную терминологию, задачей о вставке. Д.И. Шерман, используя интегралы типа Коши, сводит ее к первой основной задаче для вмещающей области, которую он предполагает конечной.

Но для нас гораздо больший интерес представляет случай, когда это – полуплоскость или вся плоскость. Ему посвящена работа [14]. Автор называет задачу о вставке двумерной задачей Эшелби. Работу Шермана [13] он не упоминает. Его подход основан на следующем факте: пусть D – ограниченная область в плоскости комплексного переменного z, которую занимает включение; ∂D – граница этой области и $\xi \in \partial D$. Тогда функция $F(\xi) = \overline{\xi}(\xi)$ может быть аналитически продолжена на внешность области D. Это следует из существования отображения (1.1).

Обрывая ряд (1.1), т.е. рассматривая вместо D близкую к ней, “более регулярную” область, автор добивается того, что точка $z = \infty$ оказывается полюсом конечного порядка для функции $F(z)$. Если включение одно, его идею можно применить к нашей задаче. Но решение будет приближенным; кроме того, сконструировать функцию $F(z)$ не так просто – сначала нужно построить отображение (1.1).

Интереснее и ближе нам работа [15], тоже посвященная задаче о вставке. Авторы идут вслед за Д.И. Шерманом. Они рассматривают частный пример, когда включение представляет собой квадрат, который извлекли из плоскости, увеличили в размерах (скажем, нагрели), затем обжали и с помощью жесткой оправки поместили обратно. Для компонент напряжения в [15] получены явные формулы. Оказывается, что в окрестности вершин квадрата след тензора напряжений остается конечным, а сдвиговая составляющая стремится к бесконечности.

Авторы [15] могли выписать решение для нескольких вставок произвольной формы, и — более того — распространить его на случай, когда только модули сдвига вставок и плоскости совпадают, а модули сжатия различаются. Тогда бы необходимости в данной статье не было — наши формулы были бы частным случаем их результатов. Но они мимо этой возможности прошли.

2. Метод Колосова–Мусхелишвили. Этот метод является основой для дальнейших рассмотрений. С исчерпывающей полнотой он изложен в [4], см. также [16]. Мы только напомним, в чем он состоит, и приведем (без вывода) факты, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Метод комплексных потенциалов (Колосова–Мусхелишвили) основан на том, что компоненты σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} двумерного тензора напряжений в однородной изотропной упругой среде являются производными бигармонической функции, т.н. функции напряжений Эри $U(x, y)$:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

и на теореме Гурса, в силу которой функцию, бигармоническую в области D можно представить в виде:

$$U = \mathrm{Re}\left(z\bar{\varphi} + \int \psi dz\right)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции комплексной переменной $z = x + iy$. Это и есть потенциалы Колосова. Иногда мы будем называть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ первым и вторым потенциалом Колосова соответственно.

В силу (2.1), функция Эри определена с точностью до слагаемого вида $ax + by + c$. Следовательно, потенциал φ определен с точностью до слагаемого вида $i\alpha z + \beta$, где α — действительная, β — комплексная константа, а $\psi(z)$ — с точностью до аддитивной комплексной константы:

$$\varphi(z) \sim \varphi(z) + i\alpha z + \beta, \quad \psi(z) \sim \psi(z) + \gamma \tag{2.2}$$

Компоненты тензора напряжений определяются потенциалами Колосова однозначно:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение функцию $f(z)$, “комплексный градиент” бигармонической функции $U(x, y)$:

$$f(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} \tag{2.4}$$

Пусть сначала конечная область D ограничена кусочно-гладким контуром ∂D. Сужение (2.4) на ∂D, функцию $f(\xi)$, где $\xi \in \partial D$, можно выразить через компоненты F_x и F_y вектора напряжений, действующих извне:

$$f(\xi) = i\int_{\xi_0}^{\xi} (F_x + iF_y)ds + C \tag{2.5}$$

где ds — элемент дуги контура ∂D (при интегрировании контур обходится в положительном направлении по отношению к области D — так, что эта область остается слева); $\xi_0 \in \partial D$ — произвольно выбранная точка на контуре; C — произвольная константа. По этой причине $f(z)$ мы будем называть силовой функцией для области D. В [4] показано, что граничные значения $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ связаны друг с другом и с $f(\xi)$ соотношением

$$\varphi(\xi) + \xi\overline{\varphi'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)} = f(\xi), \quad \xi \in \partial D \tag{2.6}$$

Найти потенциалы Колосова по заданной функции $f(\xi)$ – значит решить т.н. первую основную задачу плоской теории упругости. По поводу условий, при которых это заведомо можно сделать, см. [4]. Заметим, что функция $f(\xi)$ определена с точностью до аддитивной константы. С такой же точностью в силу (2.2) определена и левая часть (2.6).

Пусть теперь граница ∂D области D состоит из одного или нескольких кусочно-гладких контуров:

$$\partial D = \bigcup_{n=1}^{N} \partial D_n$$

а потенциалы Колосова $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ заданы. Этим функция Эри в D определена с точностью до аддитивной константы, а силовая функция (2.4) – однозначно. Зададим функцию $f_n(\xi)$, $\xi \in \partial D_n$ формулой

$$f_n(\xi) = \varphi(\xi) + \xi\overline{\varphi'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)}, \quad \xi \in \partial D_n$$

Функцию $f_n(\xi)$, которая есть не что иное, как сужение (2.4) на ∂D_n, можно представить в виде, аналогичном (2.5). А именно: пусть $F_x^{(n)}$ и $F_y^{(n)}$ – компоненты вектора напряжений, действующих на контур ∂D_n извне. Зафиксируем точку $\xi_0^{(n)} \in \partial D_n$. Утверждается, что существует комплексная константа C_n, зависящая от $\xi_0^{(n)}$, такая, что

$$f_n(\xi) = i \int_{\xi_0^{(n)}}^{\xi} \left(F_x^{(n)} + iF_y^{(n)}\right) ds + C_n \tag{2.7}$$

Приведем также формулу (Г.В. Колосова) для смещений. Пусть u и v – горизонтальная и вертикальная составляющие вектора смещений. Формула Колосова:

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = (\varkappa + 1)\varphi(z) - f(z) \tag{2.8}$$

Здесь μ – модуль сдвига; $\varkappa$ – константа Колосова, которая выражается через модуль сдвига μ и модуль сжатия λ:

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$$

В силу (2.2), формула (2.8) определяет вектор смещений с точностью до слагаемого вида

$$i\eta z + \delta \tag{2.9}$$

где η – действительная, δ – комплексная константа. Но оно не влияет на симметризованный тензор деформации, от которого зависят упругие напряжения.

3. Постановка двумерной задачи. Пусть D_0 – изотропная, но не однородная по упругим свойствам плоскость; она же – плоскость комплексного переменного z. Пусть $D_1 \subset D_0$, $D_2 \subset D_0$ …, $D_N \subset D_0$ – односвязные области, ограниченные замкнутыми кусочно-гладкими кривыми $\varphi_n(z)$; предполагается, что каждая гладкая компонента каждого контура является дугой Ляпунова.

Модуль сдвига во всей плоскости D_0 один и тот же; его мы обозначим через μ.

Модуль сжатия в D_1 равен λ_1, и т.д.; в $D_N - \lambda_n(z)$. Модуль сжатия в области D, внешней по отношению к $D_1 \cup \ldots \cup D_N$, обозначим через λ.

Компоненты тензора напряжений D_n, σ_{yy}^{∞} и σ_{xy}^{∞} в бесконечно удаленной точке плоскости заданы, требуется найти напряжения во всех точках D_0 при условии, что вектор смещений при переходе через границы ∂D_n изменяется непрерывно.

Сведем эту задачу к краевой задаче теории функций. Пусть $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ – потенциалы Колосова, которые определяют напряженное состояние в области D_n, $n = 1, \ldots, N$; а $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – потенциалы Колосова в области D. Мы будем искать функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде:

$$\varphi(z) = \Gamma_1 z + \Phi(z), \quad \psi(z) = \Gamma_2 z + \Psi(z) \tag{3.1}$$

где $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ – голоморфные в области D функции такие, что

$$\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0 \tag{3.2}$$

Константы Γ_1 и Γ_2 задают поле напряжений в бесконечно удаленной точке. Поскольку мнимая часть $\varphi(z)$ на напряжения не влияет, будем считать, что

$$\operatorname{Im}\Gamma_1 = 0 \tag{3.3}$$

Из (2.3) следует, что

$$\Gamma_1 = \frac{\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{4}, \quad \Gamma_2 = \frac{\sigma_{yy}^{\infty} - \sigma_{xx}^{\infty}}{2} + i\sigma_{xy}^{\infty}$$

Если поле в D задано, требования (3.1), (3.2) и (3.3) к потенциалам $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяют эти функции однозначно. Поэтому функции $f_n(\xi)$, $\xi \in \partial D_n$, $n = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} f_n(\xi) &= \varphi(\xi) + \xi\overline{\varphi'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)} = \\ &= 2\Gamma_1\xi + \overline{\Gamma_2}\overline{\xi} + \Phi(\xi) + \xi\overline{\Phi'(\xi)} + \overline{\Psi(\xi)} \quad \xi \in \partial D_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

тоже определены однозначно. В терминах предыдущего раздела, $f_n(\xi)$ – это сужение силовой функции для области D на контур ∂D_n. $f_n(\xi)$ можно представить в виде (2.7), где $F_x^{(n)}$ и $F_y^{(n)}$ – компоненты вектора напряжений, действующих со стороны включения D_n; $\xi_0^{(n)}$ – произвольно выбранная точка контура ∂D_n; C_n – константа, которая зависит от $\xi_0^{(n)}$.

Подчеркнем, что интегрирование идет в положительном направлении по отношению к области D – так, что она остается слева, то есть по часовой стрелке.

Еще рассмотрим силовую функцию для области D_n (точнее, ее сужение на ∂D_n), $\tilde{f}_n(\xi)$. Эта функция определена с точностью до константы (см. раздел 1). Воспользуемся этим, и выберем такую нормировку:

$$\tilde{f}_n(\xi) = i\int_{\xi_0^{(n)}}^{\xi} (\tilde{F}_x^{(n)} + i\tilde{F}_y^{(n)})ds + C_n$$

где $\xi_0^{(n)}$ – та же точка на контуре ∂D_n, что и раньше; C_n – та же, зависящая от $\xi_0^{(n)}$ константа; $\tilde{F}_x^{(n)}$ и $\tilde{F}_y^{(n)}$ – компоненты вектора напряжений, действующих со стороны области D. Интегрирование идет в положительном направлении по отношению к области D_n, т.е. против часовой стрелки. Но по третьему закону Ньютона, $\tilde{F}_x^{(n)} = -F_x^{(n)}$, $\tilde{F}_y^{(n)} = -F_y^{(n)}$. Следовательно,

$$\tilde{f}_n(\xi) = f_n(\xi)$$

поэтому граничные значения потенциалов $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ мы можем подчинить условию:

$$\varphi_n(\xi) + \xi\overline{\varphi_n'(\xi)} + \overline{\psi_n(\xi)} = f_n(\xi), \quad \xi \in \partial D_n \tag{3.5}$$

Исключив $f_n(\xi)$ из (3.4) и (3.5), получим N граничных условий для функций $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$; …, $\varphi_N(z)$, $\psi_N(z)$; $\Phi(z)$, $\Psi(z)$:

$$\begin{gathered}\varphi_n(\xi) + \xi\overline{\varphi_n'(\xi)} + \overline{\psi_n(\xi)} - 2\Gamma_1\xi - \overline{\Gamma}_2\overline{\xi} = \\ = \Phi(\xi) + \xi\overline{\Phi'(\xi)} + \overline{\Psi(\xi)}, \quad \xi \in \partial D_n; \quad n = 1, \ldots, N\end{gathered} \tag{3.6}$$

Еще N условий даст непрерывность смещений, ее мы пока не учитывали. Напомним, что мы считали заданным поле напряжений в D, т.е. потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. С этой точки зрения, (3.6) — граничное условие первой основной задачи (см. пред. раздел), оставляющее произвол в выборе нормировок: $\varphi_n(z)$ можно заменить на $\varphi_n(z) + i\alpha_n z + \beta_n$, а $\psi_n(z)$ — на $\psi_n(z) - \overline{\beta_n}$. Здесь α_n — произвольная действительная, β_n — любая комплексная константа. Условия на смещения, как мы увидим, определят “естественную” нормировку для $\varphi_n(z)$. Тогда и нормировка $\psi_n(z)$ определится однозначно.

Пусть $u(z)$ — горизонтальная, $v(z)$ — вертикальная компонента смещений в D, $u_n(z)$, $v_n(z)$ — горизонтальная и вертикальная компонента смещений в D_n. При переходе через границу включения компоненты смещения изменяются непрерывно. Следовательно,

$$u(\xi) + iv(\xi) = u_n(\xi) + iv_n(\xi), \quad \xi \in \partial D_n \tag{3.7}$$

Согласно формуле Колосова (2.8),

$$\begin{gathered}u(\xi) + iv(\xi) = \frac{(\varkappa + 1)\varphi(\xi) - f_n(\xi)}{2\mu} + i\eta\xi + \delta, \\ u_n(\xi) + iv_n(\xi) = \frac{(\varkappa_n + 1)\varphi_n(\xi) - f_n(\xi)}{2\mu} + i\eta_n\xi + \delta_n; \quad \xi \in \partial D_n\end{gathered} \tag{3.8}$$

Здесь $\varkappa$ и $\varkappa_n$ — коэффициенты, характеризующие упругие свойства матрицы D и включения D_n:

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \varkappa_n = \frac{\lambda_n + 3\mu}{\lambda_n + \mu}$$

Мы учли, что модуль сдвига всюду один и тот же и что формула (2.8) определяет смещения с точностью до слагаемого вида (2.9). В силу (3.7) и (3.8),

$$(\varkappa_n + 1)\varphi_n(\xi) = (\varkappa + 1)\varphi(\xi) + 2\mu\left(i(\eta - \eta_n)\xi + (\delta - \delta_n)\right), \quad \xi \in \partial D_n; \quad n = 1, \ldots, N \tag{3.9}$$

Варьируя нормировку φ_n, мы можем добиться того, что второе слагаемое в правой части (3.9) исчезнет. Это и есть та естественная нормировка, о которой говорилось выше. С учетом (3.1), будем иметь:

$$(\varkappa_n + 1)\varphi_n(\xi) - (\varkappa + 1)\Gamma_1\xi = (\varkappa + 1)\Phi(\xi), \quad \xi \in \partial D_n; \quad n = 1, \ldots, N \tag{3.10}$$

Равенства (3.6) и (3.10) составляют полную систему граничных условий. Задача теории упругости будет решена, если мы найдем функции, голоморфные в D_n, где $n = 1, \ldots, N$, а также функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, регулярные в D, которые этим условиям удовлетворяют. Ниже будет показано, что такие функции определяются однозначно.

4. Решение в квадратурах и его свойства. Начнем с анализа соотношений (3.10): рассмотрим вспомогательную функцию $\chi(z)$

$$\chi(z) = \begin{cases}(\varkappa + 1)\Phi(z), & z \in D \\ (\varkappa_n + 1)\varphi_n(z) - (\varkappa + 1)\Gamma_1 z, & z \in D_n\end{cases}$$

В силу (3.10), она голоморфна на $D \cup D_1 \cup \ldots \cup D_N$, т.е. на всей плоскости D_0. Следовательно, $\chi(z) = \text{const}$. А поскольку на бесконечности эта функция равна нулю (в силу того, что $\Phi(\infty) = 0$), она равна нулю везде. Отсюда,

$$\Phi(z) = 0, \quad z \in D; \quad \varphi_n(z) = \frac{(\varkappa + 1)\Gamma_1}{\varkappa_n + 1} z, \quad z \in D_n \tag{4.1}$$

Далее: подставим (4.1) в (3.6). После элементарных преобразований получим:

$$\psi_n(\xi) - \Gamma_2\xi + \frac{2(\varkappa - \varkappa_n)\Gamma_1}{\varkappa_n + 1}\bar{\xi} = \Psi(\xi), \quad \xi \in \partial D_n; \quad n = 1, \ldots, N \tag{4.2}$$

Введем в рассмотрение еще одну вспомогательную кусочно-голоморфную функцию $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \begin{cases}\Psi(z), & z \in D \\ \psi_n(z) - \Gamma_2 z, & z \in D_n\end{cases} \tag{4.3}$$

Обозначим через ∂D границу области D:

$$\partial D = \bigcup_{n=1}^{N} \partial D_n$$

Пусть $\omega_+(\xi)$ и $\omega_-(\xi)$ – предельные значения функции $\omega(z)$ при стремлении к точке $\xi \in \partial D$ слева и справа (то есть, изнутри или снаружи одного из контуров ∂D_n) соответственно. Из (4.3) и (4.2) следует формула для скачка $\omega_+(\xi) - \omega_-(\xi)$:

$$\omega_+(\xi) - \omega_-(\xi) = \frac{2(\varkappa_n - \varkappa)\Gamma_1}{\varkappa_n + 1}\bar{\xi}, \quad \xi \in \partial D_n$$

Поскольку значение функции $\omega(z)$ в бесконечно удаленной точке задано (а именно, $\omega(\infty) = 0$, так как $\Psi(\infty) = 0$), эта функция определяется однозначно. По общим правилам, она равна сумме интегралов типа Коши:

$$\omega(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(\varkappa_n - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_n + 1)\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z} \tag{4.4}$$

Из (4.4) и (4.3) следуют формулы для $\Psi(z)$ и $\psi_n(z)$, $n = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \sum_{m=1}^{N} \frac{(\varkappa_m - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_m + 1)\pi i} \int_{\partial D_m} \frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z}, \quad z \in D \\ \psi_n(z) &= \sum_{m=1}^{N} \frac{(\varkappa_m - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_m + 1)\pi i} \int_{\partial D_m} \frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z} + \Gamma_2 z, \quad z \in D_n\end{aligned} \tag{4.5}$$

Эти формулы вместе с (4.1) решают задачу (3.6), (3.10). Если $N = 1$ (включение одно), то

$$\begin{aligned}&\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = \frac{(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_1 + 1)\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z}, \quad z \in D \\ &\varphi_1(z) = \frac{(\varkappa + 1)\Gamma_1}{\varkappa_1 + 1} z, \quad \psi_1(z) = \frac{(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_1 + 1)\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z} + \Gamma_2 z, \quad z \in D_1\end{aligned} \tag{4.6}$$

Ниже полученные результаты (формулы (4.1) и (4.5)) будут проанализированы.

Начнем с рассмотрения тривиального случая, когда на бесконечности задан чистый сдвиг, то есть $\Gamma_1 = 0$. Из (4.1) и (4.5) имеем:

$$\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = 0, \quad z \in D; \quad \varphi_n(z) = 0, \quad \psi_n(z) = \Gamma_2 z, \quad z \in D_n \tag{4.7}$$

Элементарно проверяется, что (4.7) – это, действительно, решение задачи (3.6), (3.10), если $\Gamma_1 = 0$. Из (4.7) следует, что тензор напряжений всюду будет таким же, как на бесконечности. Его компоненты, в силу (2.3),

$$\sigma_{xx} = -\operatorname{Re}\Gamma_2, \quad \sigma_{xy} = \operatorname{Im}\Gamma_2, \quad \sigma_{yy} = \operatorname{Re}\Gamma_2$$

Теперь, в предположении $\Gamma_1 \neq 0$, исследуем формулы (4.1) и (4.5) “на регулярность”. Величина $\bar{\xi}$, если ее рассматривать как функцию точки, принадлежащей границе включения, удовлетворяет условию Гельдера. Поэтому определяемые посредством (4.5) функции $\psi_n(z)$ и $\Psi(z)$ ограничены. Ограничены также функции $\varphi_n(z)$, линейные по z; а функция $\Phi(z)$ просто равна нулю.

Но напряжения определяются производными потенциалов Колосова. Первые две производные φ_n и φ ограничены: в силу (4.1),

$$\varphi'_n(z) = \frac{(\kappa+1)\Gamma_1}{\kappa_n+1}, \quad \varphi''_n(z) = 0 \quad z \in D_n$$

$$\varphi'(z) = \Gamma_1; \quad \varphi''(z) = 0; \quad z \in D$$

Здесь учтено, что $\varphi(z) = \Gamma_1 z + \Phi(z)$. Для того чтобы прояснить ситуацию с $\psi'_n(z)$ и $\Psi'(z)$, рассмотрим интеграл типа Коши от $\bar{\xi}$ по кусочно-гладкому контуру ∂D_n, границе одной из областей D_n. Обозначим этот интеграл через I:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n}\frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z} \tag{4.8}$$

Вычислим производную $I'(z)$, и применим к ней интегрирование по частям:

$$I'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n}\frac{\bar{\xi}d\xi}{(\xi - z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n}\frac{\partial\bar{\xi}/\partial\xi}{\xi - z}d\xi$$

Проинтегрированный член исчезает, поскольку функция $\bar{\xi}(\xi)$ непрерывна. Производную $\bar{\xi}$ по ξ следует понимать как отношение:

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\xi} = \frac{d\bar{\xi}}{ds}\Big/\frac{d\xi}{ds}$$

где s – длина дуги, отсчитываемая в положительном направлении от произвольной точки $a_0 \in \partial D_n$. Очевидно,

$$\frac{d\xi}{ds} = \exp(i\theta), \quad \frac{d\bar{\xi}}{ds} = \overline{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)} = \exp(-i\theta)$$

где $\theta(\xi)$ – угол между касательной l, инцидентной точке $\xi \in \partial D_n$, и положительным направлением действительной оси, см. рис. 1.

Следовательно,

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\xi} = \exp(-2i\theta)$$

и

$$I'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_n}\frac{\exp(-2i\theta)}{\xi - z}d\xi$$

По предположению, контур ∂D_n состоит из дуг Ляпунова, – дуг, во внутренних точках которых угол θ – непрерывная функция ξ, удовлетворяющая, к тому же, условию Гельдера H. Классу H, очевидно, принадлежит и экспонента $\exp(-2i\theta)$, поэтому вблизи неугловых точек ∂D_n функция $I'(z)$ ограничена.

Выясним, что происходит вблизи угловых точек, где функция $\theta(\xi)$ претерпевает разрыв. При этом мы воспользуемся одной важной теоремой из [17]. В упрощенном варианте она формулируется следующим образом: пусть $L_1, L_2, \ldots, L_K$ – гладкие дуги, инцидентные точке a; на каждой из дуг L_k задана своя функция $q_k(\xi)$, принадлежащая классу H, и направление интегрирования. Обозначим через $Q(z)$ сумму интегралов типа Коши:

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{q_1(\xi)d\xi}{\xi - z} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_K}\frac{q_K(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

Тогда в достаточно малой окрестности точки a

$$Q(z) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} \pm q_k(a)}{2\pi i}\ln|z - a| + O(1) \tag{4.9}$$

Знак "+" перед слагаемым $q_k(a)$ выбирается, если интегрирование по L_k идет по направлению *к* точке a, знак "–" – если в противоположном направлении.

Применим эту теорему к нашему случаю. Пусть a – угловая точка контура ∂D_n; она инцидентна двум дугам (т.е. $K = 2$). На этих дугах задана функция $\exp(-2i\theta)$, принадлежащая классу H. Задано и направление интегрирования (против часовой стрелки). Пусть L_1 – дуга, которая заканчивается точкой a, L_2 – дуга, которая с нее начинается. Таким образом, $q_1(\xi) = \exp(-2i\theta(\xi))$, $\xi \in L_1$; $q_2(\xi) = \exp(-2i\theta(\xi))$, $\xi \in L_2$, а $q_1(a)$ и $q_2(a)$ – предельные значения $q_1(\xi)$ и $q_2(\xi)$ при $\xi \to a$.

Пусть θ_a^+ и θ_a^- – предельные значения угла θ, см. рис. 2:

$$\theta_a^+ = \lim_{\xi \to a, \xi \in L_1}\theta(\xi), \quad \theta_a^- = \lim_{\xi \to a, \xi \in L_2}\theta(\xi)$$

(пределы односторонние). Тогда

$$q_1(a) = \exp(-2i\theta_a^+), \quad q_2(a) = \exp(-2i\theta_a^-)$$

В силу (4.9) и следующего за (4.9) замечания относительно выбора знаков,

$$I'(z) = \frac{\exp(-2i\theta_a^+) - \exp(-2i\theta_a^-)}{2\pi i}\ln|a - z| + O(1), \quad z \to a \tag{4.10}$$

Притом неважно, слева или справа (изнутри или извне контура ∂D_n) приближаемся мы к угловой точке. Поэтому для $\psi_n'(z)$ и $\Psi'(z)$ мы имеем одну асимптотику: при $z \to a$

$$\psi_n'(z), \Psi'(z) = \frac{(\varkappa_n - \varkappa)\Gamma_1}{\pi i(\varkappa_n + 1)}(\exp(-2i\theta_a^+) - \exp(-2i\theta_a^-))\ln|a - z| + O(1) \tag{4.11}$$

Заметим, что (4.11) – асимптотика еще и для $\psi'(z)$, так как $\psi'(z) = \Psi'(z) + \Gamma_2$. Итак, производные второго потенциала Колосова при приближении к угловым точкам границы стремятся к бесконечности по логарифмическому закону (исключение составляет

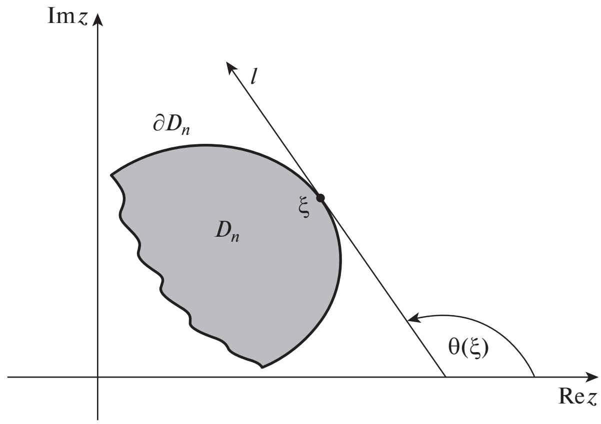

Рис. 1. К определению угла $\theta(\xi)$.

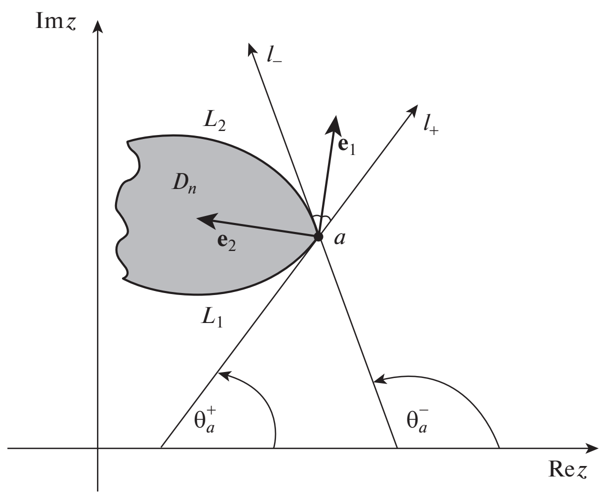

Рис. 2. Предельные углы θ_a^+ и θ_a^-, и предельное положение главных осей тензора напряжения (a – угловая точка).

случай $\Gamma_1 = 0$, – он был рассмотрен выше). Но след тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ – величина ограниченная: по первой из формул (4.1), след равен $4\Gamma_1$ в D и $4\Gamma_1(\varkappa + 1)/(\varkappa_n + 1)$ в $-D_n$. Учитывая это и пользуясь (4.11), находим с помощью (2.3) асимптотику для компонент $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\Gamma_1(\varkappa_n - \varkappa)\ln|a - z|}{\pi(\varkappa_n + 1)}\begin{pmatrix} \sin 2\theta_a^+ - \sin 2\theta_a^- & \cos 2\theta_a^- - \cos 2\theta_a^+ \\ \cos 2\theta_a^- - \cos 2\theta_a^+ & \sin 2\theta_a^- - \sin 2\theta_a^+ \end{pmatrix} + \mathbf{O}(1) \tag{4.12}$$

Здесь $\mathbf{O}(1)$ – симметричная матрица, компоненты которой при $z \to a$ остаются конечными. Напряженное состояние вблизи угловой точки определяется, в основном, первым слагаемым в правой части (4.12) и представляет собой практически чистый сдвиг. Собственные значения $\boldsymbol{\sigma}$ (главные напряжения):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2\Gamma_1(\varkappa_n - \varkappa)\ln|a-z|}{\pi(\varkappa_n+1)}\sin(\theta_a^+ - \theta_a^-) + O(1) \\ \sigma_2 &= -\frac{2\Gamma_1(\varkappa_n - \varkappa)\ln|a-z|}{\pi(\varkappa_n+1)}\sin(\theta_a^+ - \theta_a^-) + O(1) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Главные оси тензора напряжений в пределе при $z \to a$ коллинеарны векторам $\mathbf{e}_1 = \left(\cos\frac{\theta_a^+ + \theta_a^-}{2}, \sin\frac{\theta_a^+ + \theta_a^-}{2}\right)$ и $\mathbf{e}_2 = \left(\sin\frac{\theta_a^+ + \theta_a^-}{2}, -\cos\frac{\theta_a^+ + \theta_a^-}{2}\right)$ — собственным векторам матрицы

$$\begin{pmatrix} \sin 2\theta_a^+ - \sin 2\theta_a^- & \cos 2\theta_a^- - \cos 2\theta_a^+ \\ \cos 2\theta_a^- - \cos 2\theta_a^+ & \sin 2\theta_a^- - \sin 2\theta_a^+ \end{pmatrix}$$

Вектор $\mathbf{e_1}$ отвечает собственному числу σ_1, и, очевидно, коллинеарен биссектрисе угла между предельными касательными l_+ и l_-; рис. 2. Вектор $\mathbf{e}_2$ ему ортогонален.

Итак, независимо от условий на бесконечности, предельное положение одной из главных осей тензора напряжений — это биссектриса угла, который образован касательными, инцидентными угловой точке.

Замечание 1. Если a — не просто угловая точка, а точка заострения:

$$\theta_a^- = \theta_a^+ \pm \pi$$

то, согласно (4.12), напряжения в окрестности a ограничены. Этот результат согласуется со следующим фактом (и является, в некотором смысле, его обобщением): пусть включение D_n — трещина (то есть, бесконечно узкая щель) произвольной конфигурации. Тогда, очевидно,

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n} \frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z} = 0, \qquad z \notin D_n$$

и производная I' этого интеграла — тоже 0. Иными словами, трещину, заполненную материалом с “общим” модулем сдвига, поле напряжений во внешней области “не замечает”. Поэтому в окрестности трещины, а значит, и вблизи точки заострения — ее устья напряжения будут конечными.

5. Примеры. *5.1. Эллиптическое включение.* Полное решение задачи теории упругости для изотропного эллиптического включения дано в [5]. Здесь мы только убедимся в том, что формулы (4.6) дают правильный ответ для случая, когда модули сдвига включения и плоскости совпадают.

Итак, единственное включение занимает область D_1, граница которой ∂D_1 — эллипс. Будем считать, что сумма полуосей эллипса равна 2: большая полуось равна $1+\beta$, малая — $1-\beta$, где $\beta \in (0,1)$; центр совпадает с началом координат; большая полуось ориентирована вдоль действительной оси. Константа Колосова, характеризующая свойства включения, равна $\varkappa_1$; константа Колосова для области D (т.е. для плоскости с исключенным из нее эллипсом) равна $\varkappa$. Это соответствует обозначениям, принятым в разделах 2 и 3.

Искомые потенциалы Колосова: в области D_1 — $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, в D — $\varphi(z) = \Gamma_1 z + \Phi(z)$ и $\psi(z) = \Gamma_2 z + \Psi(z)$, где $\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0$. Граничные условия, которым эти функции удовлетворяют — частный случай (3.6) и (3.10) при $N = 1$:

$$\varphi_1(\xi) + \xi\overline{\varphi_1'(\xi)} + \overline{\psi_1(\xi)} - 2\Gamma_1\xi - \overline{\Gamma_2}\overline{\xi} = \Phi(\xi) + \xi\overline{\Phi'(\xi)} + \overline{\Psi(\xi)},$$
$$(\varkappa_1 + 1)\varphi_1(\xi) - (\varkappa + 1)\Gamma_1\xi = (\varkappa + 1)\Phi(\xi), \quad \xi \in \partial D_1 \tag{5.1}$$

Функции $\Phi(z)$ и $\varphi_1(z)$ находятся просто: из (4.6),

$$\Phi(z) = 0, \quad \varphi_1(z) = \frac{(\varkappa + 1)\Gamma_1}{\varkappa_1 + 1} z \tag{5.2}$$

Для того, чтобы найти с помощью (4.6) функции $\psi_1(z)$ и $\Psi(z)$, мы должны вычислить интеграл по эллипсу ∂D_1

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1} \frac{\overline{\xi}d\xi}{\xi - z} \tag{5.3}$$

Произведем замену: $\xi = \varepsilon + \dfrac{\beta}{\varepsilon}$; тогда (5.3) сведется к интегралу по окружности $|\varepsilon| = 1$:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\varepsilon|=1} \frac{(\beta\varepsilon^2 + 1)(\varepsilon^2 - \beta)d\varepsilon}{\varepsilon^2(\varepsilon^2 - z\varepsilon + \beta)} \tag{5.4}$$

Здесь учтено, что $d\xi = (1 - \beta/\varepsilon^2)d\varepsilon$ и $\overline{\varepsilon} = 1/\varepsilon$. Особые точки подынтегральной функции: начало координат и два (в общем случае) корня уравнения

$$\varepsilon^2 - z\varepsilon + \beta = 0$$

Обозначим через ε_1 корень, наименьший по абсолютной величине. Поскольку $|\beta| < 1$, при любом z он находится внутри единичной окружности. Второй корень, $\varepsilon_2 = \beta/\varepsilon_1$, находится внутри этой окружности, если $z \in D_1$, и вне ее, если $z \notin D_1$. В последнем случае можем написать:

$$\varepsilon_1(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4\beta}}{2} \tag{5.5}$$

Здесь имеется в виду ветвь квадратного корня, для которой

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\sqrt{z^2 - 4\beta}}{z} = 1$$

Вне эллипса $\varepsilon_1(z)$ — однозначная функция. Действительно, точки ветвления функции $\sqrt{z^2 - 4\beta}$ — это фокусы эллипса. При обходе контура, охватывающего оба фокуса, а тем более весь эллипс, квадратный корень не испытывает приращения.

Теперь вычислить интеграл (5.4) (используя теорию вычетов), не составляет труда:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varepsilon|=1} \frac{(\beta\varepsilon^2 + 1)(\varepsilon^2 - \beta)d\varepsilon}{\varepsilon^2(\varepsilon^2 - z\varepsilon + \beta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1} \frac{\overline{\xi}d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} \beta z, & z \in D_1 \\ (\beta - 1/\beta)\varepsilon_1(z), & z \in D \end{cases} \tag{5.6}$$

Легко проверить, что в соответствии с теоремой Племеля,

$$\beta z - \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\varepsilon_1(z) = \overline{z}, \quad z \in \partial D_1 \tag{5.7}$$

Подставляя (5.6) в (4.6), получаем формулы для $\Psi(z)$ и $\psi_1(z)$:

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{2(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{\varkappa_1 + 1}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\varepsilon_1(z), \quad z \in D \\ \psi_1(z) &= \left(\frac{2\beta(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{\varkappa_1 + 1} + \Gamma_2\right)z, \quad z \in D_1\end{aligned} \tag{5.8}$$

где $\varepsilon_1(z)$ вычисляется по формуле (5.5). Формулы (5.2) и (5.8) решают краевую задачу (5.1): то, что удовлетворяется второе граничное условие (5.1), очевидно. С помощью (5.7) можно убедиться в том, что первое граничное условие (5.1) тоже выполнено.

Обратим внимание на тот факт, что функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ линейны по z. Так и должно быть: это значит, что напряженное состояние внутри эллиптического включения однородно.

Заметим также, что при $\beta = 1$ (когда эллиптическое включение вырождается в прямолинейную щель), из (5.8) имеем:

$$\Psi(z) = 0$$

т.е. поле напряжений во внешней области тоже будет однородным, таким же, каким оно было бы в отсутствие включения. Это – частный случай ситуации, рассмотренной в конце предыдущего раздела, см. Замечание 1.

5.2. *Набор из N кругов*. Пусть области D_n, $n = 1, \ldots, N$ – попарно не пересекающиеся круги. Центр круга D_n находится в точке z_n, радиус равен r_n. Требуется решить краевую задачу (3.6), (3.10).

Ответ для функций $\Phi(z)$ и $\varphi_n(z)$ готов – это формулы (4.1). Для того, чтобы найти, пользуясь (4.5), функции $\Psi(z)$ и $\psi_n(z)$, необходимо вычислить интеграл (4.8) по каждой окружности. Это нетрудно:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n}\frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z} = \begin{cases}\bar{z}_n, & z \in D_n \\ \dfrac{r_n^2}{z_n - z}, & z \notin D_n\end{cases} \tag{5.9}$$

Подставляем (5.9) в (4.5):

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= 2\Gamma_1\sum_{m=1}^{N}\frac{(\varkappa_m - \varkappa)}{(\varkappa_m + 1)}\frac{r_m^2}{z_m - z}, \quad z \in D \\ \psi_n(z) &= \frac{2\Gamma_1(\varkappa_n - \varkappa)\bar{z}_n}{(\varkappa_n + 1)} + 2\Gamma_1\sum_{m=1, m\neq n}^{N}\frac{(\varkappa_m - \varkappa)}{(\varkappa_m + 1)}\frac{r_m^2}{z_m - z} + \Gamma_2 z, \quad z \in D_n\end{aligned} \tag{5.10}$$

Формулы (4.1) и (5.10) решают краевую задачу (3.6), (3.10). Это легко проверить непосредственной подстановкой, если учесть, что поскольку ∂D_n – окружность радиуса r_n, а z_n – ее центр,

$$\frac{r_n^2}{\bar{z}_n - \bar{\xi}} = z_n - \xi, \quad \xi \in \partial D_n$$

5.2. *Полукруг*. Пусть включение снова одно, и это – полукруг D_1 (рис. 3.), ограниченный дугой C – верхней полуокружностью единичной окружности и отрезком действительной оси $[-1, 1]$:

$$\partial D_1 = C \cup [-1, 1]$$

Требуется решить задачу (5.1).

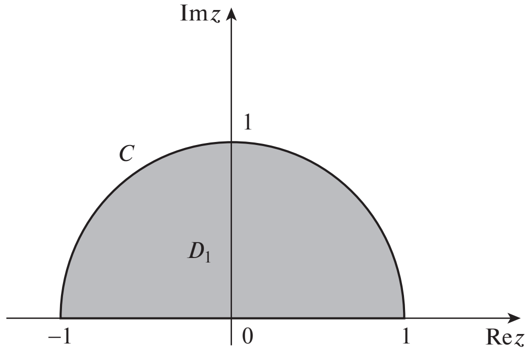

Рис. 3. Включение – полукруг.

Функции $\Phi(z)$ и $\varphi_1(z)$ определяются, как и в случае эллиптического включения, формулами (5.2). Для того, чтобы найти с помощью (4.6) функции $\psi_1(z)$ и $\Psi(z)$, мы должны взять интеграл по границе полукруга:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1}\frac{\bar{\xi}d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\xi}{\xi(\xi - z)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{[-1,1]}\frac{\xi d\xi}{\xi - z} \tag{5.11}$$

Переходя от средней части (5.11) к правой, мы учли, что $\bar{\xi} = 1/\xi$, если $\xi \in C$; и $\bar{\xi} = \xi$, если $\xi \in [-1, 1]$. Дальнейшие вычисления интереса не представляют, – они основаны на элементарной теории вычетов. Приведем ответ:

$$I = \frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z}\ln\frac{z - 1}{z + 1} + \begin{cases} 1/(2z), & z \in D_1 \\ -1/(2z), & z \in D \end{cases} \tag{5.12}$$

Под ln(...) в правой части (5.12) можно понимать, например, ветвь логарифма: $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, где $\arg z \in (-\pi, \pi)$.

Пусть $I_+(z)$, $I_-(z)$ – сужение функции $I(z)$ соответственно на D_1 и D:

$$\begin{aligned} I_+ &= \frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z}\ln\frac{z - 1}{z + 1} + \frac{1}{2z}, \quad z \in D_1 \\ I_- &= \frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z}\ln\frac{z - 1}{z + 1} - \frac{1}{2z} \quad z \in D \end{aligned} \tag{5.13}$$

Заметим, что $I_+(z)$ и $I_-(z)$ – однозначные функции, каждая в своей области определения. Действительно: внутри контура, расположенного в D_1, не содержится ни одной из двух точек ветвления логарифма ($z = \pm 1$); внутри контура, расположенного в D, лежат обе эти точки, поэтому в обоих случаях аргумент комплексной величины $(z - 1)/(z + 1)$ при обходе по контуру не изменяется. Важно, что при $z \to 0$

$$\lim_{z\to 0, z\in D_1} I_+(z) = \lim_{z\to 0, z\in D} I_-(0) = \frac{1}{\pi i}$$

При $z \to \pm 1$:

$$\lim_{z\to \pm 1, z\in D_1} I_+(z) = \frac{1}{\pi i} \pm \frac{1}{2}, \quad \lim_{z\to \pm 1, z\in D} I_-(z) = \frac{1}{\pi i} \mp \frac{1}{2} \tag{5.14}$$

Легко проверить, что согласно теореме Племеля,

$$I_+(z) - I_-(z) = \bar{z}, \quad z \in \partial D_1 \tag{5.15}$$

Далее: вычислим производные $I'_+(z)$ и $I'_-(z)$. Дифференцирование (5.13) дает:

$$\begin{aligned} I'_+(z) &= \frac{z^2+1}{2\pi i z^2}\ln\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{\pi i z} - \frac{1}{2z^2} \\ I'_-(z) &= \frac{z^2+1}{2\pi i z^2}\ln\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{\pi i z} + \frac{1}{2z^2} \end{aligned} \tag{5.16}$$

При стремлении z к любой неугловой точке контура, производные стремятся к конечным пределам. В частности,

$$\lim_{z\to 0} I'_+(z) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{z\to 0} I'_-(z) = -\frac{1}{2}$$

Из (5.16) заключаем, что вблизи угловой точки $z = 1$

$$I'_+(z), I'_-(z) = \frac{1}{\pi i}\ln|z-1| + O(1), \quad z \to 1 \tag{5.17}$$

а окрестности точки $z = -1$,

$$I'_+(z), I'_-(z) = -\frac{1}{\pi i}\ln|z+1| + O(1), \quad z \to -1 \tag{5.18}$$

Итак, при $z \to \pm 1$ производная интеграла (5.11) стремится к бесконечности по логарифмическому закону.

Сравним (5.17) и (5.18) с результатами, которые были получены в разделе 4, а именно – с асимптотикой (4.10). Напомним, что в разделе 4 через θ_a^+ и θ_a^- обозначены углы, которые образуют левая и правая касательные, инцидентные угловой точке a, с действительной осью, см. рис. 2. В данном случае, угловых точек две: 1 и –1. Для первой точки:

$$\theta_{a=1}^+ = 0, \quad \theta_{a=1}^- = \pi/2 \tag{5.19}$$

Подставив значения (5. 19) в (4.10), получим правую часть (5.17). Если же $a = -1$, будем иметь:

$$\theta_{a=-1}^+ = -\pi/2, \quad \theta_{a=-1}^- = 0 \tag{5.20}$$

Подставив (5.20) в (4.10), придем к (5.18). Таким образом, асимптотики (5.17) и (5.18) – это частные случаи (4.10); так и должно быть.

Согласно (4.6),

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{2(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_1 + 1)} I_-(z), \quad z \in D \\ \psi_1(z) &= \frac{2(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_1 + 1)} I_+(z) + \Gamma_2 z, \quad z \in D_1 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Формулы (5.21) и (5.2) дают решение краевой задачи (5.1). То, что функции (5.2) удовлетворяют второму условию (5.1), очевидно. Используя (5.15), убеждаемся в том, что первое граничное условие тоже выполнено. Обратим внимание, что в силу (5.14) функции $\Psi(z)$ и $\psi_1(z)$ вблизи угловых точек ограничены; следовательно, смещения всюду конечны.

Приведем также явные выражения для $\Psi(z)$ и $\psi_1(z)$:

$$\Psi(z) = \frac{2(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z} \ln \frac{z-1}{z+1} - \frac{1}{2z} \right), \quad z \in D$$
$$\psi_1(z) = \frac{2(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{2z} \right) + \Gamma_2 z, \quad z \in D_1 \tag{5.22}$$

Формулы (5.22) и (5.2) позволяют найти компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ во всей плоскости. Но мы ограничимся асимптотиками при $z \to \pm 1$, которые проще всего получить из общей формулы (4.12):

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{2\Gamma_1(\varkappa_1 - \varkappa)\ln|z-1|}{\pi(\varkappa_1 + 1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{O}(1), \quad z \to 1$$

и

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\Gamma_1(\varkappa_1 - \varkappa)\ln|z+1|}{\pi(\varkappa_1 + 1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{O}(1), \quad z \to -1$$

Здесь $\mathbf{O}(1)$ — ограниченная симметричная матрица. Главные напряжения σ_1 и σ_2 вблизи угловых точек, согласно (4.13),

$$\sigma_1, \sigma_2 \approx \pm \frac{2\Gamma_1(\varkappa_1 - \varkappa)\ln|z-a|}{\pi(\varkappa_1 + 1)}$$

где $a = \pm 1$.

6. Сводка результатов. В статье рассмотрена двумерная задача теории упругости для плоскости с одним или несколькими включениями, модули сдвига которых совпадают с модулями сдвига плоскости. Никаких ограничений на модули сжатия нет. Границы включений предполагаются кусочно-гладкими, состоящими из конечного числа дуг Ляпунова. Условия на бесконечности задаются в терминах напряжений. Использован метод Колосова—Мусхелишвили. Основные результаты:

1. Для потенциалов Колосова получено общее решение в квадратурах.

2. Показано, что вблизи угловых точек границы включения напряженное состояние представляет собой практически чистый сдвиг и что напряжения растут по логарифмическому закону. Получены соответствующие асимптотики. Найдено предельное положение главных осей тензора напряжений. Показано, что оно определяется локальной геометрией границы и не зависит от условий на бесконечности.

3. Показано, что вблизи точек заострения напряжения остаются ограниченными и что трещина (бесконечно узкая щель), заполненная материалом с “общим” модулем сдвига, не влияет на поле напряжений во внешней области.

4. Вычислены потенциалы Колосова для нескольких конкретных случаев: когда включение представляет собой эллипс; полукруг; а также когда включений несколько, и это — круги разных радиусов с разными модулями сжатия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eshelby J.D.* Elastic inclusions and inhomogeneities. In *I. N. Sneddon, & R. Hill* (Eds.), Progress in solid mechanics (Vol. 2, Chap. III). Amsterdam: North-Holland, 1961, pp. 89–140.
2. *Кузьмин Ю.О.* Индуцированные деформации разломных зон // Физика Земли. 2019. № 5. С. 61–75.
3. *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ, 1935. 224 с.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Hardiman N.I.* Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1954. V. 7. Part 2. P. 226–230.

6. *Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И.* Интегральные уравнения задачи об упругом включении. Полное аналитическое решение задачи об эллиптическом включении // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 50–76.
7. *Добровольский И.П.* Задача о включении // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 5. С. 89–97.
8. *Sendeckyj G.P.* Elastic inclusion problem in plane elastostatics // Int. J. Solids Structures. 1970. V. 6. P. 1535–1543
9. *Sherman D.I.* On the Problem of plane strain in nonhomogeneous media. Symposium held in Warsaw. Pergamon Press, 1958.
10. *Цуркис И.Я.* О решении одной нерегулярной системы линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. № 9. 1992. С. 1361–1378.
11. *Theocaris P.S., Ioakimidis N.I.* The inclusion problem in plane elasticity// Q. J. of Mech. and Appl. Math. 1977. V. 30. № 4. P. 437–448.
12. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: ЛЕНАНД, 2014. 376 с.
13. *Шерман Д.И.* Об одной задаче теории упругости // Докл. АН СССР. Т. XXVII. № 9. 1940. С. 907–910.
14. *Ru C.Q.* Analytic Solution for Eshelby's Problem of an Inclusion of Arbitrary Shape in a Plane or Half-Plane // J. of Appl. Mech. 1999. V. 66. P. 315–322.
15. *List R.D., Silberstein J.P.O.* Two-dimensional elastic inclusion problems // Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1966. V. 62. P. 303–311.
16. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
17. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.