

УДК 531.36

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В ДИНАМИКЕ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

© 2022 г. Ю. Д. Селюцкий<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 21.01.2021 г.

После доработки 05.02.2021 г.

Принята к публикации 22.03.2021 г.

Рассмотрена динамика однозвенного аэродинамического маятника в упругом закреплении, причем нестационарное аэродинамическое воздействие моделируется с помощью присоединенного осциллятора. Предполагается, что жесткость пружины крепления помимо линейной составляющей содержит и кубическую. Исследованы положения равновесия маятника и их устойчивость. Показано, в частности, что при определенных значениях параметров системы “флюгерное” положение равновесия становится неустойчивым, и возникает притягивающий предельный цикл. Получены приближенные формулы для частоты и амплитуды этого цикла. Показано, что в широком диапазоне значений параметров его частота практически не зависит от коэффициента жесткости пружины крепления и от момента инерции маятника. Амплитуда цикла растет с увеличением момента инерции и убывает с ростом коэффициента жесткости.

*Ключевые слова:* колебания, устойчивость, аэроупругость, аэродинамический маятник, тело в потоке среды

DOI: 10.31857/S0572329922010093

**1. Введение.** Аэродинамический маятник, т.е. маятниковая система, движущаяся в потоке сопротивляющейся среды и взаимодействующая с ним, представляет собой весьма интересный объект. Он может рассматриваться как компонент различных технических систем, в частности, ветроэнергетических установок различных типов (например, ветротурбины Дарье с прямыми лопастями [1]), систем дозаправки летательных аппаратов в воздухе [2], элементов управления в летательных аппаратах и т.д. В последнее время активно рассматриваются различные варианты ветроэнергетических систем, рабочим элементом которых является упругая конструкция, совершающая колебания в результате взаимодействия с потоком среды [3–5], и исследование динамики упруго закрепленного аэродинамического маятника может оказаться полезным для анализа особенностей поведения таких систем.

При описании движения маятника в потоке среды необходимо, вообще говоря, учитывать нестационарность аэродинамического воздействия. Интегрирование уравнений Навье–Стокса с учетом движения твердого тела позволяет дать подробное описание движения среды и аэродинамических сил. Однако, оно требует достаточно значительных вычислительных ресурсов и времени и практически не позволяет проводить параметрический анализ системы. Поэтому активно используются различные упрощенные феноменологические модели.

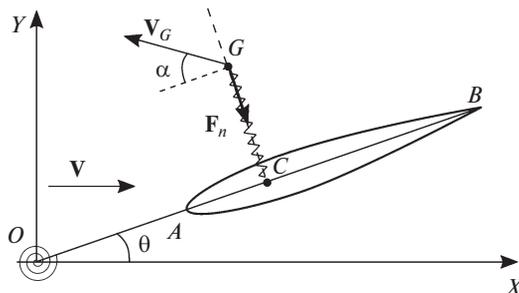


Рис. 1. Упруго закрепленный аэродинамический маятник с присоединенным осциллятором.

Одной из наиболее часто применяемых моделей такого типа является квазистатический подход [6]. С его помощью исследовались разные аспекты поведения различных механических систем, включающих тела, взаимодействующие с сопротивляющейся средой [7, 8], в том числе, однозвенных аэродинамических маятников без пружины в креплении [9–11]. Были рассмотрены локальные и нелокальные бифуркации, возникающие в соответствующей динамической системе, а также изучены периодические режимы, существующие в ней. В [12] на основе квазистатического подхода проанализирована динамика двухзвенного аэродинамического маятника в упругом креплении и показано, что этот подход обеспечивает качественное (а в ряде случаев и количественное) согласие с экспериментами.

Чтобы описать нестационарные эффекты более точно, чем это позволяет квазистатический подход, были предложены другие феноменологические модели. Среди них выделяется группа моделей, основанных на использовании дополнительных переменных, характеризующих нестационарное взаимодействие тела с потоком (такие модели используются, например, в [13–15]). В работах [16, 17] для учета внутренней динамики потока среды предложен подход подобного типа, основанный на введении дополнительной “скрытой” обобщенной координаты (“присоединенного осциллятора”), интегральным образом характеризующей состояние потока вблизи тела. В [18] модель присоединенного осциллятора была использована для анализа поведения аэродинамического маятника без пружины в креплении, и было показано, в частности, что в случае достаточно малой длины державки тривиальное положение равновесия теряет устойчивость при увеличении момента инерции маятника.

В данной статье анализируются положения равновесия и предельные циклы, возникающие в динамике упруго закрепленного аэродинамического маятника в случае, когда пружина крепления имеет кубическую нелинейность.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим механическую систему, представляющую собой однозвенный аэродинамический маятник в упругом креплении (рис. 1). Этот маятник состоит из тонкого крыла с симметричным профилем и твердого стержня – державки. Державка находится в плоскости симметрии крыла. Ось вращения  $O$  вертикальна и также принадлежит плоскости симметрии крыла. В шарнире  $O$  установлена спиральная пружина с кубической нелинейностью.

Вся система помещена в стационарный горизонтальный поток среды, скорость которого на бесконечности постоянна и равна  $V$ . Будем считать также, что пружина крепления не напряжена, когда державка маятника ориентирована вдоль набегающего потока.

Введем в горизонтальной плоскости неподвижную систему координат  $OXY$ , ось абсцисс которой направим вдоль вектора  $\mathbf{V}$ . Положение маятника будем характеризовать углом  $\theta$  между державкой и осью  $OX$ .

Для учета нестационарности аэродинамического воздействия потока на маятник воспользуемся моделью [18], в которой внутренняя динамика потока описывается с помощью присоединенного осциллятора  $CG$ , прикрепленного к хорде крыла в статическом центре давления  $C$  ( $OC = l$ ), причем точка  $G$  может перемещаться вдоль нормали к хорде. Обозначим расстояние  $CG$  через  $\eta$ . Будем считать, что аэродинамическая сила приложена в точке  $G$ , ее составляющая, направленная вдоль хорды профиля (тангенциальная сила), пренебрежимо мала, а нормальная к хорде составляющая имеет следующую структуру:

$$F_n = \frac{\rho S}{2} V_G^2 C_n(\alpha)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $S$  – характерная площадь крыла,  $C_n$  – безразмерный коэффициент нормальной силы,  $V_G$  – воздушная скорость точки  $G$ ,  $\alpha$  – угол между вектором  $\mathbf{V}_G$  и хордой  $AB$  (эффективный угол атаки). Из кинематических соображений следует, что

$$V_G \cos \alpha = V \cos \theta + \eta \dot{\theta}, \quad V_G \sin \alpha = V \sin \theta + l \dot{\theta} + \dot{\eta}$$

Уравнения движения системы “маятник + осциллятор” можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} + m\eta^2\ddot{\theta} + 2m\eta\dot{\eta}\dot{\theta} + m\eta\dot{\eta}\dot{\theta}^2 &= l(k\eta + h\dot{\eta}) - \kappa\theta - \kappa_3\theta^3 - \delta\dot{\theta} \\ m(\dot{\eta} + l\ddot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2) &= -k\eta - h\dot{\eta} - \frac{\rho S}{2} V_G^2 C_n(\alpha) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $m$  – масса осциллятора,  $k$  и  $h$  – его коэффициенты жесткости и демпфирования,  $J$  – момент инерции маятника относительно оси вращения,  $\kappa$  и  $\kappa_3$  – коэффициенты, характеризующие жесткость пружины крепления,  $\delta$  – коэффициент демпфирования этой пружины.

Обезразмерим уравнения, выбрав в качестве безразмерного времени величину  $\tau = tV/b$  (где  $b$  – длина хорды крыла) и введя следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \frac{\eta}{b}, \quad \bar{l} = \frac{l}{b}, \quad \bar{V}_G = \frac{V_G}{V}, \quad \bar{m} = \frac{2m}{\rho S b}, \quad \bar{J} = \frac{2J}{\rho S b^3} \\ \bar{k} &= \frac{2kb}{\rho S V^2}, \quad \bar{h} = \frac{2hb}{\rho S V}, \quad \bar{\kappa} = \frac{2\kappa}{\rho S b V^2}, \quad \bar{\kappa}_3 = \frac{2\kappa_3}{\rho S V^2 b}, \quad \bar{\delta} = \frac{2\delta}{\rho S V b^2} \end{aligned}$$

Далее для упрощения записи будем обозначать производную по безразмерному времени точкой и опускать черту над безразмерными величинами.

Вообще говоря, коэффициент нормальной силы представляет собой достаточно сложную  $2\pi$ -периодическую функцию угла атаки (нечетную в случае крыла с симметричным профилем). Однако из многочисленных экспериментов известно, что при малых углах атаки эта зависимость с хорошей точностью является линейной:  $C_n = C_n^\alpha \alpha$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением таких движений маятника, при которых угол атаки остается малым. Отметим, что для крыльев  $C_n^\alpha > 0$ .

Тогда уравнения (2.1) примут вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} + m\eta^2\ddot{\theta} + 2m\eta\dot{\eta}\dot{\theta} + ml\eta\dot{\theta}^2 &= l(k\eta + h\dot{\eta}) - \kappa\theta - \kappa_3\theta^3 - \delta\dot{\theta} \\ m(\ddot{\eta} + l\ddot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2) &= -k\eta - h\dot{\eta} - V_G^2 C_n^\alpha \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sin \theta + l\dot{\theta} + \dot{\eta}}{V_G}, \quad V_G = \sqrt{(\sin \theta + l\dot{\theta} + \dot{\eta})^2 + (\cos \theta + \eta\dot{\theta})^2}$$

Исследуем поведение траекторий системы (2.2).

**3. Положения равновесия и их устойчивость.** Пусть  $(\theta_s, \eta_s)$  – неподвижная точка системы (2.2). Тогда величины  $\theta_s$  и  $\eta_s$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \kappa_3\theta_s^3 &= -(lC_n^\alpha + \kappa)\theta_s \\ k\eta_s &= -C_n^\alpha\theta_s \end{aligned} \quad (3.1)$$

Очевидно, что система (3.1) имеет тривиальное равновесие  $\theta_s = 0$ ,  $\eta_s = 0$ . При этом маятник находится во флюгерном положении.

Если  $lC_n^\alpha + \kappa > 0$  (это условие выполнено, в частности, если  $l > 0$ , т.е. центр давления расположен “ниже по потоку”, чем точка подвеса), то других неподвижных точек у системы нет, поскольку величины  $C_n^\alpha$  и  $\kappa$  положительны. Если же  $lC_n^\alpha + \kappa < 0$ , то имеются еще два симметричных “косых” равновесия:

$$\theta_{s1,2} = \pm \sqrt{-\frac{lC_n^\alpha + \kappa}{\kappa_3}}$$

Поскольку наше рассмотрение ограничено областью малых углов атаки, будем считать, что параметры системы таковы, что величины  $\theta_{s1,2}$  малы (когда они являются действительными числами). В частности, такая ситуация имеет место, когда параметр  $\kappa_3$  велик:  $\kappa_3 \gg 1$ .

Вначале рассмотрим тривиальное равновесие. Система (2.2), линеаризованная в окрестности этого равновесия, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= l(k\eta + h\dot{\eta}) - \kappa\theta - \delta\dot{\theta} \\ m(\ddot{\eta} + l\ddot{\theta}) &= -k\eta - h\dot{\eta} - C_n^\alpha(\theta + \eta + l\dot{\theta}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Запишем характеристический полином системы (3.2):

$$\begin{aligned} Jm\lambda^4 + (m(hl^2 + \delta) + J(C_n^\alpha + h))\lambda^3 + (C_n^\alpha hl^2 + kml^2 + Jk + m\kappa + (C_n^\alpha + h)\delta)\lambda^2 + \\ + ((C_n^\alpha l^2 + \delta)k + C_n^\alpha hl + \kappa(C_n^\alpha + h))\lambda + k(C_n^\alpha l + \kappa) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Очевидно, что тривиальное равновесие статически неустойчиво при  $lC_n^\alpha + \kappa < 0$ . Если же  $lC_n^\alpha + \kappa > 0$ , то все коэффициенты полинома (3.3) положительны. Поэтому достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального равновесия в этом случае сводятся к условию положительности третьего минора матрицы Гурвица для (3.3), которое можно представить в следующем виде:

$$B_2 J^2 + C_n^\alpha h l B_1 J + m l^2 h B_0 > 0 \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_2 &= k(h + C_n^\alpha)(C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta) \\ B_1 &= \delta^2 k(h + C_n^\alpha)^2 + (lh C_n^\alpha(C_n^\alpha l + hl - m) + \delta((h + C_n^\alpha)^2 - 2km))(h + C_n^\alpha)\kappa + \end{aligned}$$

$$+ ((C_n^\alpha l + hl - m)hl + \delta(h + C_n^\alpha))(C_n^\alpha)^2(kl + h) + 2kml^2h(C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta) + \delta C_n^\alpha l((h + C_n^\alpha)(h^2 - 3km + 2klh) + kmC_n^\alpha) \quad (3.5)$$

$$B_0 = (hl^2 + \delta)C_n^\alpha((kl + h)lC_n^\alpha + \kappa(h + C_n^\alpha) + \delta k) + k(kml^2 + \delta h)(C_n^\alpha l^2 + \delta) + C_n^\alpha m\kappa l(2kl + h) + (h + C_n^\alpha)\kappa(\delta h + \kappa m) + lC_n^\alpha \delta(h^2 - km)$$

Результаты идентификации параметров осциллятора [18] показывают, что для них выполнены следующие неравенства:

$$h^2 > 4mk, \quad (C_n^\alpha)^2 > 2mk \quad (3.6)$$

Пусть  $l > 0$ . Нетрудно видеть, что, с учетом (3.6), при этом  $B_0 > 0$ . Кроме того, можно путем несложных выкладок показать, что  $B_1 > 0$  при  $B_2 > 0$ . Таким образом,  $B_2 > 0$  оказывается достаточным условием асимптотической устойчивости при  $l > 0$ . Оно, очевидно, выполнено при любых длинах державки, если коэффициент  $\delta$  достаточно велик:  $\delta > (C_n^\alpha)^3/4k^2$ .

Соответственно, неравенство

$$C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta < 0 \quad (3.7)$$

является необходимым условием неустойчивости в области  $l > 0$ . Если коэффициент демпфирования мал, так что  $\delta < (C_n^\alpha)^3/4k^2$ , то существует интервал  $l \in (l_1, l_2)$ ,  $l_{1,2} > 0$ , в котором  $B_2 < 0$ :

$$l_{1,2} = \frac{C_n^\alpha}{2k} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{C_n^\alpha}{k}\right)^2 - 4 \frac{\delta}{C_n^\alpha}} \quad (3.8)$$

Для каждого  $l$  из указанного интервала существует ровно одно положительное значение  $J_*$  момента инерции, при котором третий минор матрицы Гурвица обращается в нуль (происходит бифуркация Андронова–Хопфа). При меньших величинах момента инерции положение равновесия асимптотически устойчиво, а при больших – неустойчиво. Таким образом, в случае, когда длина державки маятника удовлетворяет неравенствам  $l_1 < l < l_2$ , увеличение момента инерции маятника приводит к дестабилизации “флюгерного” положения равновесия. Этот эффект был описан в работе [18] для маятника без пружины в креплении. Заметим, что границы этого интервала по  $l$  зависят от параметров, характеризующих жесткость пружины.

Найдем величину  $J_*$  и частоту  $\omega_*$  предельного цикла, рождающегося в результате соответствующей бифуркации. Для этого подставим в (3.3)  $\lambda = i\omega_*$  ( $\omega_* \neq 0$ ) и после несложных преобразований получим:

$$(hl^2 + \delta)m^2\omega_*^4 + (hlC_n^\alpha(l(h + C_n^\alpha) - m) + \delta((h + C_n^\alpha)^2 - 2km))\omega_*^2 + k(C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta) = 0 \quad (3.9)$$

$$J_* = \frac{\kappa}{\omega_*^2} - \frac{m(hl^2 + \delta)}{C_n^\alpha + h} + \frac{lC_n^\alpha(kl + h) + k\delta}{\omega_*^2(C_n^\alpha + h)}$$

С учетом (3.6) и (3.7) первое уравнение (3.9) имеет единственное положительное решение.

Очевидно, что при  $l \rightarrow l_1 + 0$  и  $l \rightarrow l_2 - 0$  имеем  $\omega_* \rightarrow 0$ , соответственно,  $J_* \rightarrow \infty$ .

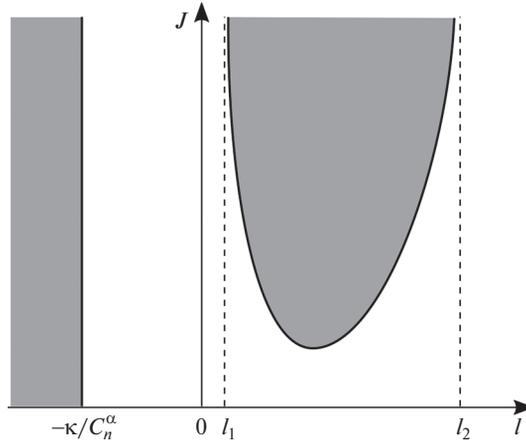


Рис. 2. Области неустойчивости тривиального равновесия (выделены серым цветом).

Любопытно, что получаемая из (3.9) величина  $\omega_*$  не зависит от жесткости пружины крепления. При этом, как нетрудно показать,  $\omega_*$  убывает с ростом коэффициента демпфирования  $\delta$ .

Отметим также, что критическое значение момента инерции растет с увеличением коэффициента жесткости пружины крепления.

С учетом (3.5) нетрудно видеть, что левая часть (3.4) представляет собой полином 6 степени относительно  $l$ , причем в силу (3.6) все его коэффициенты, за исключением коэффициентов при  $l$  и  $l^2$ , положительны. Значит, по теореме Декарта, этот полином имеет не более 2 действительных корней. Кроме того, при малых значениях момента инерции положительны все коэффициенты полинома, так что при этом асимптотическая устойчивость имеет место при всех положительных  $l$ .

Теперь обратимся к случаю  $l < 0$ . Заметим, что при этом все коэффициенты в первом уравнении (3.9) положительны, следовательно, действительных решений нет. Соответственно, в области отрицательных  $l$  корни характеристического полинома не могут пересекать мнимую ось в точках, отличных от начала координат. Нулевой корень существует только при  $l = -\kappa/C_n^\alpha$ . Следовательно, при  $-\kappa/C_n^\alpha < l < 0$  имеет место асимптотическая устойчивость.

При  $l = -\kappa/C_n^\alpha$  в системе происходит бифуркация типа “вилка”, и тривиальное решение становится неустойчивым при  $l < -\kappa/C_n^\alpha$ . Нетрудно показать, что рождающиеся при этом “косые” равновесия асимптотически устойчивы при  $l$ , близких к бифуркационному значению.

С учетом вышесказанного, границы области асимптотической устойчивости тривиального равновесия на плоскости параметров  $J, l$  имеют вид, качественно изображенный на рис. 2 (области неустойчивости показаны серым цветом).

Будем предполагать, что  $|\theta_{s1,2}| = \mu = 1$ . Характеристический полином системы, линеаризованной в окрестности косога равновесия, имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 & (Jm + O(\mu^2))\lambda^4 + (m(hl^2 + \delta) + J(C_n^\alpha + h) + O(\mu^2))\lambda^3 + \\
 & + (C_n^\alpha hl^2 - 3mlC_n^\alpha - 2m\kappa + kml^2 + Jk + (C_n^\alpha + h)\delta + O(\mu^2))\lambda^2 + \\
 & + ((kl - C_n^\alpha)C_n^\alpha + \delta k - 2(C_n^\alpha + h)(C_n^\alpha l + \kappa) + O(\mu^2))\lambda - 2k(C_n^\alpha l + \kappa) = 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Видно, что нулевой корень у (3.10) также существует только при  $l = -\kappa/C_n^\alpha$ . В то же время, косые равновесия существуют и отличны от нуля только при  $l < -\kappa/C_n^\alpha$ .

Пусть  $\lambda = i\omega_{**}$  ( $\omega_{**} \neq 0$ ). Нетрудно показать, что  $\omega_{**}$  является корнем биквадратного уравнения, коэффициенты которого с точностью до  $O(\mu^2)$  совпадают с коэффициентами биквадратного уравнения на  $\omega_*$  (3.8). При  $l < 0$  все эти коэффициенты, как было отмечено выше, положительны. Значит, чисто мнимые корни у (3.9) отсутствуют.

Таким образом, корни характеристического полинома (3.10) не пересекают мнимую ось при  $l < -\kappa/C_n^\alpha$ , следовательно, “косые” равновесия остаются асимптотически устойчивыми при всех значениях параметров, при которых они существуют, а углы  $\theta_{s1,2}$  достаточно малы.

**4. Периодические решения.** В соответствии с вышесказанным, в случае, когда  $l \in (l_1, l_2)$ , а момент инерции маятника достаточно велик, тривиальное равновесие неустойчиво, других равновесий нет, и в системе существует цикл, родившийся в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Исследуем этот цикл, считая, что  $\kappa_3 \gg 1$ . Это означает, что в пружине присутствует значительное упрочнение. Такая ситуация имеет место для некоторых пружин в области небольших деформаций. Введем малый параметр:  $\varepsilon = \sqrt{\kappa_3^{-1}} \ll 1$ . Тогда амплитуда колебаний будет мала в достаточно широком диапазоне значений остальных параметров, и сделанные выше предположения относительно  $C_n$  будут справедливы.

Для оценки параметров цикла воспользуемся методом гармонического баланса. Будем искать периодические решения вида

$$\theta = \theta_1 \sin \omega t, \quad \eta = \eta_1 \sin \omega t + \eta_2 \cos \omega t \tag{4.1}$$

$$\theta_1 = \varepsilon \theta_{11} + O(\varepsilon^2), \quad \eta_1 = \varepsilon \eta_{11} + O(\varepsilon^2), \quad \eta_2 = \varepsilon \eta_{21} + O(\varepsilon^2), \quad \omega = \omega_0 + O(\varepsilon)$$

Подставив (4.1) в систему (2.2), в первом приближении по малому параметру получим:

$$\begin{aligned}
 -J\theta_{11}\omega_0^2 + \eta_{21}hl\omega_0 - \eta_{11}kl + \frac{3}{4}\theta_{11}^3 + \kappa\theta_{11} &= 0 \\
 -\eta_{11}hl\omega_0 + \delta\omega_0\theta_{11} - \eta_{21}kl &= 0 \\
 -m\eta_{11}\omega_0^2 - \eta_{21}h\omega_0 - C_n^\alpha(\eta_{21}\omega_0 - \theta_{11}) + \eta_{11}k - ml\theta_{11}\omega_0^2 &= 0 \\
 -m\eta_{21}\omega_0^2 + \eta_{11}h\omega_0 + C_n^\alpha\omega_0(\eta_{11} + l\theta_{11}) + \eta_{21}k &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Нетрудно показать, что  $\omega_0$  равно  $\omega_*$ . Таким образом, частота цикла, существующего при произвольном (но достаточно большом, чтобы имела место неустойчивость тривиального равновесия) значении момента инерции маятника, с точностью до малого параметра совпадает с частотой цикла, рождающегося при бифуркации Андронова–Хопфа:

$$\omega = \sqrt{\frac{-q_1 + \sqrt{q_1^2 - 4m^2k(hl^2 + \delta)(C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta)}}{2(hl^2 + \delta)m^2}} + O(\varepsilon) \tag{4.3}$$

Здесь  $q_1 = h l C_n^\alpha (l(h + C_n^\alpha) - m) + \delta((h + C_n^\alpha)^2 - 2km)$ .

Соответственно, частота цикла достаточно слабо зависит как от коэффициентов, характеризующих жесткость пружины крепления, так и от момента инерции маятника. Этот эффект представляется любопытным.

Для коэффициентов  $\theta_{11}$ ,  $\eta_{11}$ ,  $\eta_{21}$ , характеризующих амплитуды колебаний маятника и присоединенного осциллятора, из (4.2) получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= \frac{2\omega_*}{\sqrt{3}} \sqrt{J - J_*} \\ \eta_{11} &= -\theta_{11} \frac{(C_n^\alpha - m l \omega_*^2)(k - m \omega_*^2) + C_n^\alpha \omega_*^2 l (C_n^\alpha + h)}{\Delta} \\ \eta_{21} &= -\omega_* \frac{h}{k} \eta_{11} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $\Delta = (h + C_n^\alpha)^2 \omega_*^2 + (k - m \omega_*^2)^2$ .

Из (3.9) ясно, что, как и следовало ожидать, величина  $\theta_{11}$  убывает с увеличением коэффициента жесткости  $k$ .

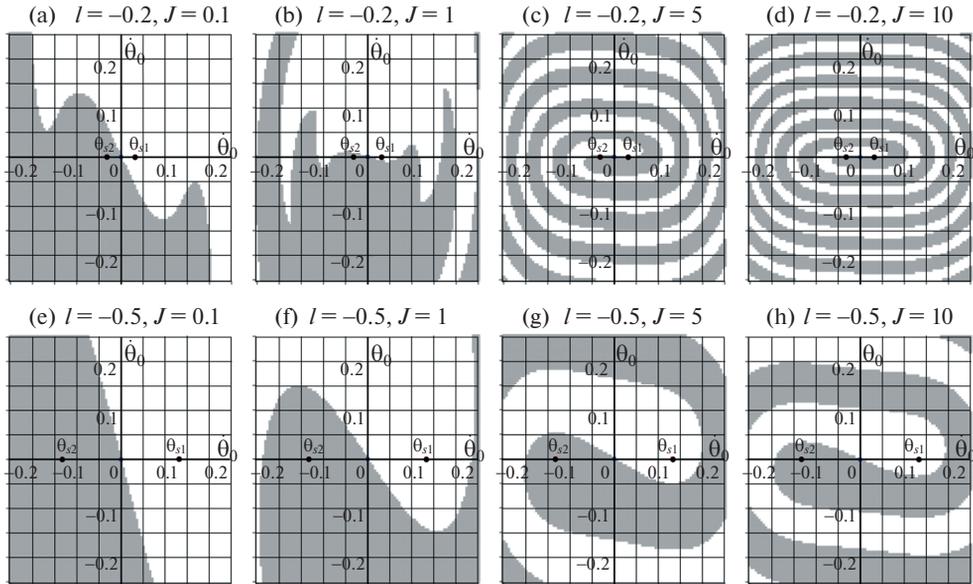
В силу громоздкости выражения для первой ляпуновской величины вопрос о том, является ли цикл притягивающим, не удастся разрешить аналитически. Тем не менее, заметим, что, как следует из (4.4), цикл указанного вида существует только при  $J > J_*$ , т.е. в области, где тривиальное равновесие неустойчиво. Это косвенно свидетельствует о том, что он является притягивающим, а бифуркация Андронова–Хопфа – суперкритической.

Необходимо отметить, что в отсутствие демпфирования  $\lim_{l \rightarrow 0} \omega_* = \infty$  и  $\lim_{l \rightarrow 0} J_* = 0$ .

Соответственно, величина  $\theta_{11}$  стремится к бесконечности при  $l \rightarrow 0$ , и предложенная аппроксимация в этой ситуации оказывается неприменимой.

**5. Численное моделирование.** Проведем численное исследование поведения системы при разных значениях параметров. Примем для параметров присоединенного осциллятора такие же значения, что и в [18]:  $m = 1.5$ ,  $k = 3$ ,  $h = 8$ . Пусть  $\kappa_3 = 100$ . Для коэффициента нормальной силы примем  $C_n^\alpha = 5.5$  (это соответствует стандартному профилю NASA 0012 [19]). Будем считать также, что коэффициент демпфирования достаточно мал:  $\delta < (C_n^\alpha)^3 / 4k^2$ , так что величины  $l_{1,2}$  в формулах (3.8) являются вещественными. Для численного интегрирования будем использовать стандартный метод Рунге–Кутты 4 порядка.

Вначале рассмотрим ситуацию, когда в системе существует три положения равновесия:  $l < -\kappa / C_n^\alpha$ . Численное интегрирование показывает, что в достаточно широком диапазоне параметров и начальных условий притягивающие циклы не наблюдаются, и траектории системы стремятся к одному из “косых” равновесий. Области притяжения этих равновесий в пространстве начальных условий в проекции на плоскость  $\eta_0 = 0$ ,  $\dot{\eta}_0 = 0$  при разных значениях параметров  $l$  и  $J$  представлены на рис. 3 (расчеты проводились при  $\kappa = 1$ ,  $\delta = 0.1$ ). Белым цветом отмечены такие начальные условия  $\theta_0$ ,  $\dot{\theta}_0$ , что вышедшие из них траектории стремятся к положению равновесия  $\theta \equiv \theta_{s1} > 0$ ,  $\eta_{s1} \equiv -C_n^\alpha \theta_{s1} / k < 0$ ; траектории, выходящие из начальных условий, отмеченных серым цветом, стремятся ко второму “косому” положению равновесия ( $\theta \equiv \theta_{s2} < 0$ ,  $\eta_{s2} \equiv -C_n^\alpha \theta_{s2} / k > 0$ ). На рис. 3, а–d приведены результаты для  $l = -0.2$ , а на рис. 3, е–h – для  $l = -0.5$ . Параметр  $J$  принимает значения 0.1 (рис. 3 а, е), 1 (рис. 3 б, ф), 5 (рис. 3, с, г) и 10 (рис. 3, д, h).



**Рис. 3.** Эволюция области притяжения “косых” равновесий в пространстве начальных условий (белая область – для положения  $(\theta_{s1}, \eta_{s1})$ , серая область – для положения  $(\theta_{s2}, \eta_{s2})$ ) с увеличением момента инерции при разных значениях параметра  $l$ ; проекция на плоскость  $(\eta_0 = 0, \dot{\eta}_0 = 0)$ .

Указанные проекции областей притяжения имеют спиралевидную структуру, причем ширина “рукавов” спиралей и их средний угол закрутки уменьшаются с ростом момента инерции и увеличиваются с ростом  $l$ .

При  $-\kappa/C_n^\alpha < l < l_1$ , как было отмечено выше, существует только тривиальное равновесие, и оно асимптотически устойчиво. Численное моделирование показывает, что в достаточно широком диапазоне начальных условий и значений параметров других притягивающих инвариантных многообразий не наблюдается.

При  $l_1 < l < l_2$  в системе при достаточно больших значениях момента инерции существует цикл. Численное моделирование показывает, что он является притягивающим, а соответствующие колебания с достаточно хорошей точностью являются одночастотными в широком диапазоне значений параметров  $l$  и  $J$ . Это проиллюстрировано на рис. 4, на котором представлены проекции фазовых траекторий на конфигурационную плоскость и плоскость  $(\theta, \dot{\theta})$  при  $\kappa = 1$  и разных комбинациях значений параметров  $l, J$  и  $\delta$ .

На рис. 5 показаны амплитуды  $\theta_1$  и частоты колебаний в зависимости от момента инерции при разных значениях коэффициента жесткости  $\kappa$  пружины (квадраты –  $\kappa = 1$ , круги –  $\kappa = 5$ , ромбы –  $\kappa = 10$ ), полученные численным интегрированием системы (2.2). Расчеты проводились при  $\delta = 0.1, l = 0.2$ . Сплошные линии соответствуют аппроксимационным формулам (4.3)–(4.4). Видно, что в достаточно широком диапазоне значений параметров частота цикла мало отличается от величины  $\omega_*$  и, таким образом, практически не зависит ни от  $J$ , ни от  $\kappa$ . Отличие становится заметным, когда амплитуда  $\theta$  оказывается большой.

На рис. 6 проиллюстрировано влияние длины державки на амплитуду (рис. 6, а и 6, с) и частоту (рис. 6, б и 6, d) колебаний маятника в случае  $\kappa = 1$  при различных значениях момента инерции и коэффициента демпфирования. Рис. 6а, 6б соответствуют значе-

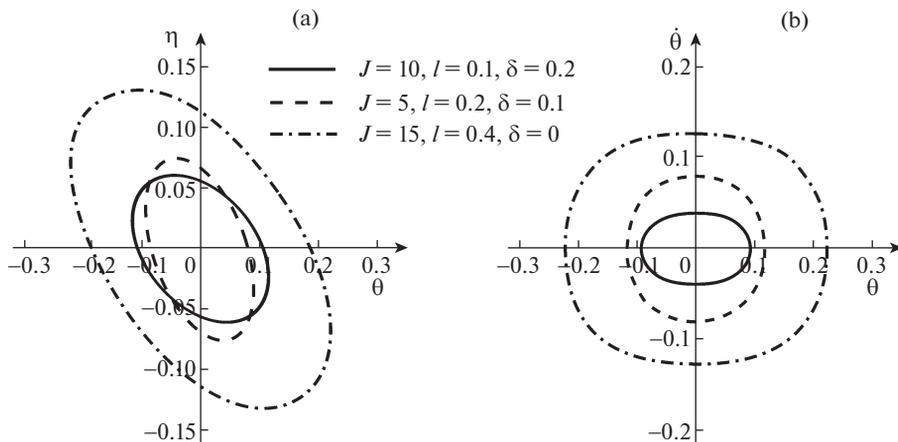


Рис. 4. Примеры фазовых траекторий системы при  $\kappa = 1$  и разных комбинациях значений параметров  $l, J$  и  $\delta$ : а) в проекции на конфигурационную плоскость; б) в проекции на плоскость  $(\theta, \dot{\theta})$ .

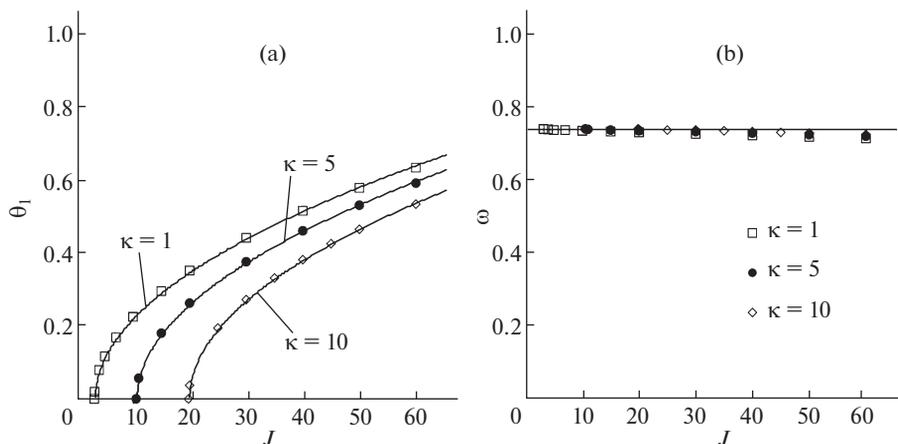
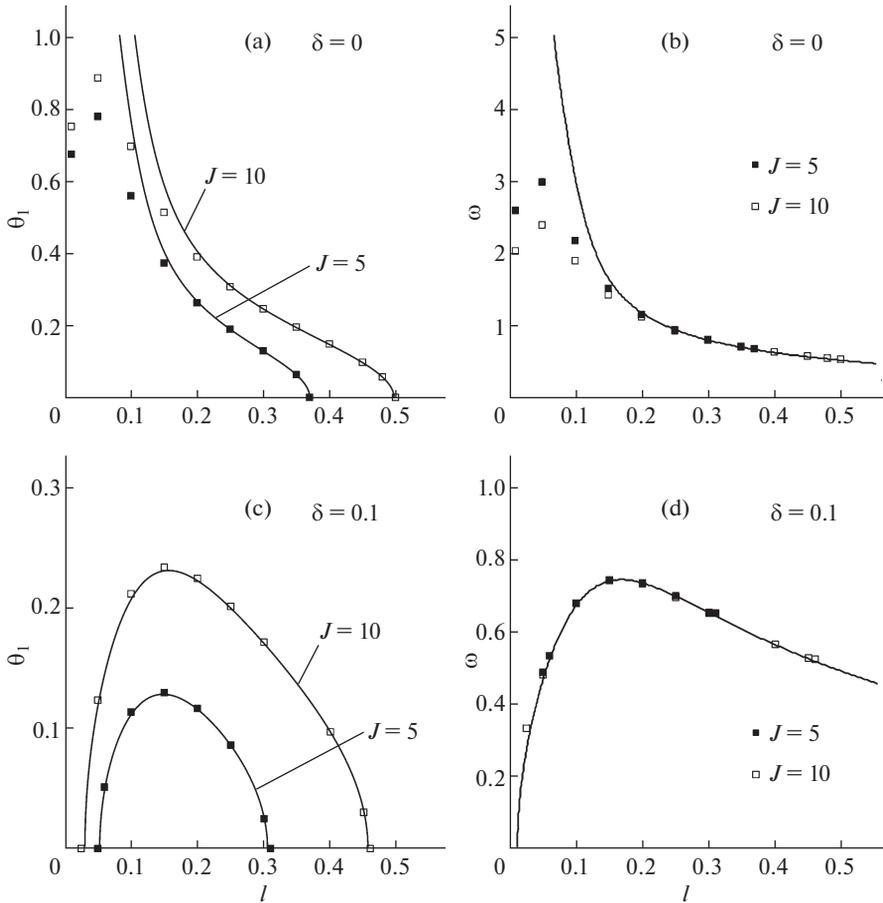


Рис. 5. Зависимости характеристик цикла от момента инерции маятника при разных значениях коэффициента жесткости; точки – результаты численного интегрирования, сплошные линии – аппроксимационные формулы: а) амплитуда колебаний маятника; б) частота колебаний маятника.

нию  $\delta = 0$ , а рис. 6с и 6д –  $\delta = 0.1$ . Сплошными линиями вновь обозначены зависимости (4.3)–(4.4), а квадратами – частоты и амплитуды, полученные в результате численного интегрирования системы (2.2) при разных значениях параметров  $l$  и  $J$  (белые квадраты:  $J = 10$ ; черные квадраты:  $J = 5$ ).

Видно, что аппроксимационные формулы достаточно хорошо согласуются с “точным” численным решением, если амплитуда колебаний маятника невелика (менее 0.3 рад). В частности, при  $\delta = 0.1$  аппроксимация при рассмотренных значениях  $J$  оказывается достаточно эффективной во всей области существования цикла. Зависимость частоты цикла от момента инерции проявляется только при большой амплитуде цикла.



**Рис. 6.** Зависимости амплитуды и частоты цикла от длины державки маятника при разных значениях момента инерции и коэффициента демпфирования; точки – результаты численного интегрирования, сплошные линии – аппроксимационные формулы.

Впрочем, необходимо отметить, что при больших  $\theta$  предложенный подход должен быть модифицирован, поскольку в этом случае необходимо учитывать нелинейность зависимости коэффициента нормальной силы от угла атаки.

**6. Заключение.** Рассмотрена динамика упруго закрепленного аэродинамического маятника. Для описания нестационарного аэродинамического воздействия используется модель присоединенного осциллятора.

Найден диапазон длин державки, в котором при достаточно больших значениях момента инерции маятника положение равновесия “вдоль потока” является неустойчивым, и существует предельный цикл. Получены аппроксимационные формулы для амплитуды и частоты этого цикла.

Проведено численное моделирование, показано, что предложенные формулы достаточно хорошо согласуются с результатами численного интегрирования уравнений движения в широком диапазоне значений параметров системы.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климина Л.А.* Ротационные режимы движения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1: Мат. Мех. 2009. № 5. С. 71–74.
2. *Ro K., Ahmad H., Kamman J.* Dynamic Modeling and Simulation of Hose-Paratrogue Assembly for Mid-Air Operations // AIAA Infotech Aerospace Conference. 2009. P. 1–14. <https://doi.org/10.2514/6.2009-1849>
3. *Abdelkefi A.* Aeroelastic energy harvesting: A review // Int. J. Eng. Sci. 2016. V. 100. P. 112–135. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.10.006>
4. *Wu Y., Li D., Xiang J., Da Ronch A.* A modified airfoil-based piezoaeroelastic energy harvester with double plunge degrees of freedom // Theor. Appl. Mech. Lett. 2016. V. 6. № 5. P. 244–247. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2016.08.009>
5. *Pigolotti L., Mannini C., Bartoli G., Thiele K.* Critical and post-critical behaviour of two-degree-of-freedom flutter-based generators // J. Sound Vib. 2017. V. 404. P. 116–140. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.024>
6. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.
7. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Лю В.-Л., Линь Ч.-Х.* Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 59–66.
8. *Dosaev M.* Interaction between internal and external friction in rotation of vane with viscous filling // Appl. Math. Mod. 2019. Vol. 68. P. 21–28. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
9. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Об одной эвристической модели аэродинамического маятника // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 1047–1061.
10. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Авторотационные и автоколебательные режимы движения аэродинамического маятника // ПММ. 2013. Т. 77. № 4. С. 501–513.
11. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Шамолин М.В.* Маятниковые системы с динамической симметрией // Совр. математика и ее приложения. 2016. Т. 100. С. 76–133.
12. *Selyutskiy Yu.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically mounted double aerodynamic pendulum // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2019. V. 19. № 5. P. 1941007. <https://doi.org/10.1142/S0219455419410074>
13. *Goman M., Khrabrov A.* State-space representation of aerodynamic characteristics of an aircraft at high angles of attack // J. Aircraft. 1994. V. 31. № 5. P. 1109–1115.
14. *Hansen M. H., Gaunaa M., Aagaard Madsen H.* A Beddoes-Leishman type dynamic stall model in state-space and indicial formulations. Tech. Rep. Risø-R-1354(EN): Risø National Laboratory, Denmark, 2004.
15. *Mannini C., Massai T., Marra A.M.* Modeling the interference of vortex-induced vibration and galloping for a slender rectangular prism // J. Sound Vib. 2018. V. 419. P. 493–509. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.016>
16. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 24–31.
17. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Феноменологическая модель взаимодействия пластины с потоком среды // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 43–62.
18. *Selyutskiy Yu.D., Samsonov V.A., Andronov P.R.* Oscillations of aerodynamic pendulum // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2013. V. 13. № 7. P. 1340010. <https://doi.org/10.1142/S0219455413400105>
19. *Табачников В.Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79–93.