ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 3, с. 70–77

УДК 531.3

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ШТАМПА И ПОРОУПРУГОГО СЛОЯ, ЗАКРЕПЛЕННОГО НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© 2022 г. **М. И. Чебаков**[a,*], **Е. М. Колосова**[a,**]

[a] *Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*

**e-mail: michebakov@yandex.ru*

***e-mail: a_lena_ch@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.05.2021 г.
После доработки 07.07.2021 г.
Принята к публикации 08.07.2021 г.

В работе на основе уравнений теории пороупругих тел Ковина–Нунзиато рассматривается осесимметричная контактная задача о взаимодействии жесткого штампа с пороупругим слоем, закрепленным на упругом полупространстве. Предполагается, что основание штампа имеет плоскую форму, в зоне контакта отсутствует трение. С помощью интегрального преобразования Ханкеля поставленная задача сводится к интегральному уравнению относительно неизвестного контактного напряжения, для решения которого используется метод коллокаций. Найдены значения контактных напряжений и исследована деформация поверхности вне штампа. Исследована связь между силой, действующей на штамп, и его перемещением, которая является одной из основных характеристик при определении механических параметров материала методом индентирования. Проведен сравнительный анализ исследуемых величин для различных значений параметров пороупругого слоя и упругого основания. Численные результаты представлены в виде графиков.

Ключевые слова: контактная задача, пороупругость, модель Ковина–Нунзиато, осесимметричная задача, метод коллокаций, индентирование

DOI: 10.31857/S057232992202009X

Введение. Пористые материалы – это достаточно новый класс материалов с уникальными физическими, механическими, акустическими, электрическими и термическими свойствами. Благодаря оптимальному соотношению массы и прочности он широко используется в космической промышленности. Важнейшим вопросом при производстве таких материалов является контроль и оценка их механических характеристик. Существуют различные подходы.

Один из подходов моделирования пористых материалов был развит в работах Ковина–Нунзиато [1, 2]. Данная теория, называемая теорией микродилатации, была применена для исследования пористых тел с пустыми (ненасыщенными) порами. Она использует линейную теорию упругости с дополнительной кинематической переменной, которая описывает свойства изменения пористости. Таким образом, деформация и пористость являются связанными полями, имеющими общую реакцию на внешние нагрузки, прикладываемые к телу.

Линейная теория была описана в [2]. Ряд исследований был проведен в последние годы. На основе теории Ковина–Нунзиато в [3, 4] решены плоские контактные задачи для полуплоскости и полосы, соответственно. В [5–7] исследованы осесимметричные контактные задачи для пористого полупространства и слоя. В [8] рассмотрена осесимметричная задача о взаимодействии штампа и упругого слоя, закрепленного на пороупругом полупространстве.

В [9] методы композитной механики были использованы для оценки эффективных модулей упругости и параметра Био пористых сред. Новый метод анализа деформационного поведения жестких и эластичных пен с небольшим объемным содержанием твердой фазы разработан в [10]. В [11] рассмотрен несжимаемый упругий материал с периодической системой пор, представлены результаты численных расчетов модулей для материалов с порами различной конфигурации.

Целью исследований является оценка влияния параметров пороупругого слоя на контактные напряжения, приложенную нагрузку к штампу и перемещения свободной поверхности пороупругого слоя, закрепленного на упругом полупространстве, при индентировании слоя жестким штампом.

1. Постановка задач. Рассмотрим в цилиндрической системе координат (r, φ, z) осесимметричную задачу о нормальном внедрении (индентировании) на заданную глубину жесткого штампа в пороупругий слой $0 \le z \le h$, закрепленный на упругом полупространстве $z < 0$. Деформация пороупругого слоя описывается соотношениями Ковина и Нунзиато [2]. Будем считать, что основание штампа плоское.

Деформация слоя $0 \le z \le h$, состоящего из изотропного материала с пустотами, согласно теории Ковина–Нунзиато, описывается при $k = 1$ системой дифференциальных уравнений в частных производных [2]

$$(\lambda_k + \mu_k)\frac{\partial\theta_k}{\partial r} + \mu_k\left(\Delta u_k - \frac{u_k}{r^2}\right) + \beta\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0$$

$$(\lambda_k + \mu_k)\frac{\partial\theta_k}{\partial z} + \mu_k\,\Delta w_k + \beta\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \quad \alpha\,\Delta\phi - \xi\phi - \beta\,\theta_k = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \theta_k = \frac{u_k}{r} + \frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{\partial w_k}{\partial z}$$

Здесь α – коэффициент пустотной диффузии, β – параметр связи микродилатационных и макродилатационных свойств, ξ – пустотная жесткость, функция $\phi(r, z)$ описывает изменение объемной части пор, μ_k и λ_k – коэффициенты Ламе, u_k и w_k, соответственно, перемещения вдоль осей r и z.

Деформация упругого полупространства $z < 0$ описывается первыми двумя уравнениями из (1.1) при $k = 2$ и $\beta = 0$.

Компоненты тензора напряжений в пороупругом слое определяются из следующих соотношений при $k = 1$

$$\sigma_z^k = \lambda_k\theta_k + 2\mu_k\frac{\partial w_k}{\partial z} + \beta\phi, \quad \tau_{rz}^k = \mu_k\left(\frac{\partial w_k}{\partial r} + \frac{\partial u_k}{\partial z}\right) \tag{1.2}$$

Соотношения (1.2) определяют напряжения в упругом полупространстве при $k = 2$ и $\beta = 0$.

При $z = h$ и $z = 0$ граничные условия примут вид

$$\tau_{rz}^1(r, z) = 0, \quad \frac{\partial\phi(r, z)}{\partial z} = 0\,(z = h), \quad w_1(r, z) = \delta(r), \quad (z = h,\ r \le a)$$

$$\sigma_z^1(r, z) = 0 \quad (z = h,\ r > a)$$

$$\tau_{rz}^1(r, z) = \tau_{rz}^2(r, z), \quad w_1(r, z) = w_2(r, z), \quad u_1(r, z) = u_2(r, z) \quad (z = 0) \tag{1.3}$$

$$\sigma_z^1(r,z) = \sigma_z^2(r,z), \quad \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial z} = 0 \quad (z = 0)$$

На бесконечности при $z \to -\infty$ напряжения и перемещения затухают.

В случае штампа с плоским основанием $\delta(r) = \delta = \text{const}$.

2. Вывод интегрального уравнения относительно контактных напряжений. Для определения контактных напряжений $\sigma_z(r,0) = q(r)$ будет построено интегральное уравнение (2.14). Предварительно, будем считать их известными. Тогда приходим к решению системы (1.1) с новыми граничными условиями

$$\tau_{rz}^1(r,z) = 0, \quad \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial z} = 0 \quad (z = h), \quad \sigma_z(r,z) = q(r), \quad (z = h,\ r \le a)$$

$$\sigma_z^1(r,z) = 0 \quad (z = h,\ r > a)$$

$$\tau_{rz}^1(r,z) = \tau_{rz}^2(r,z), \quad w_1(r,z) = w_2(r,z), \quad u_1(r,z) = u_2(r,z), \quad (z = 0) \tag{2.1}$$

$$\sigma_z^1(r,z) = \sigma_z^2(r,z), \quad \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial z} = 0 \quad (z = 0)$$

Неизвестные функции в системе (1.1) запишем в виде преобразования Ханкеля соответственно для пороупругого слоя ($k = 1$) и упругого полупространства ($k = 2$)

$$u_k(r,z) = \int_0^\infty A_k(u,z)J_1(ur)udu, \quad w_k(r,z) = \int_0^\infty B_k(u,z)J_0(ur)udu \quad (k = 1,\ 2)$$

$$\phi(r,z) = \int_0^\infty F(u,z)J_0(ur)udu \tag{2.2}$$

где $J_i(u)\,(i = 0,1)$ – функции Бесселя. В результате, для нахождения функций $A_k(u,z)$, $B_k(u,z)$, $F(u,z)$ придем к решению системы дифференциальных уравнений для пороупругого слоя (оператор $D = d/dz$)

$$c_1^2D^2A_1 - u^2A_1 - (1 - c_1^2)u\ DB_1 - u\ HF = 0$$

$$(1 - c_1^2)uDA_1 + D^2B_1 - c_1^2u^2B_1 + HDF = 0 \tag{2.3}$$

$$l_1^2(D^2F - u^2F) - \frac{l_1^2}{l_2^2}F - uA_1 - DB_1 = 0$$

и упругого полупространства

$$c_2^2D^2A_2 - u^2A_2 - (1 - c_2^2)uDB_2 = 0 \tag{2.4}$$

$$(1 - c_2^2)uDA_2 + D^2B_2 - c_2^2u^2B_2 = 0$$

На основе граничных условий (2.1) при $z = h$ и $z = 0$ получим:

$$DA_1 - uB_1 = 0, \quad DF = 0, \quad (1 - 2c_1^2)uA_1 + DB_1 + HF = Qc_1^2\mu_1^{-1}\ (z = h)$$

$$B_1 = B_2, \quad A_1 = A_2, \quad \mu_1(DA_1 - uB_1) = \mu_2(DA_2 - uB_2), \quad DF = 0\,(z = 0) \tag{2.5}$$

$$((1 - 2c_1^2)uA_1 + DB_1 + H_2F)\mu_1c_1^{-2} = ((1 - 2c_2^2)uA_2 + DB_2)\mu_2c_2^{-2}\ (z = 0)$$

$$Q(u) = \int_0^a q(r)J_0(ur)rdr, \quad q(r) = \int_0^\infty Q(u)J_0(ur)udu,$$

Здесь использованы следующие обозначения [12]

$$c_k^2 = \frac{\mu_k}{(\lambda_k + 2\mu_k)}, \quad H = \frac{\beta}{\lambda_2 + 2\mu_2}, \quad l_1^2 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad l_2^2 = \frac{\alpha}{\xi} \tag{2.6}$$

Общее решение системы (2.3) может быть представлено в виде

$$\begin{gathered} A_1(u,z) = (d_1 + d_2 z)e^{uz} + (d_3 + d_4 z)e^{-uz} + d_5 e^{mz} + d_6 e^{-mz} \\ B_1(u,z) = (s_1 + s_2 z)e^{uz} + (s_3 + s_4 z)e^{-uz} + s_5 e^{mz} + s_6 e^{-mz} \\ F(u,z) = (t_1 + t_2 z)e^{uz} + (t_3 + t_4 z)e^{-uz} + t_5 e^{mz} + t_6 e^{-mz} \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} s_1 = -d_1 - d_2 \frac{c_1^2 + 1 - N}{u(c_1^2 - 1 + N)}, \quad s_2 = -d_2, \quad t_1 = d_2 \frac{2c_1^2 l_2^2}{l_1^2(c_1^2 - 1 + N)}, \quad t_2 = 0 \\ s_3 = d_3 - d_4 \frac{c_1^2 + 1 - N}{u(c_1^2 - 1 + N)}, \quad s_4 = d_4, \quad t_3 = -d_4 \frac{2c_1^2 l_2^2}{l_1^2(c_1^2 - 1 + N)}, \quad t_4 = 0 \\ s_5 = -d_5 \frac{\sqrt{u^2 l_2^2 - N + 1}}{u l_1^2}, \quad t_5 = d_5 \frac{1 - N}{u N l_1^2}, \quad s_6 = d_6 \frac{\sqrt{u^2 l_2^2 - N + 1}}{u l_1^2}, \quad t_6 = d_6 \frac{1 - N}{u N\, l_1^2} \\ m = \sqrt{1 - N + u^2 l_2^2}\Big/ l_2 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Общее решение системы (2.4) может быть представлено в виде

$$A_2(u,z) = (a_1 + a_2 z)e^{uz}, \quad B_2(u,z) = (b_1 + b_2 z)\, e^{uz} \tag{2.9}$$

где

$$b_1 = -a_1, \quad b_2 = \frac{a_2 u(c_2^2 - 1) + a_1(c_2^2 + 1)}{u(1 - c_2^2)} \tag{2.10}$$

Для нахождения коэффициентов a_1, a_2, d_1, d_2, d_3, d_4 воспользуемся граничными условиями (2.4). В результате найдем выражение для $B_1(u,h)$,

$$B_1(u,h) = \frac{Q(u)}{2\mu_1(1 - c_1^2)} L(u), \quad L(s) = \frac{L_1(s)}{L_2(s)} \quad (s = u l_2) \tag{2.11}$$

Здесь функции $L_1(s)$ и $L_2(s)$ имеют следующую структуру

$$\begin{gathered} L_1(s) = \operatorname{ch}(Td)\left[2\operatorname{ch}(2sd)L_{11}(s) + L_{12}(s)\right] + \\ + \operatorname{sh}(Td)\left[\operatorname{ch}(2sd)L_{13}(s) + \operatorname{sh}(2sd)L_{14}(s) + L_{15}(s)\right] \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} L_2(s) = \operatorname{ch}(Td)[2\operatorname{ch}(2sd)L_{21}(s) + \operatorname{sh}(2sd)L_{22}(s) + L_{23}(s)] + \operatorname{sh}(Td)[\operatorname{ch}(2sd)L_{24}(s) + L_{25}(s) + \\ + \operatorname{sh}(2sd)L_{26}(s) + L_{27}(s)] + \operatorname{ch}(2sd)L_{28}(s) + \operatorname{sh}(2sd)L_{29}(s) \end{gathered}$$

где выражения для $L_{ij}(s)$ $(i = 1,2;\ j = 1,\ldots,9)$ не содержат параметра l_2, а содержат степенные функции от s, величину $T = \sqrt{s^2 - N + 1}$ в первой степени и параметры $d = h/l_2$, $\mu = \mu_2/\mu_1$.

Выражения для $L_{ij}(s)$ имеют довольно громоздкий вид и здесь не приводятся.

Используя граничное условие $w_1(r,0) = \delta(r)$ при $r \le a$ и $z = h$ из (1.3) найдем

$$w_1(r,h) = \frac{1}{2\mu_1(1 - c_1^2)} \int_0^\infty Q(u)L(u)uJ_0(ur)du = \delta(r) \ (r \le a) \tag{2.13}$$

Подставляя в (2.13) выражение для $Q(u)$ из (2.5) и удовлетворяя граничному условию $w_1(r,z) = \delta(r)\,(z = h,\ r \le a)$ из (1.3) после замены

$$r = xl_2, \quad \rho = yl_2, \quad u = s/l_2, \quad h = dl_2$$

получим после несложных преобразований искомое интегральное уравнение для определения контактных напряжений под штампом $q(r) = \sigma(r/l_2)$

$$\int_0^b \sigma(y) y k(y,x) dy = \frac{\mu_1}{(1-\nu_1)l_2}\delta(xl_2) \quad (x \le b) \tag{2.14}$$

$$k(y,x) = \int_0^\infty L(s) s J_0(sx) J_0(sy) ds \tag{2.15}$$

Здесь $2(1-c_1^2) = (1-\nu_1)^{-1}$, где ν_1 – коэффициент Пуассона для упругого слоя, $b = a/l_2$.

3. Решение интегрального уравнения. Для решения интегрального уравнения (2.14), (2.15) с символом ядра $L(s)$ из (2.11)–(2.12) применим прямой метод коллокаций [13]. Разобьем отрезок $[0, b]$ на n частей набором точек $b_j = \varepsilon j$ $(\varepsilon = b/n,\ j = 0,1,\ldots,n)$ и будем считать, что на каждом отрезке $[b_{j-1}, b_j]$ контактные напряжения имеют постоянное значение σ_j. Пусть $x_k = (b_k + b_{k-1})/2$ есть точки коллокаций, тогда интегральное уравнение дискретизируем по следующей схеме

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j \int_{b_{j-1}}^{b_j} k(y, x_k) y dy = \frac{\mu_1}{(1-\nu_1)l_2}\delta\left(x_k l_2\right) \quad (k = \overline{1,n}) \tag{3.1}$$

В результате получим систему для определения σ_j

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j a_{kj} = \frac{\mu_1}{1-\nu_1}\delta(x_k l_2) \quad (k = \overline{1,n}) \tag{3.2}$$

$$a_{kj} = \int_0^\infty L(s) J_0(sx_k)\left[b_j J_1(sb_j) - b_{j-1} J_1(sb_{j-1})\right] ds \tag{3.3}$$

Для нахождения силы, действующей на штамп, получим

$$P = 2\pi\int_0^a q(r) r dr = 2\pi l_2^2 \int_0^b \sigma(x) x dx = 2\pi\varepsilon l_2^2 \sum_{k=1}^n \sigma_k x_k \tag{3.4}$$

4. Числовые расчеты. Приведенная выше схема решения интегрального уравнения позволяет рассчитать контактные напряжения, форму поверхности вне штампа, силу, действующую на штамп при заданной величине перемещения штампа δ. В расчетах основное внимание уделялось влиянию параметров N, $\mu = \mu_2/\mu_1$ и толщины упругого слоя $h = d\, l_2$ на исследуемые величины.

Безразмерные контактные напряжения $\sigma^*(x) = \sigma(x)\dfrac{(1-\nu_1)\, l_2}{\mu_1\delta}$ на границе $z = h$ показаны на рис. 1.*a* – 3.*a*, приведенная деформация $w^*(x) = l_2^{-1} w\left(xl_2\right)$ поверхности $z = h$ вне штампа на рис. 1*b*. – 3.*b*. Отметим, что здесь при расчетах полагалось $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $b = 1$. Вычисления проводились с погрешностью не более 0.3%, для этого было достаточно

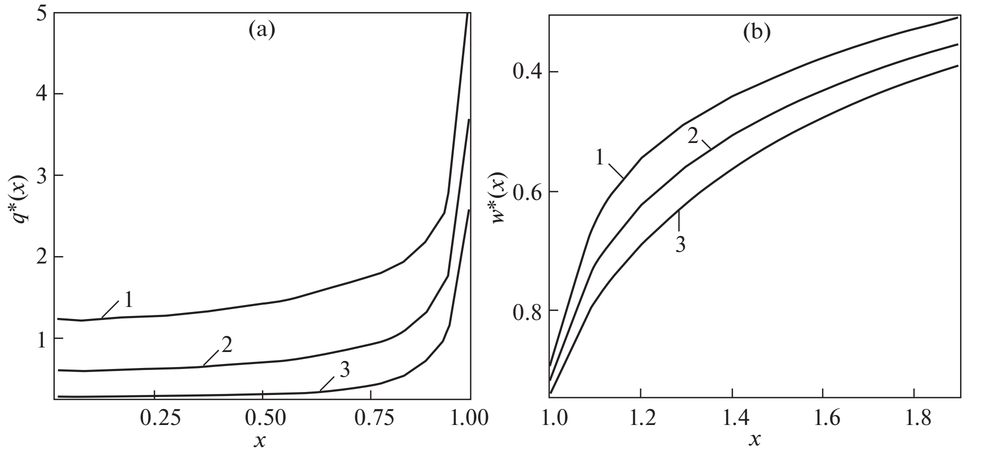

Рис. 1. а) Контактные напряжения. b) Перемещения поверхности $z = h$. $d = 0.25$, $N = 0.5$. Линия 1 – $\mu = 2$; линия 2 – $\mu = 1$; линия 3 – $\mu = 0.5$.

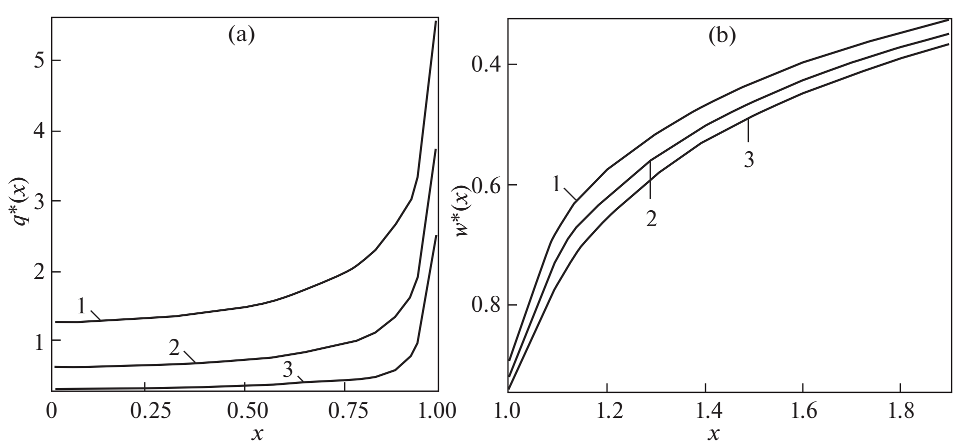

Рис. 2. а) Контактные напряжения. b) Перемещения поверхности $z = h$. $d = 0.1$, $N = 0.5$. Линия 1 – $\mu = 2$; линия 2 – $\mu = 1$; линия 3 –$\mu = 0.5$.

брать в системе (3.2) $n = 50$. При этих же параметрах вычислялась безразмерная сила $P^* = \dfrac{1-\nu_1}{\mu_1 \delta l_2} P$.

На рис. 1 приведены графики при $d = 0.25$, $N = 0.5$ и значениях $\mu = 2, 1, 0.5$, при этом соответствующие значения безразмерной силы $P^* = 6.50, 3.80, 2.13$. На рис. 2 приведены графики при $d = 0.1$, $N = 0.5$ и $\mu = 2, 1, 0.5$, соответствующие значения $P^* = 7.20, 3.89, 2.05$. На рис. 3 приведены графики при $d = 1$, $\mu = 1$ и $N = 0.5, 0.3, 0$, соответствующие значения $P^* = 3.57, 3.77, 3.96$.

Выводы. Расчеты показывают, что увеличение пористости слоя при постоянной величине смещения штампа, его радиуса и других параметров приводит к уменьшению

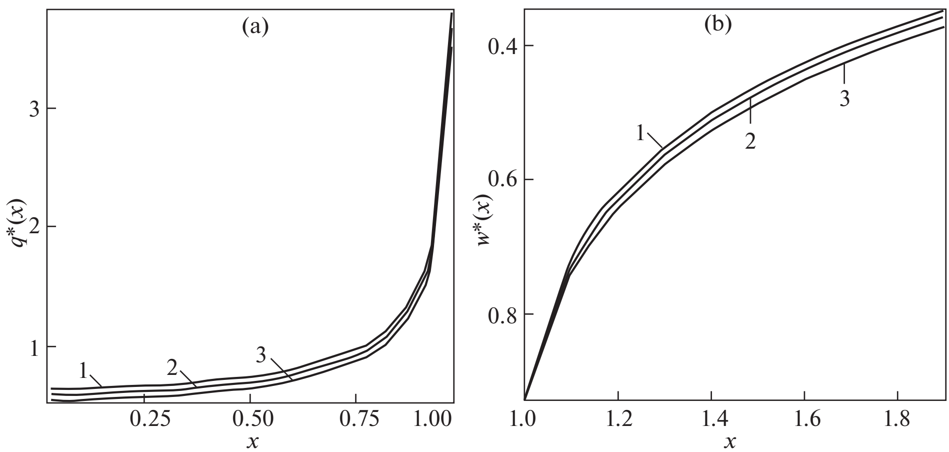

Рис. 3. (a) Контактные напряжения. (b) Перемещения поверхности $z = h$. $d = 1$, $\mu = 1$. Линия 1 – $N = 0$; линия 2 – $N = 0.3$; линия 3 – $N = 0.5$.

контактных напряжений под штампом, величины приложенной силы и перемещений поверхности $z = h$. Такая же картина наблюдается при уменьшении параметра μ, характеризующего относительную жесткость пороупругого слоя.

Увеличение относительной толщины пороупругого слоя при фиксированных значениях других параметров приводит к уменьшению максимальных контактных напряжений, величины приложенной силы и перемещений свободной поверхности слоя вне штампа. Влияние этого фактора менее заметно, чем изменение относительной жесткости пороупругого слоя.

Работа финансово поддержана Южным федеральным университетом (Министерство науки и высшего образования Российской Федерации). Проект № ВнГр-07/2020-07-ИМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nunziato G.W., Cowin S.C.* A nonlinear theory of elastic materials with voids // Arch Ration Mech Anal. 1979. V. 72. P. 175–201.
https://doi.org/10.1007/BF00249363
2. *Cowin S.C., Nunziato G.W.* Linear theory of elastic materials with voids // J. Elasticity. 1983. V. 13. P. 125–147.
https://doi.org/10.1007/BF00041230
3. *Scalia A., Sumbatyan M.A.* Contact problem for porous elastic half-plane // J. Elasticity. 2000. V. 60. P. 91–102.
https://doi.org/10.1023/A:1010880823544
4. *Scalia A.* Contact problem for porous elastic strip // Int. J. Eng. Sci. 2002. V. 40. P. 401–410.
https://doi.org/10.1016/S0020-7225(01)00070-2
5. *Chebakov M.I., Poddubnyy A.A., Kolosova E.M., Alexiev A., Datcheva M.* Contact interaction of axisymmetric indenter and poroelastic foundation // Mater. Phys. Mech. 2020. V. 44. P. 423–432.
https://doi.org/10.18720/MPM.4432020_13
6. *Chebakov M.I., Poddubny A.A., Kolosova E.M., Alexiev A.R., Iankov R.Z.* Contact interaction of axisymmetric indenter and poroelastic layer // Cr. Acad. Bulg. Sci. 2020. V. 73. № 6. P. 846–855.
https://doi.org/10.7546/CRABS.2020.06.13

7. *Kolosova E.M., Chebakov M.I.* Analytical solution of axisymmetric contact problem for a poroelastic layer // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 6. P. 857–864.
https://doi.org/10.3103/S0025654420050118
8. *Chebakov M.I., Kolosova E.M.* Contact interaction of axisymmetric stamp and elastic layer fixed on poroelastic base // Mech. Compos. Mater. 2021. V. 56. № 6. P. 769–778.
https://doi.org/10.1007/s11029-021-09922-9
9. *Artamonova N.B., Sheshenin S.V., Frolova Yu.V., Bessonova O.Yu., Novikov P.V.* Calculating components of the effective tensors of elastic moduli and biot's parameter of porous geocomposites // Mech. Compos. Mater. 2020. V. 55. № 6. P. 715–726.
https://doi.org/10.1007/s11029-020-09846-w
10. *Pleskachevskii Yu.M., Shil'ko S.V., Chernous D.A.* Structural modeling in the mechanics of porous materials // Mech. Compos. Mater. 2003. V. 39. P. 129–136.
https://doi.org/10.1023/A:1023457311851
11. *Bakhvalov N.S., Bogachev K.Yu., and Eglit M.E.* Numerical calculation of effective elastic moduli for incompressible porous material // Mech. Compos. Mater. 1996. V. 32. № 5. P. 399–405.
https://doi.org/10.1007/BF02313859
12. *Iesan D., Nappa L.* Axially symmetric problems for a porous elastic solid // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. P. 5271–5286.
https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00229-4
13. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.