

УДК 539.3

## МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ВЫРЕЗАМИ

© 2022 г. В. Н. Бакулин<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> *Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: vbak@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.03.2021 г.

После доработки 22.03.2021 г.

Принята к публикации 29.03.2021 г.

Рассматривается построение модели для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек вращения с прямоугольными вырезами. Провести послойный анализ для оболочек с прямоугольными вырезами аналитическими методами, как правило, не удастся из-за математических трудностей, поэтому применяется конечно-элементный подход. Модели послойного анализа отличаются большой размерностью, а наличие вырезов приводит к необходимости измельчения сетки разбиений, что еще более увеличивает размерность задачи, для уменьшения которой применены эффективные функции аппроксимаций деформаций и перемещений внутри конечных элементов. Рассмотренная модель позволяет учесть особенности слоисто-неоднородного строения, а также наличие вырезов. В качестве примера проведено исследование напряженно-деформированного состояния в слоях трехслойных цилиндрических оболочек вращения с прямоугольными вырезами.

*Ключевые слова:* трехслойные цилиндрические оболочки вращения, прямоугольные вырезы, напряженно-деформированное состояние, послойный подход, конечно-элементные модели, аппроксимирующие функции обобщенных деформаций и перемещений

DOI: 10.31857/S0572329922010032

**1. Введение.** Актуальность темы в теоретическом плане связана с недостаточной исследованностью проблемы анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных цилиндрических оболочек с учетом неоднородности структуры при наличии вырезов. Интерес с практической точки зрения объясняется увеличивающимся распространением в современной ракетной, авиакосмической, судостроительной, строительной и других отраслях указанных элементов конструкций трехслойных оболочек, отличающихся высокими показателями весовой эффективности, удельной жесткости и прочности, несущей способности и многих других важных характеристик [1–4].

Недостаточное развитие моделей для уточненного анализа НДС с учетом указанных выше особенностей оказывает сдерживающее влияние на распространение трехслойных оболочек. Поэтому построение адекватных моделей, позволяющих учесть отмеченные особенности является актуальной научной проблемой, имеющей важное прикладное значение.

Теорий расчета напряженно-деформированного состояния неоднородных и трехслойных оболочек достаточно много. Значительно меньше публикаций, в которых разработанные модели позволяют с необходимой точностью и степенью детализации провести расчет НДС трехслойных оболочек с указанными выше особенностями.

В работах [5–8] рассмотрены некоторые последние обзоры расчетных моделей слоисто-неоднородных и в том числе трехслойных оболочек.

С требуемой точностью и степенью детализации провести расчет НДС трехслойных нерегулярных оболочек вращения с указанными выше особенностями позволяет послойный анализ [7, 9–12], при котором в случае необходимости стенка оболочки, в том числе заполнитель, может моделироваться по толщине слоями, стыкуемыми между собой. При этом могут быть разные по сложности модели для расчета слоев с применением аналитических и численных методов в зависимости от условий задач.

Обзоры по расчету оболочек, ослабленных отверстиями, приведены, например, в работах [13–15]. Большая часть работ по исследованию оболочек с вырезами посвящена однородным оболочкам, меньшая часть — оболочкам из композиционных материалов и совсем в небольшом числе работ рассмотрены трехслойные оболочки с вырезами. В значительной части этих работ приведены исследования трехслойных сферических оболочек с круговыми отверстиями. При этом почти отсутствуют результаты расчетов трехслойных оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами [15].

Аналитическими методами решение подобных задач с учетом указанных особенностей для оболочек с прямоугольными вырезами сталкивается с непреодолимыми математическими сложностями. Это приводит к необходимости применять численные методы и особенно метод конечных элементов (МКЭ) [16–18].

Краткий обзор конечно-элементных моделей (КЭМ) для расчета оболочек, включая трехслойные и слоисто-неоднородные оболочки, рассмотрен в статье [7].

Strang G., Fix G.J. отмечали [19] “...конечные элементы стали наиболее употребительным средством вычислительной математики во всем мире, но будет еще лучше, если мы научимся решать те же задачи с меньшими затратами...”.

Похожие мысли высказывал академик И.Ф. Образцов в статье [20] “...основная проблема при рассмотрении сложных конструкций заключается в создании эффективных математических моделей исследуемых систем, которые не только обеспечивают выполнение заданных требований к информативности и точности исследований, но и одновременно являются экономичными, способствуя, в частности, минимизации затрат машинного времени и памяти ЭВМ...”.

**2. Постановка задачи.** Размерность конечно-элементных моделей оболочек при послойном анализе определяется числом слоев по толщине оболочки, количеством конечных элементов, на которые разбиваются слои, числом степеней свободы конечных элементов. Количество конечных элементов (КЭ), с помощью которых моделируются слои, зависит от эффективности функций формы КЭ, то есть от того, как быстро численные результаты будут приближаться к точным решениям при увеличении числа разбиений на КЭ. При послойном моделировании трехслойных и слоисто-неоднородных нерегулярных оболочек это чрезвычайно важно.

Увеличение размерности модели приводит к росту вычислительных операций, а следовательно к повышению вычислительных погрешностей расчета, увеличению расчетного времени и ужесточению требований к вычислительным ресурсам.

Оптимальным для повышения скорости сходимости численных алгоритмов и получаемых результатов и уменьшения требуемого для решения задач числа КЭ было бы построение функций формы КЭ на основе аналитических решений [21–26]. Такой подход удалось реализовать для круговых слоистых арок [21] и осесимметричных конечных элементов трехслойных и слоистых цилиндрических оболочек [22–26].

Наличие вырезов приводит к необходимости измельчения сеток разбиений, что еще более увеличивает размерность задач, для уменьшения которой применены эффективные функции аппроксимации деформаций в конечных элементах несущих слоев рассматриваемых трехслойных цилиндрических оболочек.

В отличие от работ по моделированию НДС в оболочках конической формы [10, 27–30] и оболочках двойкой кривизны [31–35], в которых используются аппроксимирующие функции перемещений, в данной работе рассмотрим алгоритм построения конечно-элементной модели с применением функций, аппроксимирующих обобщенные деформации, для анализа НДС в несущих слоях трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочках вращения. Рассмотрение алгоритмов построения конечно-элементных моделей несущих слоев и слоя заполнителя проведем на примере конечных элементов естественной кривизны прямоугольной в плане формы, что позволит более просто моделировать НДС в слоях трехслойных цилиндрических оболочек вращения, ослабленных прямыми вырезами.

**3. Алгоритм построения модели для исследования напряженно-деформированного состояния в несущих слоях трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения.** Будем рассматривать несущие слои как тонкие моментные оболочки, к которым применима классическая теория Кирхгофа–Лява, тогда запишем [36]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}, & \gamma &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, & \chi &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $x$  – линейная координата вдоль меридиана на срединной поверхности каждого несущего слоя,  $\varphi$  – угловая координата в плоскости, перпендикулярной оси оболочки,  $R$  – радиус кривизны для каждого из несущих слоев.

Одним из требований к аппроксимирующим функциям конечных элементов для расчета оболочек является учет перемещений как твердых тел [37–40]. Для получения перемещений как твердого тела проинтегрируем (3.1) при нулевых значениях деформаций. При этом появятся шесть констант интегрирования, назовем их неопределенными коэффициентами и обозначим  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ . Они будут задействованы при записи выражений для перемещений как твердого тела.

Рассмотрим конечный элемент несущих слоев трехслойной в общем случае нерегулярной цилиндрической оболочки вращения, полученный сечением оболочки двумя плоскостями, проходящими через ось оболочки, и двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения. За узловые параметры в четырех угловых точках конечного элемента примем три линейных перемещения точек срединной поверхности и два угла поворота нормали к срединной поверхности относительно осей координат в осевом и кольцевом направлениях. Конечный элемент имеет двадцать степеней свободы (по пять степеней свободы в узлах) и следовательно для записи аппроксимирующих функций обобщенных деформаций остается четырнадцать неопределенных коэффициентов (первые шесть неопределенных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  использованы при записи выражений для перемещений как твердого тела).

При выборе полиномов для записи выражений аппроксимирующих функций обобщенных деформаций исходим из предполагаемого характера изменения параметров напряженно–деформированного состояния в несущих слоях трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения. Так как несущие слои считаем тонкими моментными оболочками, то параметры изменения кривизны  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  срединной поверхности, отвечающие за моментное состояние, будем представлять полиномами более высоких порядков по сравнению с другими параметрами вектора обобщенных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, \chi$ .



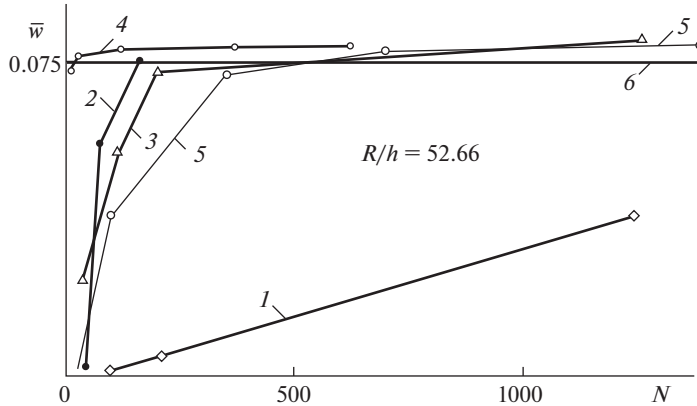


Рис. 1. Зависимости прогиба оболочки от порядка системы уравнений при расчете различными конечными элементами.

фик 4 рис. 1) показана сравнением с известными КЭ и аналитическим решением С.П. Тимошенко [41] (график 6 рис. 1) на примере оболочки при действии самоуравновешенных диаметрально противоположных радиальных сосредоточенных сил  $P$ . Приведены зависимости прогиба  $\bar{w} = -wDl/PR^3$  в точке приложения сил от порядка решаемой системы уравнений  $N$  для распространенных цилиндрических конечных элементов с аппроксимирующими функциями перемещений [42]: КЭ (Cantin G., Glagh R.W. [42]) с 24 степенями свободы с учетом (график 3) и без учета (график 1) перемещений как твердого тела; КЭ (Vogner F.K., Fox R.L. and Schmit L.A. [42]) с 48 степенями свободы (график 2); оболочечный КЭ нулевой кривизны с 20 степенями свободы [10, 27] (график 5). Из-за симметрии рассматривалась восьмая часть цилиндрической оболочки. Из сравнения видно, что практически точное значение достигается при  $N = 20$  для конечного элемента с аппроксимирующими функциями деформаций (то есть при моделировании рассматриваемого сегмента одним КЭ с 20 степенями свободы), при  $\sim N = 140$  для КЭ с аппроксимирующими функциями перемещений (АФП) с 48 степенями свободы, при  $\sim N = 200$  для КЭ с АФП и 24 степенями свободы и при  $\sim N = 333$  для оболочечного КЭ нулевой кривизны с 20 степенями свободы. Следует отметить, что решение С.П. Тимошенко [41] получено для нерастяжимой срединной поверхности, поэтому оно находится ниже точного значения, к которому сходятся конечно-элементные решения.

Были проведены также и другие сравнения с большим числом различных КЭ. Эти сопоставления подтвердили эффективность рассмотренного подхода и приведенной модели, а также высокую скорость сходимости полученных с помощью этой модели решений, что позволило, как показали сравнения, значительно уменьшить необходимое для расчета число КЭ. Для приведенного здесь примера (рис. 1) уменьшение порядка решаемой системы уравнений  $N$  для конечного элемента с аппроксимирующими функциями деформаций произошло в  $\sim 7-17$  раз соответственно в сравнении с рассмотренными конечными элементами с аппроксимирующими функциями перемещений.

Достоверность и эффективность приведенной модели конечного элемента несущих слоев показана и на примерах исследования НДС цилиндрических, в том числе ортотропных композитных оболочек, ослабленных прямоугольными отверстиями [43, 44].

**5. Алгоритм построения трехмерной модели для исследования напряженно-деформированного состояния в слое заполнителя трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения.** Подход при построении модели трехмерного оболочечного конечного элемента для исследования НДС слоя заполнителя состоит в следующем. За узловые поверхности этого КЭ принимаются поверхности стыковки с несущими слоями с узлами в угловых точках трехмерного оболочечного конечного элемента слоя заполнителя. К этим поверхностям со срединных поверхностей несущих слоев приводятся узловые перемещения КЭ несущих слоев с помощью матриц перехода подобно [17]. Таким образом, КЭ заполнителя (КЭЗ) будет иметь восемь узлов по четыре узла на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях, а аппроксимирующими функциями перемещений будут функции, аппроксимирующие перемещения конечных элементов несущих слоев. Такая схема построения КЭ слоя заполнителя свободна от погрешностей расчета, связанных с разрывом перемещений на цилиндрических поверхностях стыковки КЭ заполнителя с конечными элементами несущих слоев.

Обозначим как  $\bar{\delta}_i^c$  вектор перемещений КЭ несущих слоев на поверхностях сопряжения с КЭ слоя заполнителя, где  $i = 1$  для внутреннего и  $i = 3$  для внешнего несущих слоев. Тогда условия стыковки в векторной форме примут следующий вид для случая одного КЭЗ по толщине слоя заполнителя

$$\delta^1 = \bar{\delta}_1^c; \quad \delta^2 = \bar{\delta}_3^c \quad (5.1)$$

где  $\delta^1, \delta^2$  векторы перемещений соответственно внутренней и внешней цилиндрических поверхностей КЭ заполнителя.

Вектор перемещений трехмерного КЭ слоя заполнителя  $\delta_i^f = \{u, v, w\}^T$  ( $f$  означает, что рассматривается слой заполнителя,  $i = 2$  для слоя заполнителя и этот индекс далее не указывается) будет иметь вид

$$\delta^f = \delta^1 \varphi^1 + \delta^2 \varphi^2 \quad (5.2)$$

где  $\varphi^1 = (1 - 2z^f/h^f)/2$ ,  $\varphi^2 = 1 - \varphi^1$ ,  $z^f$  – нормальная к срединной поверхности КЭЗ координата,  $h^f$  – толщина конечного элемента заполнителя.

С учетом (5.1), (5.2), зная АФП КЭ несущих слоев (3.3), запишем в матричной форме выражение для вектора перемещений трехмерного КЭ слоя заполнителя

$$\delta^f = T^f \alpha^f \quad (5.3)$$

где  $T^f$  ( $3 \times 40$ ),  $\alpha^f$  – соответственно матрица аппроксимирующих функций перемещений и вектор неопределенных коэффициентов конечных элементов слоя заполнителя.

После подстановки (5.3) в геометрические соотношения для трехмерного тела, записанные в цилиндрических координатах, будет иметь выражение для вектора обобщенных деформаций КЭ слоя заполнителя в матричной форме

$$\varepsilon^f = \Omega^f \alpha^f \quad (5.4)$$

Используя для КЭ слоя заполнителя физические соотношения (закон Гука), с учетом (5.4) получим запись выражений для напряжений с помощью вектора неопределенных коэффициентов, а затем с помощью вектора узловых перемещений. Из условия минимума полной потенциальной энергии (вариационный принцип Лагранжа) [36, 17] находятся выражения для записи матрицы жесткости конечного элемента слоя заполнителя подобно [23].

Определив выражения для матриц жесткости конечных элементов несущих слоев и слоя заполнителя, дальнейшее решение задачи проводится с помощью хорошо разработанных и отлаженных алгоритмов метода перемещений МКЭ.

**6. Числовой пример.** Разработанную модель применим для исследования напряженно-деформированного состояния в слоях трехслойной цилиндрической композитной оболочки, нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением и ослабленной двумя диаметрально противоположными прямоугольными вырезами. Несущие слои оболочки выполнены из стеклопластика, а наполнитель – из пенопласта.

Рассматриваются два варианта оболочки с вырезами:

1 – вырезы сквозные;

2 – вырезы закрыты крышками, которые служат для герметизации отсека и не воспринимают нагрузку, действующую на них, а та часть давления, которая приходится на площадь крышки при расчете заменялась распределенными по периметру выреза перерезывающими силами.

Вырезы располагаются на равном расстоянии от торцов оболочки. Длина вырезов составляет 40% от длины образующей. Угол раствора вырезов равен 0.84 рад.

Принимается, что граничные условия на торцах несущих слоев оболочки соответствуют случаю жесткой заделки с разрешением осевых перемещений.

Геометрические параметры оболочки следующие:

$$L = 2 \text{ м}, \quad R = 1.5 \text{ м}, \quad h_1 = 0.002 \text{ м}, \quad h_3 = 0.002 \text{ м}, \quad H = 0.05 \text{ м}$$

где  $L$  – длина,  $R$  – радиус срединной поверхности наполнителя оболочки;  $h_1, h_3$  – толщина внутреннего и наружного несущих слоев соответственно;  $H$  – толщина трехслойного пакета.

Физико-механические характеристики трехслойной оболочки следующие:

– для внутреннего и наружного ортотропных несущих слоев:  $E_1 = 20594$  Мпа,  $E_2 = 18632.6$  Мпа,  $G_{12} = 3432.3$  Мпа,  $\mu_2 = 0.1$ ;

– для наполнителя:  $E_3 = 23.53$  Мпа,  $G_{13} = G_{23} = 9.81$  Мпа.

Вследствие симметрии в осевом и окружном направлениях при расчете рассматривалась 1/8 симметричная часть оболочки, которая разбивалась на 20 трехслойных блоков (состоящих из конечных элементов внутреннего и наружного несущих слоев и слоя наполнителя) в осевом направлении и на 30 блоков в окружном.

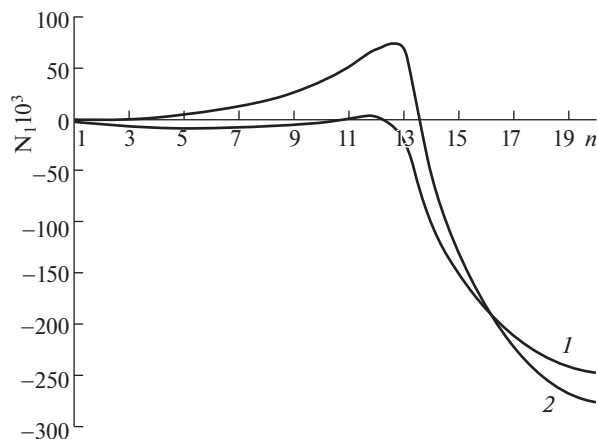
Наибольшими по абсолютной величине в несущих слоях являются мембранные усилия  $N_1$  во внутреннем несущем слое на середине прямолинейного края выреза (рис. 2). Максимальные значения мембранных усилий  $N_2$  наблюдаются в окрестности угловой точки выреза во внутреннем несущем слое. Эти максимальные значения усилий  $N_2$  почти на 20% меньше наибольших усилий  $N_1$  для варианта 2 оболочки с вырезами. Максимальные значения мембранных напряжений в несущих слоях превышают максимальные значения моментных напряжений.

Наибольшими в наполнителе являются напряжения  $\tau_{31}, \tau_{23}$  вблизи угловой точки выреза (рис. 3). Причем максимальные значения  $\tau_{31}$  на ~33% больше наибольших напряжений  $\tau_{23}$  для варианта 2 оболочки с вырезами и почти в 3 раза выше напряжений  $\sigma_{33}$ . В наполнителе напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ , которыми обычно пренебрегают, сопоставимы с  $\sigma_{33}$ .

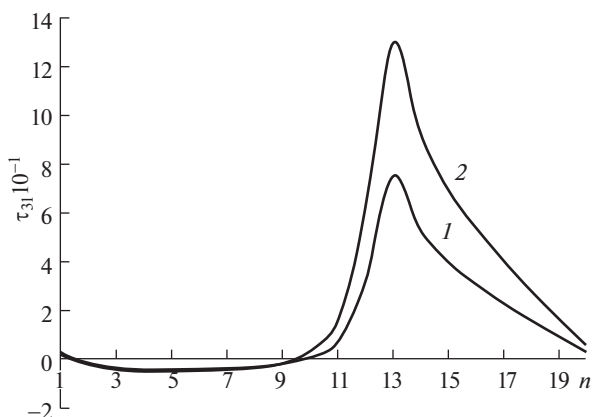
Изменение наибольших усилий  $N_1$  (Н/м) и напряжений  $\tau_{31}$  (Мпа) вдоль прямолинейного края выреза представлено на рис. 2, 3. По оси абсцисс откладывается номер КЭ, начиная от торца оболочки к середине выреза.

Цифрами 1, 2 обозначены графики для двух вариантов оболочки, указанных выше.

Как видно из приведенных графических зависимостей, напряженно-деформированное состояние оболочки, ослабленной вырезами, характеризуется ярко выраженным краевым эффектом в окрестности выреза и вблизи его угловых точек, быстро затухающим по мере удаления от выреза. Учет нагрузок от крышки (вариант 2) значительно повышает напряжения возле выреза.



**Рис. 2** Изменение усилий  $N_1$  вдоль прямолинейного края выреза трехслойной цилиндрической оболочки: 1 – сквозные вырезы; 2 – вырезы закрыты крышками.



**Рис. 3** Изменение напряжений  $\tau_{31}$  вдоль прямолинейного края выреза трехслойной цилиндрической оболочки: 1 – сквозные вырезы; 2 – вырезы закрыты крышками.

**7. Заключение.** Рассмотрено построение модели для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения, при котором стенка оболочки моделируется по толщине конечными элементами, которые затем стыкуются между собой. Модель позволяет адекватно моделировать особенности слоисто-неоднородного строения, моментное состояние несущих слоев, трехмерное напряженно-деформированное состояние в заполнителе, а также учесть наличие прямоугольных вырезов. Для уменьшения размерности модели послойного анализа применены функции аппроксимаций деформаций. Приведено исследование напряженно-деформированного состояния в слоях трехслойных цилиндрических оболочек вращения с прямоугольными вырезами, в том числе закрытыми крышками.



Статья посвящается светлой памяти Ученого и Учителя, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственной премий, чл.-кор. АН СССР В.И. Феодосьева (05.05.1916–24.09.1991) от его благодарного студента, дипломника, аспиранта, ученика.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А.* Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука. Физматлит, 1998. 464 с.
3. *Бакулин В.Н., Острик А.В.* Комплексное действие излучений и частиц на тонкостенные конструкции с гетерогенными покрытиями. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
4. *Vakulin V. N.* Investigation of the Influence of the Cutout Dimensions on the Stress-strain State of Three-layer Shells with Load-bearing Layers of Composite Materials // *J. Phys.: Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020. V. 714. P. 012002.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/714/1/012002>
5. *Паймушин В.Н.* Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // *Мех. композ. материалов.* 2017. Т. 53. № 1. С. 3–26.
6. *Григоренко Я.М., Григоренко А.Я.* Статические и динамические задачи для анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их числовым решением (обзор) // *Прикладная механика.* 2013. Т. 49. № 2. С. 3–70.
7. *Бакулин В.Н.* Послойный анализ напряженно-деформированного состояния нерегулярных трехслойных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 1. С. 90–106.
8. *Аннин Б.Д., Волчков Ю.М.* Неклассические модели теории пластин и оболочек // *ПМТФ.* 2016. Т. 57. № 5. С. 5–14.
9. *Бакулин В.Н.* Уточненные модели послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек // *Всероссийская научно-техническая конференция. “Механика и математическое моделирование в технике”, посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. Сб. материалов.* М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. С. 278–281.
10. *Vakulin V. N.* A Corrected model of level-by-level analysis of three-layer irregular conical shells // *Dokl. Phys.* 2017. V. 62. № 1. P. 37–41.
11. *Vakulin V.N.* Block based finite element model for layer analysis of stress strain state of three-layered shells with irregular structure // *Mech. Solids.* 2018. V. 53. No. 4. P. 411–417.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654418040064>
12. *Бакулин В.Н.* Уточненный послойный анализ НДС слоисто-неоднородных, в общем случае нерегулярных оболочечных элементов конструкций // *Материалы XIII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АМ-МАГ2020), посвященной 90-летию МАИ и 100-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова, 6–13 сентября 2020 г. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2020. С. 259–261.*
13. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И.* Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. Киев: Наукова думка, 1980. 636 с.
14. *Бакулин В.Н., Ревенко В.П.* Аналитико-численный метод конечных тел решения краевой задачи для цилиндрической ортотропной оболочки с немалым прямоугольным отверстием // *Изв. вузов. Математика.* 2016. № 6. С. 3–14.
15. *Vakulin V.N.* Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with cutouts // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 3. P. 448–460.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654419020092>
16. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.

17. Бакулин В.Н., Рассоха А.А. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. М.: Машиностроение, 1987. 312 с.
18. Бакулин В.Н. Построение конечно-элементных моделей для уточненного прочностного анализа слоистых оболочек. Материалы XII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), посвященной памяти академика Ю.А. Рыжова. 24–31 мая 2018 г. Алушта, Крым. М.: МАИ, 2018. С 330–332.
19. *Strang G., Fix G.J.* An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1973 = *Стренг Г., Фикс Д.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 392 с.
20. Образцов И.Ф. О некоторых перспективных прикладных проблемах механики, имеющих народнохозяйственное значение // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 3–9.
21. Бакулин В.Н., Каледин Вл.О. Конечный элемент круговой арки с конечной сдвиговой жесткостью // Мех. композ. матер. 1988. № 5. С. 915–919.
22. Бакулин В.Н. Аппроксимации для моделирования напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических оболочек // Матем. моделир. 2004. Т. 16. № 6. С. 101–105.
23. Бакулин В.Н. Конечно-элементная модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек // Матем. моделир. 2006. Т. 18. № 1. С. 3–9.
24. Образцов И.Ф., Бакулин В.Н. Уточненные модели для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек // ДАН. 2006. Т. 407. № 1. С. 36–39.
25. Бакулин В.Н. Неклассические уточненные модели в механике трехслойных оболочек // Вест. Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч. 5. С. 1989–1991.
26. Каледин Вл.О., Шпиталь С.В. Выбор расчетной схемы при исследовании осесимметричного краевого эффекта в трехслойных цилиндрических оболочках с легким наполнителем // Мех. композ. материалов. 1993. № 5. С. 657–665.
27. Бакулин В.Н., Репинский В.В. Конечно-элементные модели деформации однослойных и трехслойных конических оболочек // Матем. моделир. 2001. Т. 13. № 6. С. 39–46.
28. Бакулин В.Н. Уточненная модель для расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек вращения // Вестник Московского авиац. ин-та, 2011. Т. 18. № 2. С. 211–218.
29. *Vakulin V.N.* Analysis of the influence of rectangular cutouts on the stress-strain state of three-layer shells // 18th International Conference “Aviation and Cosmonautics – 2019”. Abstracts. Moscow: Moscow State Institute of Aviation (National Research University), 2019. P. 435–436.
30. *Vakulin V.N.* A Model for Refined Calculation of the Stress-Strain State of Sandwich Conical Irregular Shells // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 5. P. 786–796.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654419050054>
31. Бакулин В.Н., Кривцов В.С., Рассоха А.А. Алгоритм получения матрицы жесткости конечно-го элемента анизотропной оболочки // Изв. вузов. Авиац. техника. 1983. № 4. С. 14–18.
32. Бакулин В.Н. Конечно-элементные модели для расчета слоистых оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // Матем. моделир. 2002. Т. 14. № 8. С. 37–43.
33. Бакулин В.Н., Репинский В.В. Сравнение конечно-элементного решения с аналитическим в задачах механики деформирования сферических оболочек. Материалы XII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), посвященной памяти академика Ю.А. Рыжова. 24–31 мая 2018 г. Алушта, Крым. М.: МАИ, 2018. С 338–340.
34. *Vakulin V.N.* Block finite-element model of layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer generally irregular shells of double-curvature revolution // Dokl. Phys., 2019. V. 64. No. 1. P. 9–13.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335819010026>
35. *Vakulin V.N.* Model for Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Irregular Shells of Revolution of Double Curvature // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 2. P. 248–257.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654420020077>
36. Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др. Основы строительной механики ракет. М.: Высшая школа, 1969. 494 с.
37. *Vakulin V.N.* Effective model of load-bearing layers for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer cylindrical irregular shells of revolution // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 3.

- Р. 357–365.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654420030048>
38. *Кантин Г.* Смещение криволинейных элементов как жесткого целого // Ракетная техника и космонавтика. 1970. № 7. С. 84–88.
  39. *Железнов Л.П., Кабанов В.В.* Функции перемещений конечных элементов оболочки вращения как твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 1. С. 131–136
  40. *Клочков Ю.В.* Учет жестких смещений конечного элемента в неявном виде на основе использования векторной интерполяции перемещений // Вестник РУДН. 2002. Спецвыпуск. № 1. С. 123–127.
  41. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. 2d ed. New York: Mc Graw-Hill, 1959. = *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
  42. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
  43. *Bakulin V.N.* Research of the influence of rectangular cutout dimensions on the stress-strain state of shells using an effective finite element model // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 868. P. 012034.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/868/1/012034>
  44. *Bakulin V.N.* Investigation of the stress-strain state of the composite cylindrical shell with rectangular cutouts // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 927. P. 012066.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/927/1/012066>