ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 3, с. 88–96

УДК 533.2; 534.12

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА НИЗШУЮ ЧАСТОТУ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

© 2022 г. М. А. Ильгамов[a,b,c,*], А. Г. Хакимов[a,]**

[a] *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*
[b] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
[c] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*
**e-mail: ilgamov@anrb.ru*
***e-mail: hakimov@anrb.ru*

Поступила в редакцию 15.03.2021 г.
После доработки 11.09.2021 г.
Принята к публикации 12.10.2021 г.

Определяется низшая частота изгибных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью или газом. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на пластину в предположении ее цилиндрического изгиба. Поверхности пластины контактируют со средой разной плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

Ключевые слова: тонкая пластина, жидкость, газ, плотность, давление, присоединенная масса

DOI: 10.31857/S0572329922030084

1. Введение. Определение спектра частот пластин и оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, имеет большое значение [1–3]. Этой теме посвящена обширная литература. К ней примыкает также серия работ по колебаниям тонкостенных тел, не контактирующих с внешней средой.

Работа [4] посвящена аналитическому решению для определения собственных частот и форм изгибных колебаний защемленной по контуру квадратной однородной пластины. Произведено также сравнение расчетов с экспериментальными данными. Предложенная методика исследований и алгоритм расчета могут быть использованы для исследования изгибных колебаний пластин при других типах граничных условий. В [5] рассматривается задача расчета ортотропных полигональных пластин, подвергающихся акустическому воздействию с широким спектром.

В последнее время динамическая теория пластин находит широкое применение в анализе поведения упругих элементов микро- и наноразмеров. Среди многочисленных видов применения микро- и нанопленок, нанопроволок, нанотрубок может быть указано также использование их в качестве детекторов и сенсоров в химии, биологии и т.д [6–8]. Ввиду уникального применения изучению их эксплуатационных свойств уделяется в литературе большое внимание. Например, в [9, 10] дается обзор четырехсот статей, посвященных главным образом консольным резонаторам из нанопленок и нанопроволок. В [11] сообщалось о сверхчувствительных наномеханических резонаторах для структурных исследований ДНК-лигандных комплексов. Резонаторы с элек-

тростатическим приводом продемонстрировали большой потенциал в широком спектре применений, таких как датчики, устройства связи, логические элементы и квантовые измерения [12]. Для обнаружения и идентификации различных биочастиц и оценки их размеров в [13] применяется механический наносенсор. Решение нелинейного уравнения проводится с помощью метода Галеркина. В [14] анализируется динамическая неустойчивость консольной нанобалки, соединенной с горизонтальной пружиной.

Однако во всех этих работах взаимодействие среднего давления сред и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей пластины не учитывается. Это взаимодействие принимается во внимание в [15, 16] в случае легких газов, когда присоединенная масса сред мала. В монографиях [1–3] также не учитывается указанный эффект среднего давления. В [17] определяется спектр частот двухопорного резонатора с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на поверхности резонатора и кривизны, а также действия осевой нагрузки.

В данной работе определяется низшая собственная частота пластинки с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны срединной поверхности, а также действия присоединенной массы газовой среды с удаленными границами. В отличие от постановки задач в [1–3], где задается частота и определяется волновое число, здесь конструктивно задается длина полуволны и определяется частота. Такая постановка характерна для резонаторов.

Представляет интерес вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию пластины. Это проще выяснить в случае несжимаемой жидкости. Далее, с учетом полученного результата рассматривается случай сжимаемой жидкости в более простой постановке (в частности, не производится разложение в ряд Тейлора условий контакта).

В предположении цилиндрического изгиба тонкой пластины рассматривается уравнение [18]

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.1}$$

где E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала, h – толщина пластины, $w(x, t)$ – прогиб, x, t – координата, время, q – поперечная распределенная нагрузка.

На нижнюю и верхнюю поверхность пластины действуют давления $p_0 + p_1$ и $p_0 + p_2$ жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1, а). Здесь p_0 – давление сборки, в частности, атмосферное давление, действующее на все поверхности, p_1, p_2 – избыточные давления. При определении нагрузки q исходим из предположения, что ρ_1, ρ_2 и p_1, p_2 остаются постоянными при изгибе пластины.

2. Несжимаемая среда. Предполагаем, что области, занятые жидкостями, простираются неограниченно, опоры не препятствуют свободному перетеканию жидкости вдоль пластины в направлении оси x. Возникающие в результате движения пластины давления обозначим через $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$. Уравнения динамики несжимаемой жидкости относительно потенциала скорости $\varphi(x, z, t)$ имеют вид [1–3]

$$\frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial z^2} = 0, \quad \overline{p}_{1,2} = -\rho_{1,2}\frac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial t} \tag{2.1}$$

Условия на поверхностях

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}\left(z = -\frac{h}{2} + w\right), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}\left(z = \frac{h}{2} + w\right) \tag{2.2}$$

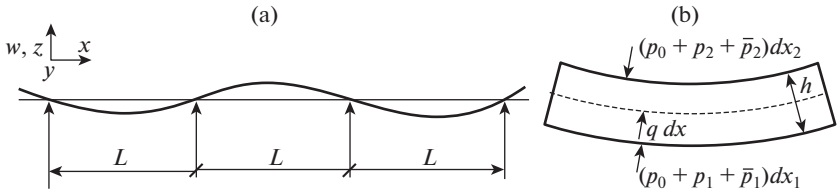

Рис. 1. (a) Пример крепления пластины. (b) Элемент dx срединной поверхности изогнутой пластины.

На большом удалении от поверхности возмущения от пластины исчезают

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0\,(z = -\infty), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0\,(z = \infty) \tag{2.3}$$

Элементарные длины dx_1, dx_2 нижней и верхней поверхностей, выраженные через длину dx срединной поверхности пластины, равны (рис. 1, b)

$$dx_1 = \left(1 + \varepsilon_x\left(-\frac{h}{2}\right)\right)dx, \quad dx_2 = \left(1 + \varepsilon_x\left(\frac{h}{2}\right)\right)dx \tag{2.4}$$

где деформации в соответствии с гипотезами Кирхгоффа [18]

$$\varepsilon_x\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

Распределенная сила q определяется по формуле [15, 16]

$$qdx = (p_0 + p_1 + \bar{p}_1)\,dx_1 - (p_0 + p_2 + \bar{p}_2)\,dx_2 \tag{2.6}$$

Предполагаем, что пластина неограниченной длины по оси x опирается на опоры, расположенные на равных расстояниях L и допускающие свободный поворот. Примем

$$w = W\sin\beta x\sin\omega t, \quad \beta = \pi/L \tag{2.7}$$

что удовлетворяет условиям $w = 0$, $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ при $|x| = 0, L, 2L, \ldots$. Тогда в функциях

$$\varphi_1 = \Phi_1(z)\sin\beta x\cos\omega t, \quad \varphi_2 = \Phi_2(z)\sin\beta x\cos\omega t \tag{2.8}$$

по (2.1) имеем $\Phi_1(z) = A_1\exp(\beta z), \Phi_2(z) = A_2\exp(-\beta z)$. При этом удовлетворяются условия (2.3).

Разлагая функции $\partial\varphi_1/\partial z$, $\partial\varphi_2/\partial z$ в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$, условия (2.2) приведем к виду

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \left(-\frac{h}{2} + w\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial t}(z = 0), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \left(\frac{h}{2} + w\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial t}(z = 0)$$

В линейной задаче член с w в данных условиях должен быть опущен. Подставляя сюда выражения (2.7), (2.8) с учетом Φ_1, Φ_2, получаем

$$A_1 = W\frac{\omega}{\beta}\left(1 - \frac{\beta h}{2}\right)^{-1}, \quad A_2 = -W\frac{\omega}{\beta}\left(1 - \frac{\beta h}{2}\right)^{-1}$$

Выражения (2.8) через амплитуду прогиба W приобретают вид

$$\varphi_1 = W\frac{\omega}{\beta}\left(1 - \frac{\beta h}{2}\right)^{-1}\exp(\beta z)\sin\beta x\cos\omega t \tag{2.9}$$

$$\varphi_2 = -W\frac{\omega}{\beta}\left(1-\frac{\beta h}{2}\right)^{-1}\exp(-\beta z)\sin\beta x\cos\omega t$$

При вычислении акустического давления на поверхностях пластины $z = -h/2 + w$, $z = h/2 + w$ выражение (2.1) также сведем к поверхности $z = 0$

$$\bar{p}_1 = -\rho_1\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \left(-\frac{h}{2}+w\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t\partial z}\right](z=0)$$

$$\bar{p}_2 = -\rho_2\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \left(\frac{h}{2}+w\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t\partial z}\right](z=0)$$

Подставим сюда выражения (2.9), предварительно опустив нелинейные члены с w. Тогда получаем

$$\bar{p}_1 = W\frac{\rho_1\omega^2}{\beta}\sin\beta x\sin\omega t, \quad \bar{p}_2 = -W\frac{\rho_2\omega^2}{\beta}\sin\beta x\sin\omega t$$

С учетом соотношения для прогиба эти выражения могут быть представлены в виде

$$\bar{p}_1 = -\frac{\rho_1}{\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar{p}_2 = \frac{\rho_2}{\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

Из (2.6), (2.4), (2.5), (2.10) находим распределенную поперечную нагрузку

$$q = p_1 - p_2 + \frac{(2p_0+p_1+p_2)h}{2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho_1+\rho_2}{\beta}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[-\frac{\rho_1-\rho_2}{\beta}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\frac{h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

Последний член в скобках (2.11) должен быть опущен в рамках принятого приближения линейной теории. Он обращается в нуль при $\rho_1 = \rho_2$.

Уравнение (1.1) с учетом (2.11)

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{(2p_0+p_1+p_2)h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\rho h + \frac{\rho_1+\rho_2}{\beta}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_1 - p_2 \tag{2.12}$$

В частном случае $\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$ и функции прогиба (2.7) из (2.12) получаем для низшей собственной частоты ω

$$\omega^2 = \omega_0^2\frac{1+\alpha}{1+\mu}, \quad \omega_0^2 = \frac{D\beta^4}{\rho h}, \quad \alpha = \frac{(p_0+p_1)h}{D\beta^2}, \quad \mu = \frac{2\rho_1}{\rho h\beta} \tag{2.13}$$

Здесь ω_0 – частота пластины, не контактирующей с жидкостью. Параметры α и μ определяют влияние давления и плотности окружающей среды. Таким образом, давление повышает, плотность понижает собственную частоту пластины. При $\alpha \ll 1$, $\mu \ll 1$ их влияние исчезает. Через исходные параметры α, μ записываются

$$\alpha \approx \frac{p_0+p_1}{E}\left(\frac{L}{h}\right)^2, \quad \mu = \frac{2\rho_1 L}{\pi\rho h} \tag{2.14}$$

При $E = 2\times10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.8\times10^3$ кг/м^3, $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3, $p_0 = 0$, $p_1 = 2$ МПа, $L/h = 1$, $\alpha \approx 10^{-3}$, $\mu = 0.81$. Следовательно, нет влияния давления, имеется значительное снижение собственной частоты за счет присоединенной массы.

Если $p_1 = 20$ МПа, $L/h = 100$, то $\alpha \approx 10^{-4}\times10^4 \approx 1$, $\mu = 8.1$. По модели несжимаемой жидкости в случае воды имеется только снижение собственной частоты. Это известный результат [1–3], однако учет влияния давления вносит некоторое изменение частоты.

Общая оценка рассматриваемых эффектов состоит в том, что при $\alpha > \mu$ преобладает повышающее частоту влияние давления среды, а при $\alpha < \mu$ – понижающее влияние плотности (или присоединенной массы). Через входные параметры эти неравенства имеют вид

$$\frac{p_1\rho L}{E\rho_1 h} > 1, \quad \frac{p_1\rho L}{E\rho_1 h} < 1$$

Первый случай реализуется для весьма тонких пластин из материала с малым модулем упругости и при предельно высоком давлении в контактирующей среде. Второй случай всегда реализуется при невысоких давлениях в плотной среде.

3. Сжимаемая среда. По модели сжимаемой среды вместо уравнений (2.1) имеем [1–3]

$$\frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{1,2}^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial t^2} = 0, \quad \bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2}\frac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial t}, \quad c_{1,2}^2 = \kappa_{1,2}\frac{p_{1,2}}{\rho_{1,2}} \tag{3.1}$$

где, $c_{1,2}$ – скорость звука, $\kappa_{1,2}$ – коэффициент адиабаты. В отличие от случая несжимаемой жидкости здесь давление и плотность не являются независимыми, а связаны изотермическим законом.

Рассмотрим частный случай одинаковых сред при одинаковых давлениях ($\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$, $c_1 = c_2$). При функциях (2.7), (2.8)

$$w = W\sin\beta x\sin\omega t, \quad \varphi_{1,2} = \Phi_{1,2}(z)\sin\beta x\cos\omega t \tag{3.2}$$

из волнового уравнения (3.1) следует

$$\Phi_{1,2} = A_{1,2}e^{kz} + B_{1,2}e^{-kz}, \quad k^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \tag{3.3}$$

Будем рассматривать случай $k^2 > 0$. Обоснование этого условия приводится далее. Положив $A_2 = 0$, $B_1 = 0$ в соответствии с условиями (2.3), получаем частное решение

$$\varphi_1 = A_1e^{kz}\sin\beta x\cos\omega t, \quad \varphi_2 = B_2e^{-kz}\sin\beta x\cos\omega t \tag{3.4}$$

Как показано выше, при определении распределенной нагрузки q необходимо учитывать условия при $z = \pm h/2$, а при определении $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ на поверхностях пластины и удовлетворении условий (3.2) в линейной задаче вместо $z = \pm h/2 + w$ можно принять $z = 0$. Тогда из условий (3.4) $A_1 = \omega W/k$, $B_2 = -\omega W/k$ и

$$\bar{p}_1 = -\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \rho_1\frac{\omega^2}{k}W\sin\beta x\sin\omega t, \quad \bar{p}_2 = -\rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = -\rho_2\frac{\omega^2}{k}W\sin\beta x\sin\omega t$$

Правая часть уравнения (1.1) равна ($\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$)

$$q = (p_0 + p_1)h\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = p_1 h\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2\rho_1\omega^2}{k}W\sin\beta x\sin\omega t \tag{3.5}$$

Подставив в (1.1) выражение w и q из (3.2) и (3.5), получим для $p_0 = 0$

$$\begin{gathered} D\beta^4 - \rho h\omega^2 + p_1 h\beta^2 - \frac{2\rho_1\omega^2}{k} = 0 \\ \omega_0^2 = \frac{D\beta^4}{\rho h}, \quad k^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad \beta = \frac{\pi}{L} \end{gathered} \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует

$$1 - Z + \alpha - \frac{\mu Z}{\sqrt{1 - \eta Z}} = 0, \quad \alpha = \frac{p_1\beta^2}{\rho\omega_0^2}, \quad \mu = \frac{2\rho_1}{\rho h\beta}, \quad \eta = \frac{\omega_0^2}{c_1^2\beta^2}, \quad Z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \tag{3.7}$$

Рассмотрим случай $1 - \eta Z > 0$. Частотное уравнение (3.7) представим в виде кубического

$$\begin{gathered} Z^3 + b_1 Z^2 + b_2 Z - b_3 = 0 \\ b_1 = -2\delta - \frac{1}{\eta} + \frac{\mu^2}{\eta}, \quad b_2 = \delta^2 + \frac{2\delta}{\eta}, \quad b_3 = -\frac{\delta^2}{\eta}, \quad \delta = 1 + \alpha \end{gathered} \tag{3.8}$$

Низшая собственная частота колебаний равна $f_1 = \omega/2\pi, \quad \omega = \omega_0\sqrt{Z}$.

При $E = 76 \times 10^3$ МПа, $\nu = 037$, $\rho = 10500$ кг/м^3, $h = 20$ нм, $L = 2000$ нм, $\kappa_{1,2} = 1.4$, атмосферном давлении $p_a = 0.1$ МПа, плотности воздуха $\rho_{1a} = 1.2928$ кг/м^3, $p_1 = 2$ МПа численное решение уравнения (3.7) дает корень: $Z = 1.10268$. Соответствующая частота равна $f_1 = 6.894$ МГц. Решение кубического уравнения (3.8), естественно, дает такой же корень: $Z = 1.10268$.

Для проверки выполнения условия $k^2 > 0$ учтем полученное выражение $\omega = \omega_0\sqrt{Z}$, где ω_0 дается в (3.6). В рассмотренном примере $Z \approx 1.1$, т.е. имеет место преобладание влияния давления воздуха над его плотностью. Условие $k^2 > 0$ или

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 \left(\frac{h}{L}\right)^2 < 10, \quad c^2 = \frac{E}{(1 - \nu^2)\rho}$$

при $L/h > 10$ для случая стальной пластины и воды выполняется всегда, а в случае газов – при больших значениях L/h (например, $L/h > 15$).

Приведем приближенное решение уравнения (3.7). Примем $Z = 1 - a$, $a^3 \ll 1$. Подставим это выражение в (3.7) и приравняем нулю, пренебрегая членом, содержащим a^3,

$$\begin{gathered} d_1 a^2 + d_2 a + d_3 = 0, \quad d_1 = 2\delta\eta - 3\eta + 1 - \mu^2 \\ d_2 = (\delta^2 - 4\delta + 3)\eta + 2\mu^2 + 2\delta - 2, \quad d_3 = (1 - \delta)^2 (1 + \eta) - \mu^2 \end{gathered} \tag{3.9}$$

Из (3.9) находим

$$a = \frac{-d_2 + \sqrt{d_2^2 - 4d_1 d_3}}{2d_1}$$

Если $\delta = 1$, то $d_1 = 1 - \eta - \eta^2$, $d_2 = 2\mu^2$, $d_3 = -\mu^2$.

Если пренебречь членом, содержащим a^2, то получим $a = -d_3/d_2$.

Результаты расчета *низшей* собственной частоты изгибных колебаний пластинки по приближенным формулам (3.9) и $a = -d_3/d_2$ в соответствии с условиями на величину a сведены в табл. Для воздуха в рассматриваемом диапазоне давлений формула $a = -d_3/d_2$ дает погрешность не более 9%.

Также приведем решение уравнения (3.7) в виде

$$Z = \frac{\delta}{1 + \mu}[C_1 + C_2\eta\mu\delta + C_3\eta^2\mu\delta^2] \tag{3.10}$$

Для $\eta \ll 1$ представим $\sqrt{1 - \eta Z}$ как

$$\sqrt{1 - \eta Z} \approx 1 - \frac{1}{2}\eta Z \approx \frac{1}{2}\frac{\eta\delta(C_1 + C_1\mu + C_2\delta)}{(1 + \mu)^2} \tag{3.11}$$

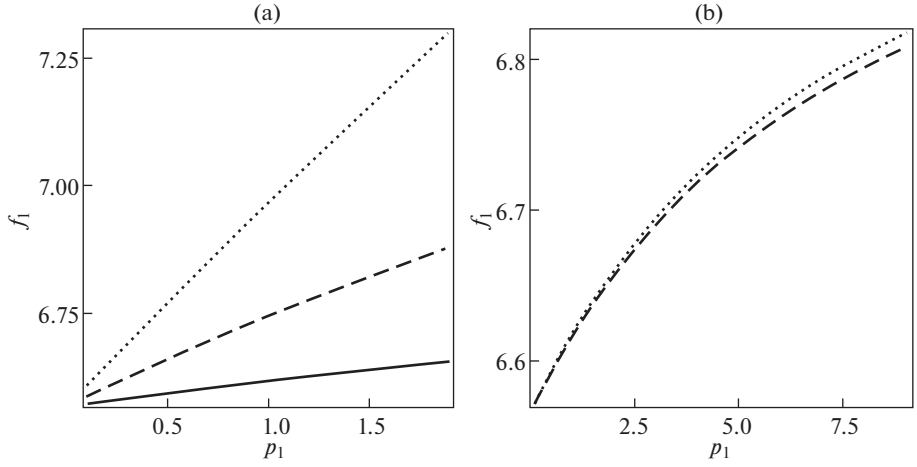

Рис. 2. Зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки f_1 (MHz) от давления p_1 (MPa): (a) для разных газов: $\rho_1 = 0.1785$ (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) kg/m^3 (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (b) по формулам для несжимаемой (2.14) и сжимаемой (3.7) жидкостей для двуокиси углерода $\rho_1 = 1.9768$ kg/m^3 (пунктирная, штриховая линии соответственно).

Подставляя выражения (3.10), (3.11) в уравнение (3.7), разлагая полученное соотношение в ряд по степеням δ и приравнивая нулю коэффициенты при δ, δ^2, δ^3, получим систему трех линейных уравнений, решение которой записывается

$$C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{1}{2(1+\mu)^2}, \quad C_3 = -\frac{1-\mu}{4(1+\mu)^4}$$

Из приведенных расчетов видно, что внешнее давление и наличие газа оказывает существенное влияние на частоты колебаний пластины. Также отметим высокую точность приближенной формулы (3.9) и решения в виде (3.10).

На рис. 2, a приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов. Из рис. 2, a видно, что с ростом давления собственная частота колебаний возрастает. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 2, b приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Из рис. 2, b видно, что частоты по модели несжимаемой жидкости выше частот по модели для сжимаемой жидкости из-за увеличения плотности, причем с ростом давления разность частот колебаний возрастает.

5. Заключение. Хорошо известно из литературы (например, [1–3]), что собственные частоты изгибных колебаний пластины при ее контакте с жидкостью значительно снижаются. Это объясняется влиянием присоединенной массы жидкости. Установлено [15, 16], что учет разности площадей противоположных поверхностей пластины, образующейся при ее изгибе, может оказывать повышающее влияние на собственные частоты. Учет этого эффекта приводит к появлению распределенной поперечной силы, равной произведению кривизны срединной поверхности и среднего давления на поверхности пластины.

Одновременное влияние указанных факторов на низшую частоту колебаний в случае несжимаемой жидкости зависит от отношения среднего давления к модулю упру-

Таблица 1. Первая собственная частота изгибных колебаний пластинки, p_1, MPa, f_1, MHz

p_1	0.1	0.1	2	2
α	0.0138	0.0138	0.2761	0.2761
μ	0	0.0078	0	0.1568
a	–0.0138	–0.0059	–0.2754	–0.1027
Z (3.7)	1.0138	1.0059	1.2761	1.1027
f_1 (3.7)	6.6108	6.5850	7.4170	6.8945
f_1 ($a^3 = 0$) (3.9)	6.6108	6.5850	7.4150	6.8946
f_1 ($a^2 = 0$)	6.5663	6.5661	6.8106	6.7363
f_1 (3.10)	6.6108	6.5850	7.4171	6.8945

гости материала, плотностей материала и жидкости и отношения длины пластины к ее толщине. Для реальных параметров характерно превалирующее влияние плотности среды над давлением в ней. Однако давление может оказывать заметное влияние на результат.

Для сжимаемой жидкости влияние носит более сложный характер, так как присоединенная масса зависит от скорости звука и от самой частоты колебаний. Кроме того, давление и плотность газовой среды не являются независимыми.

Влияние контактирующей среды на низшую частоту колебаний является значительным для весьма тонких пластин и пленок с низким модулем упругости. Учет его необходим особенно в случае элементов микро- и наноразмерных толщин.

С ростом давления собственная частота колебаний возрастает. В случае легких газов (водород, гелий) влияние давления может превалировать над их плотностью. Эти результаты могут быть использованы при моделировании колебаний пластинок, контактирующих с жидкостью и газом, в том числе микро- и наноразмеров.

Работа проведена в порядке выполнения государственного задания (№ 0246-2019-0088).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 102 с.
2. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
3. *Попов А.Л., Чернышев Г.Н.* Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит. 1994. 208 с.
4. *Нестеров С.В.* Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. № 6. С. 159–165.
5. *Денисов С.Л., Копьев В.Ф., Медведский А.Л., Остриков Н.Н.* Исследования проблем долговечности ортотропных полигональных пластин при широкополосном акустическом воздействии с учетом эффектов излучения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2020. № 5. С. 138–150.
https://doi.org/10.31857/S0572329920030058
6. *O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M. et al.* Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. 2010. V. 464. P. 697–703.
https://doi.org/10.1038/nature08967
7. *Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M. et al.* Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // Nature. 2007. V. 446. P. 1066–1069.
https://doi.org/10.1038/nature05741

8. *Husale S., Persson H.H.J., Sahin O.* DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // Nature. 2009. V. 462. P. 1075–1078.
https://doi.org/10.1038/nature08626
9. *Raman A., Melcher J., Tung R.* Cantilever dynamics in atomic force microscopy // Nano Today. 2008. V. 3. № 1–2. P. 20–27.
https://doi.org/10.1016/S1748-0132(08)70012-4
10. *Eom K., Park H. S., Yoon D. S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // Physics Reports. 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.03.002
11. *Stassi S., Marini M., Allione M. et al.* Nanomechanical DNA resonators for sensing and structural analysis of DNA-ligand complexes // Nature Communications. 2019. V. 10. P. 1690.
https://doi.org/10.1038/s41467-019-09612-0
12. *Jaber N., Hafiz M.A.A., Kazmi S.N.R. et al.* Efficient excitation of micro/nano resonators and their higher order modes // Scientific Reports. 2019. V. 9. P. 319.
https://doi.org/10.1038/s41598-018-36482-1
13. *SoltanRezaee M., Bodaghi M.* Simulation of an electrically actuated cantilever as a novel biosensor // Scientific Reports. 2020. V. 10. P. 3385.
https://doi.org/10.1038/s41598-020-60296-9
14. *Tavakolian F., Farrokhabadi A., SoltanRezaee M., Rahmanian S.* Dynamic pull-in of thermal cantilever nanoswitches subjected to dispersion and axial forces using nonlocal elasticity theory // Microsystem Technologies. 2019. V. 25. № 3. P. 19–30.
https://doi.org/10.1007/s00542-018-3926-y
15. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
16. *Ильгамов М.А.* Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // ФТТ. 2019. Т. 61. № 10. С. 1825–1830.
https://doi.org/10.21883/FTT.2019.10.48255.381
17. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // J. Appl. Comput. Mech. 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848
18. *Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W.* Vibration Problems in Engineering. New York: John Wiley & Sons. 1974.